

Άσκηση 1

Να δείξετε ότι το $\widehat{S}(\vec{x}_0, \varepsilon) = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\vec{x} - \vec{x}_0\| \leq \varepsilon \right\}$ είναι κλειστό σύνολο.

Απόδειξη

Έστω $S^c = \mathbb{R}^n \setminus \widehat{S}(\vec{x}_0, \varepsilon) = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\vec{x} - \vec{x}_0\| > \varepsilon \right\}$ το συμπλήρωμα του $\widehat{S}(\vec{x}_0, \varepsilon)$ ως προς $\mathbb{R}^n$

και $\vec{x} \in S^c : \|\vec{x} - \vec{x}_0\| > \varepsilon \implies \exists \delta > 0 : \|\vec{x} - \vec{x}_0\| = \delta + \varepsilon$. Τότε $\forall \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ με $0 < \|\vec{y} - \vec{x}\| < \delta :$

$$\|\vec{x} - \vec{x}_0\| = \|\vec{x} - \vec{y} + \vec{y} - \vec{x}_0\| \leq \|\vec{x} - \vec{y}\| + \|\vec{y} - \vec{x}_0\| \implies \|\vec{y} - \vec{x}_0\| \geq \|\vec{x} - \vec{x}_0\| - \|\vec{x} - \vec{y}\| > \varepsilon + \delta - \delta \implies$$

$$\|\vec{y} - \vec{x}_0\| > \varepsilon \implies \vec{y} \in S^c. \text{ Άρα για τυχόν } \vec{x} \in S^c, S(\vec{x}, \delta) \subseteq S^c \implies$$

$$\forall \vec{x} \in S^c : \exists \delta(\vec{x}, \varepsilon) = \|\vec{x} - \vec{x}_0\| - \varepsilon = \delta > 0 : S(\vec{x}, \delta) \subseteq S^c \implies S^c \text{ ανοιχτό} \implies \widehat{S}(\vec{x}_0, \varepsilon) \text{ κλειστό}$$

Άσκηση 2

Να δείξετε ότι:

(α) το $(\alpha_1, b_1) \times (\alpha_2, b_2) \times \dots \times (\alpha_n, b_n)$ είναι ανοιχτό σύνολο και

(β) το $[\alpha_1, b_1] \times [\alpha_2, b_2] \times \dots \times [\alpha_n, b_n]$ είναι κλειστό σύνολο.

Απόδειξη

(α) $\vec{x} \in (\alpha_1, b_1) \times (\alpha_2, b_2) \times \dots \times (\alpha_n, b_n) = A_n \Leftrightarrow \alpha_j < x_j < b_j \forall j = 1, 2, \dots, n$

$$(\alpha_1, b_1) \equiv S\left(\frac{\alpha_1 + b_1}{2}, \frac{b_1 - \alpha_1}{2}\right) \implies (\alpha_1, b_1) \text{ ανοιχτό} : \Pi(1)$$

έστω $\Pi(n-1) : A_{n-1} = (\alpha_1, b_1) \times (\alpha_2, b_2) \times \dots \times (\alpha_{n-1}, b_{n-1})$ ανοιχτό

Τότε για τυχαίο $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in A_n :$

$$\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) = \{(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})\} \times \{(x_n)\} = \{pr_{A_{n-1}}(\vec{x})\} \times \{(x_n)\}. \text{ Από επαγωγική υπόθεση}$$

$$\exists \varepsilon > 0 : S(pr_{A_{n-1}}(\vec{x}), \varepsilon) \subseteq A_{n-1}. \text{ Για } \varepsilon' = \frac{|x_n - \alpha_n| + |x_n - b_n| - \left| |x_n - \alpha_n| - |x_n - b_n| \right|}{2} > 0$$

$$\forall \vec{y} \in S(pr_{A_{n-1}}(\vec{x}), \varepsilon) \times S(x_n, \varepsilon') : \forall j = 1, 2, \dots, n-1 : \alpha_j < x_j < b_j \text{ και } \alpha_n < x_n < b_n \implies$$

$$\text{για } \delta = \min\{\varepsilon, \varepsilon'\} > 0 : S(\vec{x}, \min\{\varepsilon, \delta\}) \subseteq A_n \implies A_n \text{ ανοιχτό} : \Pi(n)$$

$\Pi(1)$ και $\Pi(n) \implies \Pi(n+1) :$

$\forall n \in \mathbb{N} : (\alpha_1, b_1) \times (\alpha_2, b_2) \times \dots \times (\alpha_n, b_n)$ ανοιχτό σύνολο

(β) $\vec{x} \in [\alpha_1, b_1] \times [\alpha_2, b_2] \times \dots \times [\alpha_n, b_n] = B_n \Leftrightarrow \alpha_j \leq x_j \leq b_j \forall j = 1, 2, \dots, n$

$$[\alpha_1, b_1] \equiv \widehat{S}\left(\frac{\alpha_1 + b_1}{2}, \frac{b_1 - \alpha_1}{2}\right) \implies [\alpha_1, b_1] \text{ κλειστό} : \Pi(1)$$

έστω $\Pi(n-1) : B_{n-1} = [\alpha_1, b_1] \times [\alpha_2, b_2] \times \dots \times [\alpha_{n-1}, b_{n-1}]$ κλειστό $\implies (B_{n-1})^c$ ανοιχτό

$$B_n = B_{n-1} \times [\alpha_n, b_n] \implies (B_n)^c = (B_{n-1} \times [\alpha_n, b_n])^c \implies$$

$$(B_n)^c = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid proj_{B_{n-1}}(\vec{x}) \notin B_{n-1} \text{ ή } x_n < \alpha_n \text{ ή } x_n > b_n \right\} \implies$$

$$(B_n)^c = \left\{ (B_{n-1})^c \times \mathbb{R} \right\} \cup \left\{ \mathbb{R}^{n-1} \times (-\infty, \alpha) \right\} \cup \left\{ \mathbb{R}^{n-1} \times (\beta, +\infty) \right\}, \alpha \vee \Gamma = (B_{n-1})^c \times \mathbb{R},$$

$\Delta = \mathbb{R}^{n-1} \times (-\infty, \alpha)$ και $E = \mathbb{R}^{n-1} \times (\beta, +\infty)$, τότε $(B_n)^c = \Gamma \cup \Delta \cup E$. Παρατηρούμε ότι

$$\Gamma^c = B_{n-1} \times \mathbb{R}, \Delta^c = \mathbb{R}^{n-1} \times [a, +\infty), E^c = \mathbb{R}^{n-1} \times (-\infty, \beta] \text{ κλειστά υποσύνολα } \mathbb{R}^n \implies$$

Γ, Δ, E ανοιχτά υποσύνολα $\mathbb{R}^n$. Τότε $(B_n)^c$ ανοιχτό υποσύνολο $\mathbb{R}^n$ (ως ένωση ανοιχτών συνόλων) $\implies B_n$ κλειστό : $\Pi(n)$

$\Pi(1)$ και $\Pi(n) \implies \Pi(n+1)$:
 $\forall n \in \mathbb{N} : [\alpha_1, b_1] \times [\alpha_2, b_2] \times \dots \times [\alpha_n, b_n]$ κλειστό σύνολο

Άσκηση

Να βρείτε το σύνορο των συνόλων :

(i) $(0, +\infty)$

(ii) $\mathbb{R}$

(i) $bd((0, +\infty)) = \{x \in \mathbb{R} \mid \forall \varepsilon > 0 : S(x, \varepsilon) \cap (0, +\infty) \neq \emptyset \text{ και } S(x, \varepsilon) \cap (\mathbb{R} \setminus (0, +\infty)) \neq \emptyset\} \implies$
 $bd((0, +\infty)) = \{x \in \mathbb{R} \mid \forall \varepsilon > 0 : S(x, \varepsilon) \cap (0, +\infty) \neq \emptyset \text{ και } S(x, \varepsilon) \cap (-\infty, 0) \neq \emptyset\} \implies$
 $bd((0, +\infty)) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0 \text{ και } x \leq 0\} = \{0\}$

(ii) $bd\mathbb{R} = \{x \in \mathbb{R} \mid \forall \varepsilon > 0 : S(x, \varepsilon) \cap \mathbb{R} \neq \emptyset \text{ και } S(x, \varepsilon) \cap \emptyset \neq \emptyset\} = \emptyset$

Πρόταση

Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα :

(α) A κλειστό

(β) $A' \subseteq A$

(γ) $bdA \subseteq A$

Απόδειξη

Αν A κλειστό (α) : έστω $\vec{x} \in A' : \forall \varepsilon > 0 : S(\vec{x}, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ και $\vec{x} \notin A \implies \vec{x} \in A^c = \mathbb{R}^n \setminus A$

A κλειστό $\implies A^c$ ανοιχτό : $\exists \varepsilon > 0 : S(\vec{x}, \varepsilon) \subseteq A^c \implies S(\vec{x}, \varepsilon) \cap A = \emptyset$, άτοπο. Άρα $\forall \vec{x} \in A' \implies \vec{x} \in A \implies$

$A' \subseteq A$ (β)

$bdA = \left\{ \vec{x} \in A \mid \forall \varepsilon > 0 : S(\vec{x}, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset \text{ και } S(\vec{x}, \varepsilon) \cap A^c \neq \emptyset \right\} = A' \cap (A^c) ' \subseteq A' \subseteq A$ (γ). Έχουμε δείξει ότι

(α) $\implies$ (β) $\implies$ (γ). Αν $bdA \subseteq A$ (γ) : έστω A ανοιχτό : $\forall \vec{x} \in A : \exists \varepsilon > 0 : S(\vec{x}, \varepsilon) \subseteq A$, άτοπο.

$\forall \vec{x} \in bdA \subseteq A : \forall \varepsilon > 0 : S(\vec{x}, \varepsilon) \cap A^c \neq \emptyset \implies \forall \varepsilon > 0 : \exists \vec{y} \in S(\vec{x}, \varepsilon) : \vec{y} \notin A \implies \nexists \varepsilon > 0 : S(\vec{x}, \varepsilon) \subseteq A$.

Άρα A κλειστό, δηλαδή (γ) $\implies$ (α). Τελικά, (α) $\implies$ (β) $\implies$ (γ) $\implies$ (δ) $\implies$ (α), δηλαδή

(α) $\Leftrightarrow$ (β) $\Leftrightarrow$ (γ) $\Leftrightarrow$ (δ)

Πρόταση

Έστω $f, g : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} : \exists M \geq 0 : |f(\vec{x})| \leq M \forall \vec{x} \in A$ και $\exists \vec{x}_0 \in A' : \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} g(\vec{x}) = 0$.

Τότε $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} [f(\vec{x})g(\vec{x})] = 0$

Απόδειξη

για $M = 0 : f(\vec{x}) = 0 \implies f(\vec{x})g(\vec{x}) = 0 \implies \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} [f(\vec{x})g(\vec{x})] = 0 \forall \vec{x}_0 \in A'$

για $M > 0$: έστω $\varepsilon > 0 \implies \frac{\varepsilon}{M} > 0 : \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} g(\vec{x}) = 0 \implies \exists \delta \left(\vec{x}_0, \frac{\varepsilon}{M} \right) = \delta > 0 : \forall \vec{x} \in A \text{ με } 0 < \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \delta :$

$|g(\vec{x})| < \frac{\varepsilon}{M}$. Για $0 < \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \delta : |f(\vec{x})g(\vec{x})| \leq |f(\vec{x})||g(\vec{x})| \leq M|g(\vec{x})| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta(\vec{x}_0, \varepsilon) = \delta_2 > 0 : \forall \vec{x} \in A \text{ με } 0 < \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \delta_2 : |f(\vec{x})g(\vec{x})| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} [f(\vec{x})g(\vec{x})] = 0$

Θεώρημα

Έστω $\vec{f} : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ με $f(\vec{x}) = (f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}), \dots, f_j(\vec{x}), \dots, f_m(\vec{x})) \text{ } j = 1, 2, \dots, m,$

$\vec{x}_0 \in A'$ και $\vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_j, \dots, b_m)$. Τότε $\forall j = 1, 2, \dots, m : \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{b} \Leftrightarrow \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f_j(\vec{x}) = b_j$

Απόδειξη

$$\text{Av} \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f_j(\vec{x}) = b_j \forall j = 1, 2, \dots, m : \text{έστω } \varepsilon > 0, \exists \delta_j \left(\vec{x}_0, \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}} \right) = \delta_j > 0 : \forall \vec{x} \in A \text{ με } 0 < \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \delta_j :$$

$$|f_j(\vec{x}) - b_j| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}. \text{ Για } \delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_j, \dots, \delta_m\} > 0 : \forall \vec{x} \in A \text{ με } 0 < \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \delta :$$

$$\|\vec{f}(\vec{x}) - \vec{b}\| = \left(\sum_{j=1}^m (f_j(x) - b_j)^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \sqrt{m \cdot \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{m}} \right)^2} = \varepsilon \Leftrightarrow \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{b}$$

$$\text{Av} \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{b} : \text{έστω } \varepsilon > 0. \exists \delta(\vec{x}_0, \varepsilon) = \delta > 0 : \forall \vec{x} \in A \text{ με } 0 < \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \delta : \|\vec{f}(\vec{x}) - \vec{b}\| < \varepsilon$$

$$\forall j = 1, 2, \dots, m : |f_j(\vec{x}) - b_j| \leq \|\vec{f}(\vec{x}) - \vec{b}\| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f_j(\vec{x}) = b_j \forall j = 1, 2, \dots, m$$

$$\text{Αρα } \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{b} \Leftrightarrow \forall j = 1, 2, \dots, m : \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f_j(\vec{x}) = b_j$$

Β' τρόπος

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{b} \Leftrightarrow \left(\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta(\vec{x}_0, \varepsilon) = \delta > 0 : \forall \vec{x} \in A \text{ με } 0 < \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \delta : \|\vec{f}(\vec{x}) - \vec{b}\| < \varepsilon \right) \Rightarrow$$

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} \|\vec{f}(\vec{x}) - \vec{b}\| = 0 \Rightarrow \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} \left(\|\vec{f}(\vec{x}) - \vec{b}\|^2 \right) = 0 \Rightarrow \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} \left(\sum_{j=1}^m |f_j(\vec{x}) - b_j|^2 \right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta'(\vec{x}_0, \varepsilon) = \delta' > 0 : \forall \vec{x} \in A \text{ με } 0 < \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \delta' : \sum_{j=1}^m |f_j(\vec{x}) - b_j|^2 < \varepsilon \right)$$

$$\text{Έστω } \exists j = 1, 2, \dots, m : \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} |f_j(\vec{x}) - b_j| = a > 0 \Rightarrow \gamma \text{ ια } \varepsilon = \frac{a}{2} > 0 : \exists \delta'' \left(\vec{x}_0, \frac{a}{2} \right) = \delta'' > 0 :$$

$$\forall \vec{x} \in A \text{ με } 0 < \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \delta'' : |f_j(\vec{x}) - b_j| > \frac{a}{2} > 0 \Rightarrow |f_j(\vec{x}) - b_j|^2 > \frac{a^2}{4} \Rightarrow \left(\sum_{j=1}^m |f_j(\vec{x}) - b_j|^2 \right) > \frac{a^2}{4}, \text{ άτοπο.}$$

$$\text{Αρα } \forall j = 1, 2, \dots, m : \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} |f_j(\vec{x}) - b_j| = 0 \Rightarrow \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f_j(\vec{x}) = b_j.$$

$$\text{Έστω } \forall j = 1, 2, \dots, m : \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f_j(\vec{x}) = b_j \Rightarrow \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} |f_j(\vec{x}) - b_j| = 0 \Rightarrow \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} \left(\sum_{j=1}^m |f_j(\vec{x}) - b_j|^2 \right) = 0 \Rightarrow$$

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} \|\vec{f}(\vec{x}) - \vec{b}\| = 0 \Leftrightarrow \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} (\vec{f}(\vec{x}) - \vec{b}) = \vec{0} \Leftrightarrow \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{b}.$$

$$\text{Αρα } \forall j = 1, 2, \dots, m : \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{b} \Leftrightarrow \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f_j(\vec{x}) = b_j$$

Θεώρημα

$$\text{Έστω } \vec{f}, \vec{g} : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \text{ και } \vec{x}_0 \in A' : \exists \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} \vec{f}(\vec{x}), \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} \vec{g}(\vec{x}) \in \mathbb{R}^m. \text{ Τότε}$$

$$(i) \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} (\vec{f}(\vec{x}) + \vec{g}(\vec{x})) = \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} \vec{f}(\vec{x}) + \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} \vec{g}(\vec{x})$$

$$(ii) \forall \lambda \in \mathbb{R} : \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} (\lambda \vec{f}(\vec{x})) = \lambda \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} \vec{f}(\vec{x})$$

$$(iii) \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} (\vec{f}(\vec{x}) \cdot \vec{g}(\vec{x})) = \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} \vec{f}(\vec{x}) \cdot \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} \vec{g}(\vec{x})$$

$$(iv) \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} (\vec{f}(\vec{x}) \times \vec{g}(\vec{x})) = \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} \vec{f}(\vec{x}) \times \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} \vec{g}(\vec{x}) \text{ (για } m = 3 \text{)}$$

Απόδειξη

$$\text{έστω } \alpha, b \in \mathbb{R}^m : \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} \vec{f}(\vec{x}) = \alpha \text{ και } \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} \vec{g}(\vec{x}) = b.$$

$$(i) \text{ έστω } \varepsilon > 0 : \exists \delta \left(\vec{x}_0, \frac{\varepsilon}{2} \right) = \delta > 0 : \forall \vec{x} \in A \text{ με } 0 < \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \delta : \|\vec{f}(\vec{x}) - \alpha\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\kappa\alpha\iota \quad \exists \delta \left(\vec{x}_0, \frac{\varepsilon}{2} \right) = \delta > 0 : \forall \vec{x} \in A \quad \mu \varepsilon \quad 0 < \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \delta : \|\vec{g}(\vec{x}) - \vec{b}\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\forall \vec{x} \in A \quad \mu \varepsilon \quad 0 < \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \delta :$$

$$\|(f(\vec{x}) + g(\vec{x})) - (\vec{a} + \vec{b})\| \leq \|f(\vec{x}) - \vec{a}\| + \|g(\vec{x}) - \vec{b}\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \Leftrightarrow$$

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} (f(\vec{x}) + g(\vec{x})) = \vec{a} + \vec{b} = \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f(\vec{x}) + \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} g(\vec{x})$$

$$(ii) \quad \gamma\iota\alpha \quad \lambda \neq 0 : \exists \delta' \left(\vec{x}_0, \frac{\varepsilon}{|\lambda|} \right) = \delta' > 0 : \forall \vec{x} \in A \quad \mu \varepsilon \quad 0 < \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \delta' : \|\vec{f}(\vec{x}) - \vec{\alpha}\| < \frac{\varepsilon}{|\lambda|}$$

$$\|\lambda \vec{f}(\vec{x}) - \lambda \vec{\alpha}\| = |\lambda| \cdot \|\vec{f}(\vec{x}) - \vec{a}\| < |\lambda| \cdot \frac{\varepsilon}{|\lambda|} = \varepsilon \Leftrightarrow \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} (\lambda \vec{f}(\vec{x})) = \lambda \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} \vec{f}(\vec{x})$$

$$\gamma\iota\alpha \quad \lambda = 0 : \lambda \vec{f}(\vec{x}) = 0 \cdot \vec{f}(\vec{x}) = \vec{0} \implies \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} [\lambda \vec{f}(\vec{x})] = \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} \vec{0} = \vec{0} = 0 \cdot \vec{\alpha} = \lambda \vec{\alpha}.$$

$$\text{A}\rho\alpha \quad \forall \lambda \in R : \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} (\lambda \vec{f}(\vec{x})) = \lambda \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} \vec{f}(\vec{x})$$

$$(iii) \quad \|\vec{f}(\vec{x}) \cdot \vec{g}(\vec{x}) - \vec{a} \cdot \vec{b}\| \leq \|\vec{f}(\vec{x}) \cdot \vec{g}(\vec{x}) - \vec{g}(\vec{x}) \cdot \vec{a} + \vec{g}(\vec{x}) \cdot \vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{b}\| \implies$$

$$\|\vec{f}(\vec{x}) \cdot \vec{g}(\vec{x}) - \vec{a} \cdot \vec{b}\| \leq \|(\vec{f}(\vec{x}) - \vec{a}) \cdot \vec{g}(\vec{x}) + (\vec{g}(\vec{x}) - \vec{b}) \cdot \vec{b}\| \implies$$

$$\|\vec{f}(\vec{x}) \cdot \vec{g}(\vec{x}) - \vec{a} \cdot \vec{b}\| \leq \|(\vec{f}(\vec{x}) - \vec{a}) \cdot \vec{g}(\vec{x})\| + \|(\vec{g}(\vec{x}) - \vec{b}) \cdot \vec{b}\| \implies (\text{ανισότιητα Cauchy - Schwarz})$$

$$\|\vec{f}(\vec{x}) \cdot \vec{g}(\vec{x}) - \vec{a} \cdot \vec{b}\| \leq \|\vec{f}(\vec{x}) - \vec{a}\| \|\vec{g}(\vec{x})\| + \|\vec{g}(\vec{x}) - \vec{b}\| \|\vec{b}\|$$

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{\alpha} \implies \gamma\iota\alpha \quad \varepsilon = 1 > 0 : \exists \delta_1 > 0 : \forall \vec{x} \in A \cap N_{\delta_1}(\vec{x}_0) : \|\vec{f}(\vec{x}) - \vec{a}\| < 1 \implies$$

$$\|\vec{f}(\vec{x}) - \vec{a} + \vec{a}\| \leq \|\vec{f}(\vec{x}) - \vec{a}\| + \|\vec{a}\| < 1 + \|\vec{a}\| = M$$

$$\alpha\nu \quad \|\vec{b}\| > 0 : \acute{\epsilon}\sigma\tau\omega \quad \varepsilon > 0 : \exists \delta \left(\vec{x}_0, \frac{\varepsilon}{2M} \right) = \delta_1 > 0 : \forall \vec{x} \in A \quad \mu \varepsilon \quad 0 < \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \delta_2 : \|\vec{f}(\vec{x}) - \vec{\alpha}\| < \frac{\varepsilon}{2M}$$

$$\kappa\alpha\iota \quad \exists \delta \left(\vec{x}_0, \frac{\varepsilon}{2\|\vec{b}\|} \right) = \delta_2 > 0 : \forall \vec{x} \in A \quad \mu \varepsilon \quad 0 < \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \delta_3 : \|\vec{g}(\vec{x}) - \vec{b}\| < \frac{\varepsilon}{2\|\vec{b}\|}. \quad \text{Τότε} \varepsilon :$$

$$\forall \vec{x} \in A \quad \mu \varepsilon \quad 0 < \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\} : \|\vec{f}(\vec{x}) \cdot \vec{g}(\vec{x}) - \vec{a} \cdot \vec{b}\| \leq M \|\vec{f}(\vec{x}) - \vec{a}\| + \|\vec{b}\| \|\vec{g}(\vec{x}) - \vec{b}\| \implies$$

$$\|\vec{f}(\vec{x}) \cdot \vec{g}(\vec{x}) - \vec{a} \cdot \vec{b}\| < M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} + \|\vec{b}\| \cdot \frac{\varepsilon}{2\|\vec{b}\|} = \varepsilon$$

$$\alpha\nu \quad \|\vec{b}\| = 0 \implies \vec{b} = \vec{0}, \delta\eta\lambda\alpha\delta\acute{\eta} \quad \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} \vec{g}(\vec{x}) = \vec{0} \Leftrightarrow \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} \|\vec{g}(\vec{x})\| = 0 \quad \kappa\alpha\iota \quad |\vec{f}(\vec{x}) \cdot \vec{g}(\vec{x})| \leq \|\vec{f}(\vec{x})\| \|\vec{g}(\vec{x})\|$$

$$\forall \vec{x} \in A \cap N_{\delta_1}(\vec{x}_0) : |\vec{f}(\vec{x}) \cdot \vec{g}(\vec{x})| \leq M \|\vec{g}(\vec{x})\| \implies \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} (\vec{f}(\vec{x}) \cdot \vec{g}(\vec{x})) = 0 = \vec{a} \cdot \vec{0} \implies$$

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} (\vec{f}(\vec{x}) \cdot \vec{g}(\vec{x})) = \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} \vec{f}(\vec{x}) \cdot \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} \vec{g}(\vec{x}).$$

$$(iv) \quad \|\vec{f}(\vec{x}) \times \vec{g}(\vec{x}) - \vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{f}(\vec{x}) \times \vec{g}(\vec{x}) - \vec{a} \times \vec{g}(\vec{x}) + \vec{a} \times \vec{g}(\vec{x}) - \vec{a} \times \vec{b}\| \implies$$

$$\|\vec{f}(\vec{x}) \times \vec{g}(\vec{x}) - \vec{a} \times \vec{b}\| = \|(\vec{f}(\vec{x}) - \vec{a}) \times \vec{g}(\vec{x}) + \vec{a} \times (\vec{g}(\vec{x}) - \vec{b})\| \implies$$

$$\|\vec{f}(\vec{x}) \times \vec{g}(\vec{x}) - \vec{a} \times \vec{b}\| \leq \|(\vec{f}(\vec{x}) - \vec{a}) \times \vec{g}(\vec{x})\| + \|\vec{a} \times (\vec{g}(\vec{x}) - \vec{b})\|$$

$$\|\vec{f}(\vec{x}) \times \vec{g}(\vec{x}) - \vec{a} \times \vec{b}\| \leq \|\vec{f}(\vec{x}) - \vec{a}\| \|\vec{g}(\vec{x})\| + \|\vec{g}(\vec{x}) - \vec{b}\| \|\vec{a}\|. \quad \text{Έστω } \varepsilon > 0 : \text{ομοίως με (iii) :}$$

$$\exists \delta(\vec{x}_0, \varepsilon) = \delta > 0 : \forall \vec{x} \in A \quad \mu \varepsilon \quad 0 < \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \delta : \|\vec{f}(\vec{x}) \times \vec{g}(\vec{x}) - \vec{a} \times \vec{b}\| < \varepsilon$$

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} (\vec{f}(\vec{x}) \times \vec{g}(\vec{x})) = \vec{a} \times \vec{b} = \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} \vec{f}(\vec{x}) \times \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} \vec{g}(\vec{x})$$

Πρόταση

Έστω $\vec{f}, \vec{g} : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ και $\vec{x}_0 \in A'$:

(i) $\vec{f}$ μηδενική στο $\vec{x}_0 \Leftrightarrow \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{0}$

(ii) $\vec{g}$ τοπικά φραγμένη στο $\vec{x}_0 \Leftrightarrow \exists M \geq 0, \delta > 0 : \forall \vec{x} \in A : 0 < \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \delta : \|\vec{g}(\vec{x})\| \leq M$

Τότε :

(a) $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} (\|\vec{f}(\vec{x})\| \|\vec{g}(\vec{x})\|) = 0$

(β) $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} (\|\vec{f}(\vec{x})\| \cdot \vec{g}(\vec{x})) = \vec{0}$

(γ) $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} (\vec{f}(\vec{x}) \times \vec{g}(\vec{x})) = \vec{0}$

Απόδειξη

Έστω $\varepsilon > 0$. $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{0} \implies \exists \delta_1 \left(\vec{x}_0, \frac{\varepsilon}{M} \right) = \delta_1 > 0 : \forall \vec{x} \in A \text{ με } 0 < \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \delta_1 : \|\vec{f}(\vec{x})\| < \frac{\varepsilon}{M}$.

Για $\delta_2 = \min\{\delta_1, \delta\} > 0 : \forall \vec{x} \in A \text{ με } 0 < \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \delta_2 : \|\vec{f}(\vec{x})\| \|\vec{g}(\vec{x})\| < \frac{\varepsilon}{M} \cdot \varepsilon = \varepsilon$. Παρατηρούμε ότι από

ανισότητα *Cauchy – Schwarz* : $\|\vec{f}(\vec{x})\| \cdot \|\vec{g}(\vec{x})\| = \|\vec{f}(\vec{x})\| \cdot \|\vec{g}(\vec{x})\| < \varepsilon$ και $\|\vec{f}(\vec{x}) \times \vec{g}(\vec{x})\| \leq \|\vec{f}(\vec{x})\| \|\vec{g}(\vec{x})\| < \varepsilon$.

Άρα $\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta(\vec{x}_0, \varepsilon) = \delta_2 > 0 : \forall \vec{x} \in A \text{ με } 0 < \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \delta_2 :$

(α) $\|\vec{f}(\vec{x})\| \|\vec{g}(\vec{x})\| < \varepsilon \implies \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} (\|\vec{f}(\vec{x})\| \|\vec{g}(\vec{x})\|) = 0$

(β) $\|\vec{f}(\vec{x})\| \cdot \vec{g}(\vec{x}) < \varepsilon \implies \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} (\|\vec{f}(\vec{x})\| \cdot \vec{g}(\vec{x})) = \vec{0}$

(γ) $\|\vec{f}(\vec{x}) \times \vec{g}(\vec{x})\| < \varepsilon \implies \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} (\vec{f}(\vec{x}) \times \vec{g}(\vec{x})) = \vec{0}$

Άσκηση

Να δείξετε ότι :

(a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(\frac{x^2 y}{x^2 + y^2}, \frac{\cos(x^2 + y^2) - 1}{x^2 + y^2} \right) = (0, 0)$

(β) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{\sin(x^2 + 2y^2)}{x^2 + y^2} \right) \quad (\nexists)$

Λύση

(α) $\vec{f} : A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2 : \vec{f}(x, y) = \left(\frac{x^2 y}{x^2 + y^2}, \frac{\cos(x^2 + y^2) - 1}{x^2 + y^2} \right)$ με συνιστώσες συναρτήσεις :

$f_1 : A \rightarrow \mathbb{R} : f_1(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}, (x, y) \neq (0, 0)$ και $f_2 : A \rightarrow \mathbb{R} : f_2(x, y) = \frac{\cos(x^2 + y^2) - 1}{x^2 + y^2}, (x, y) \neq (0, 0)$.

Έστω $\varepsilon > 0 : \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < \|(x, y)\| < \varepsilon : |f_1(x, y)| = \left| \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \right| \leq \frac{x^2 |y|}{x^2 + y^2} \leq \frac{(x^2 + y^2) \sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2} \implies$

$|f_1(x, y)| \leq \sqrt{x^2 + y^2} = \|(x, y)\| < \varepsilon$. Άρα $\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta = \delta(\varepsilon) = \varepsilon > 0 : \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ με } 0 < \|(x, y)\| < \delta :$

$|f_1(x, y)| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(\frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \right) = 0$

$|f_2(x, y)| = \left| \frac{\cos(x^2 + y^2) - 1}{x^2 + y^2} \right| = \frac{\left[\sin(x^2 + y^2) \right]^2}{x^2 + y^2} = u \left(\frac{\sin u}{u} \right)^2$ με $u : A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}, u(x, y) = x^2 + y^2 > 0$,

$u \in C^0(A)$ και $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} u(x, y) = 0$. Ως γνωστόν, $\lim_{u \rightarrow 0^+} \left(\frac{\sin u}{u} \right) = 1 \implies \lim_{u \rightarrow 0^+} \left(\frac{\sin u}{u} \right)^2 = 1^2 = 1$.

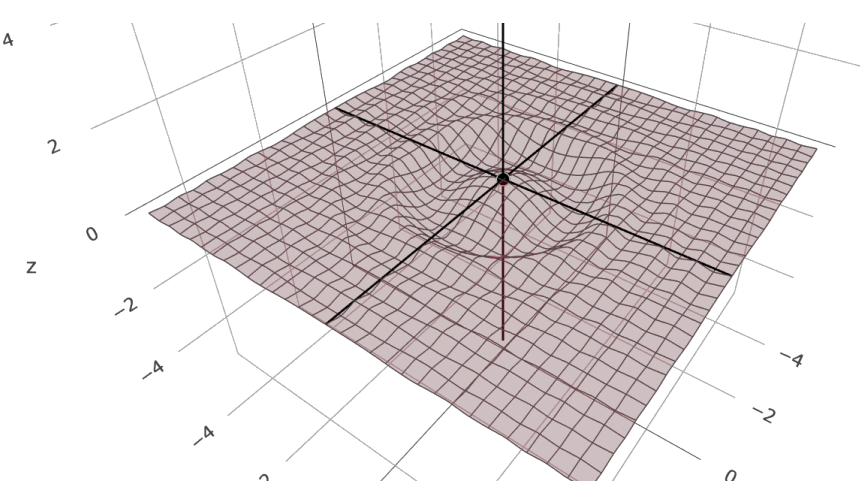
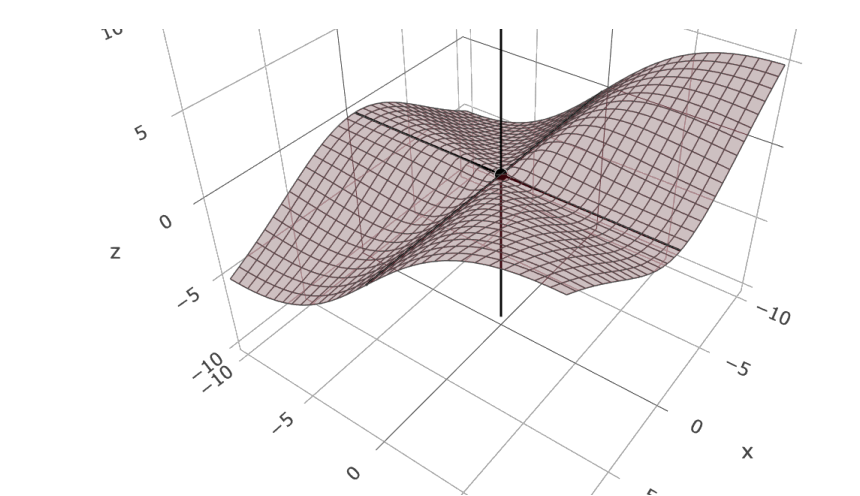
$$\text{Άρα } \lim_{u \rightarrow 0^+} \left[u \left(\frac{\sin u}{u} \right)^2 \right] = 0 \cdot 1 = 0 \Leftrightarrow \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall u \in \mathbb{R}^* \text{ με } 0 < u < \delta : \left| u \left(\frac{\sin u}{u} \right)^2 - 0 \right| = u \left(\frac{\sin u}{u} \right)^2 < \varepsilon.$$

$$\text{Παρατηρούμε ότι } u = ||(x,y)||^2. \text{ Τότε έχουμε ότι } \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ με } 0 < ||(x,y)|| < \sqrt{\delta} \implies |$$

$$\frac{\cos\left(x^2+y^2\right)-1}{x^2+y^2}|<\varepsilon, \text{ δηλαδή } \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ με } 0 < ||(x,y)|| < \delta : |f_2(x,y)| < \varepsilon \Leftrightarrow$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(\frac{\cos\left(x^2+y^2\right)-1}{x^2+y^2} \right) = 0. \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f_1(x,y) = 0 \in \mathbb{R} \text{ και } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f_2(x,y) = 0 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(\frac{x^2y}{x^2+y^2}, \frac{\cos\left(x^2+y^2\right)-1}{x^2+y^2} \right) = (0,0)$$



$$(\beta) \vec{f}: A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2 : \vec{f}(x,y) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{\sin\left(x^2+2y^2\right)}{x^2+y^2} \right) \text{ με συνιστώσες συναρτήσεις :}$$

$$f_1: A \rightarrow \mathbb{R}: f_1(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \, (x,y) \neq (0,0), \, f_2: A \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}: f_2(x,y) = \frac{\sin\left(x^2+2y^2\right)}{x^2+y^2}, \, (x,y) \neq (0,0)$$

$$\text{έστω } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{\sin\left(x^2+2y^2\right)}{x^2+y^2} \right) = \vec{a} = (a_1,a_2) \in \mathbb{R}^2. \text{ Τότε } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f_1(x,y) = a_1 \in \mathbb{R} \text{ και}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f_2(x,y) = a_2 \in \mathbb{R}. \text{ Για τον περιορισμό της } f_1 \text{ στην ημιευθεία } \vec{c_1}(t) = (t,0), \, t > 0 \text{ ισχύει ότι :}$$

$$g_1(t) = f_1\left(\vec{c_1}(t)\right) = f_1(t,0) = \frac{t}{|t|} = 1, \, x > 0 \implies \lim_{t \rightarrow 0^+} g_1(t) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f_1(t,g_1(t)) = 0. \text{ Για τον περιορισμό της } f_1$$

$$\text{στην ημιευθεία } \vec{c_2}(t) = (t,0), \, t < 0 \text{ ισχύει: } g_2(t) = f_1\left(\vec{c_2}(t)\right) = f_1(t,0) = \frac{t}{|t|} = -1, \, t < 0 \implies$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} g_2(t) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f_1(t,g_2(t)) = -1 \neq 0. \text{ Τότε (ως συνέπεια της αρχής της μεταφοράς)}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} f_1(\vec{c_1(t)}) = 1 \neq -1 = \lim_{x \rightarrow 0} f_1(\vec{c_2(t)}), \text{ άτοπο. Άρα } \nexists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f_1(x,y) \implies$$

$$\nexists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{\sin(x^2 + 2y^2)}{x^2 + y^2} \right)$$

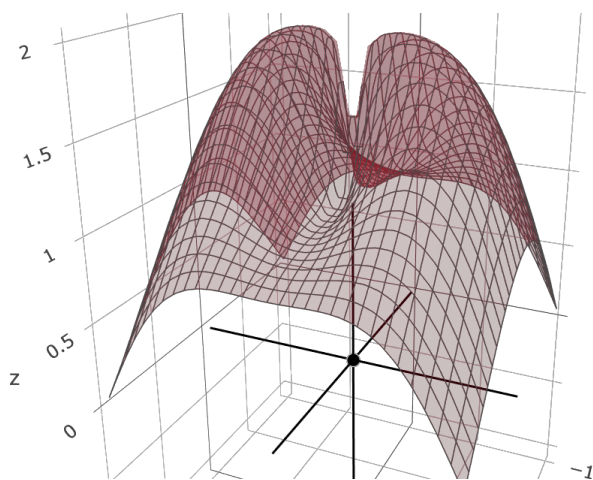
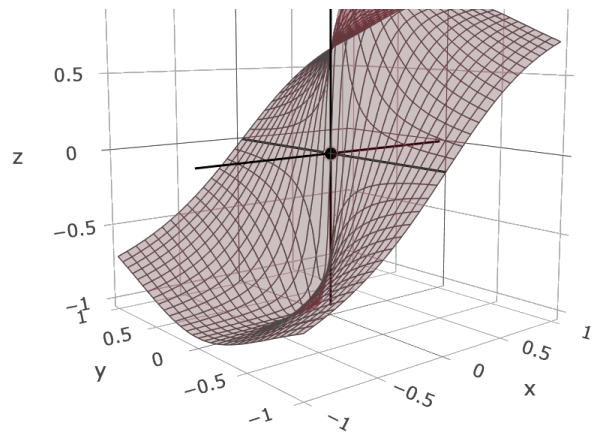
Επίσης, παρατηρούμε ότι για τον περιορισμό της f_2 στην ημιευθεία $\vec{c_1(t)} = (t, 0), t > 0$ ισχύει ότι:

$$g_3(t) = f_2(\vec{c_1(t)}) = f_1(t, 0) = \frac{\sin(t^2)}{t^2} \implies \lim_{t \rightarrow 0} g_3(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(t^2)}{t^2} = \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{\sin u}{u} = 1 \implies a_2 = 1, \text{ ενώ για τον}$$

$$\text{περιορισμό της } f_2 \text{ στην ημιευθεία } \vec{c_2(t)} = (t, t), t > 0, g_3(t) = f_2(\vec{c_2(t)}) = f_1(t, t) = \frac{\sin(3t^2)}{2t^2} \implies$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} g_3(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(3t^2)}{2t^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(3t^2)}{3t^2} \cdot \frac{3t^2}{2t^2} \right) = \lim_{u \rightarrow 0^+} \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{\sin u}{u} \right) = \frac{3}{2} \implies a_2 = \frac{3}{2}, \text{ άτοπο.}$$

$$\text{Άρα } \nexists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^2 + 2y^2)}{x^2 + y^2}$$



ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙ & ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ_ΕΑΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2020

ΔΗΜΗΤΡΗΣ ΠΙΤΣΟΣ_ ΑΡ.ΜΗΤΡΩΟΥ: 1110201900303

Άσκηση 1

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Λύση

$\forall (x, y) \neq (0, 0)$ f συνεχής ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων. Όμως $\nexists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$, διότι

για $x = 0, y \neq 0$: $f(0, y) = 0 \xrightarrow{y \rightarrow 0} 0 = f(0, 0)$ ενώ για $y = x \neq 0$: $f(x, x) = \frac{1}{2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \neq 0$. Η f δεν

είναι συνεχής στο $(0, 0) \implies$ η f δεν είναι διαφορίσιμη στο $(0, 0)$. Για $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$:

$$\text{Θεωρούμε } g_{y_0}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \text{ με } g(x) = f(x, y_0) = \frac{xy_0}{x^2 + y_0^2}. \text{ Τότε } \frac{dg}{dx} = \frac{y_0(x^2 + y_0^2) - xy_0 \cdot 2x}{(x^2 + y_0^2)^2} \implies$$

$$\frac{dg}{dx} = \frac{y_0^3 - x^2 y_0}{(x^2 + y_0^2)^2}. \text{ Άρα: } \forall (x_0, y_0) \neq (0, 0): \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} \implies$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h} = \frac{dg}{dx}(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{y_0^3 - y_0 x_0^2}{(x_0^2 + y_0^2)^2}. \text{ Παρατηρούμε ότι}$$

$$\nexists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left[\frac{y(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2} \right]: \text{ για } y = 0, x \neq 0: \frac{\partial f}{\partial x}(x, 0) = 0 \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0, \text{ για } x = 0, y \neq 0:$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, y) = \frac{y^3}{y^4} = \frac{1}{y} \rightarrow \begin{cases} \xrightarrow{y \rightarrow 0^+} +\infty \\ \xrightarrow{y \rightarrow 0^-} -\infty \end{cases} \implies \nexists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}. \text{ Όμως } \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = 0.$$

$$\text{Άρα } \frac{\partial f}{\partial x}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} \frac{y(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}, \text{ ασυνεχής στο } (0, 0)$$

Αντίστοιχα για $(x, y) \neq (0, 0)$: $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}$ - η f είναι συμμετρική ως προς τις

μεταβλητές x, y , δηλαδή $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} = \frac{yx}{y^2 + x^2} = f(y, x) - \nexists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}$:

$$\text{για } x = 0, y \neq 0: \frac{\partial f}{\partial y}(0, y) = 0 \xrightarrow{y \rightarrow 0} 0 \text{ ενώ για } y = 0, x \neq 0: \frac{\partial f}{\partial y}(x, 0) = \frac{1}{x} \rightarrow \begin{cases} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty \\ \xrightarrow{x \rightarrow 0^-} -\infty \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = 0, \text{ δηλαδή } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \begin{cases} \frac{x(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Η f είναι μερικώς παραγωγίσιμη ως προς την μεταβλητή x και ως προς την μεταβλητή y

$$\text{στο } \mathbb{R}^2, \text{ άρα είναι μερικώς παραγωγίσιμη με } \nabla f = \begin{cases} \left(\frac{y(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2}, \frac{x(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \right), & (x, y) \neq (0, 0) \\ (0, 0), & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

αλλά $f \notin C^1(\mathbb{R}^2)$. Έστω ότι το διαφορικό της f στο $(0, 0)$ υπάρχει. Τότε

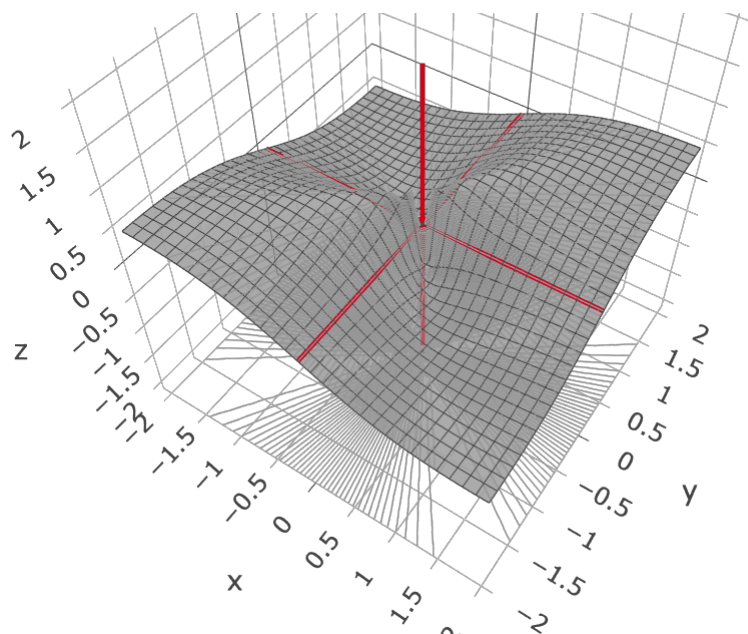
$$df_{(0,0)}(h_1, h_2) = \vec{\nabla} f(0, 0) \cdot (h_1, h_2) = 0. \text{ Τότε } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y) - f(0, 0) - df_{(0,0)}(x, y)}{\|(x, y)\|} = 0 \implies$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(\frac{\frac{xy}{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) = 0 \implies \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(\frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}^3} \right) = 0, \text{ άτοπο. Για } x = 0, y \neq 0:$$

$$\frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}^3} = 0 \xrightarrow{y \rightarrow 0} 0 \text{ ενώ για } y = x \neq 0: \frac{x \cdot x}{\sqrt{x^2 + x^2}^3} = \frac{x^2}{\sqrt{2x^2}^3} = \frac{x^2}{\sqrt{2}^3 x^3} = \frac{1}{\sqrt{2}^3 x} \begin{cases} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty \\ \xrightarrow{x \rightarrow 0^-} -\infty \end{cases}$$

$$\nexists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(\frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}^3} \right). \text{ Άρα } \nexists df_{(0,0)}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \text{ δηλαδή δεν υπάρχει εφαπτόμενο επίπεδο στην}$$

f στο $(0, 0)$.



Άσκηση 2

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y - xy^3}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Λύση

$$\forall (x, y) \neq (0, 0): f \text{ συνεχής ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων και } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(\frac{x^3 y - xy^3}{x^2 + y^2} \right) = 0 \implies$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = f(0, 0) \implies f \text{ συνεχής στο } (0, 0) \implies f \text{ συνεχής.}$$

$$(\text{έστω } \varepsilon > 0. \text{ Για } \delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{2} > 0: \|(x, y)\| < \delta \implies |f(x, y)| < \varepsilon, \text{ διότι}$$

$$\left| \frac{x^3 y - xy^3}{x^2 + y^2} \right| \leq \frac{|x^3||y| + |x||y^3|}{x^2 + y^2} \leq \frac{|x^2 + y^2|^{\frac{3}{2}}|x^2 + y^2|^{\frac{1}{2}} + |x^2 + y^2|^{\frac{1}{2}}|x^2 + y^2|^{\frac{3}{2}}}{x^2 + y^2} = \frac{(x^2 + y^2)^2}{x^2 + y^2} = x^2 + y^2$$

$$\gamma\iota\alpha\ (x,y) \neq (0,0): f_x(x,y) = \frac{(3x^2y - y^3)(x^2 + y^2) - (x^3y - xy^3)2x}{(x^2 + y^2)^2} \implies$$

$$f_x(x,y) = \frac{(3x^4y + 3x^2y^3 - y^3x^2 - y^5 - 2x^4y + 2x^2y^3)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^4y + 5x^2y^3 - y^5}{(x^2 + y^2)^2}. \text{ Τότε } f_x(0,y) = -y, y \neq 0.$$

$$\text{Παρατηρούμε ότι: } f(y,x) = \frac{y^3x - yx^3}{y^2 + x^2} = -f(x,y) \implies f_y(x,y) = -f_x(y,x) \implies$$

$$f_y(x,y) = \frac{-y^4x - 4y^2x^3 + x^5}{(x^2 + y^2)^2}. \text{ Αναλυτικά, } f_y(x,y) = \frac{(x^3 - 3xy^2)(x^2 + y^2) - (x^3y - xy^3)2y}{(x^2 + y^2)^2} \implies$$

$$f_y(x,y) = \frac{x^5 + x^3y^2 - 3x^3y^2 - 3xy^4 - 2x^3y^2 + 2xy^4}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^5 - 4x^3y^2 - xy^4}{(x^2 + y^2)^2}, (x,y) \neq (0,0) \text{ και}$$

$$f_y(x,0) = x = -f_x(0,x), x \neq 0. \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0 \in \mathbb{R} \implies f_x(0,0) = 0. \text{ Η } f \text{ είναι}$$

$$\text{μερικώς παραγωγίσιμη με } \nabla f = \begin{cases} \left(\frac{-y^5 + 5x^2y^3 + x^4y}{(x^2 + y^2)^2}, \frac{x^5 - 4x^3y^2 - xy^4}{(x^2 + y^2)^2} \right), & (x,y) \neq (0,0) \\ (0,0) & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\left(\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(\frac{-y^5 + 5x^2y^3 + x^4y}{(x^2 + y^2)^2} \right), \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(\frac{x^5 - 4x^3y^2 - xy^4}{(x^2 + y^2)^2} \right) \right) = (0,0) = \nabla f(0,0),$$

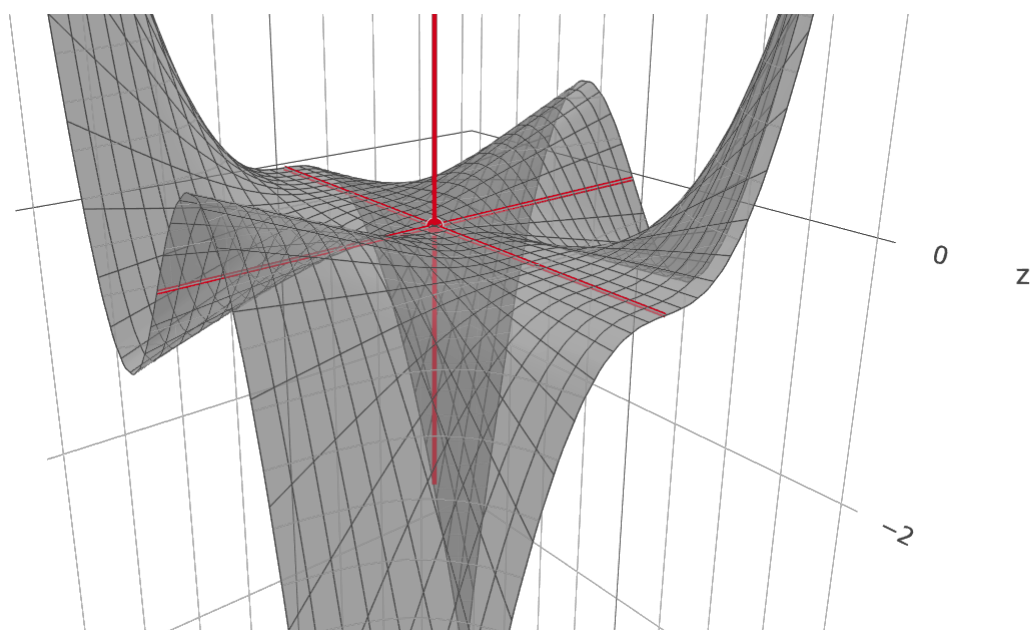
$$\nabla f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \text{ συνεχής} \implies f \in C^1(\mathbb{R}^2)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0 \in \mathbb{R} \implies f_y(0,0) = 0$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0 \in \mathbb{R} \implies f_x(0,0) = 0. \text{ Για τις μικτές παραγώγους στο } \vec{0} \text{ ισχύει:}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_x(0,h) - f_x(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{h} = -1 \in \mathbb{R} \implies f_{xy}(0,0) = -1$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_y(h,0) - f_y(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = 1 \in \mathbb{R} \implies f_{yx}(0,0) = 1 \neq f_{xy}(0,0) \implies f \notin C^2(\mathbb{R}^2)$$



Άσκηση 3

Να βρεθεί η κλίση της $f(x, y) = \sin\left(\frac{3x + x^2}{1 - y}\right)$.

Λύση

$$f: D \rightarrow \mathbb{R}, D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 - y \neq 0 \Leftrightarrow y \neq 1 \right\} = \mathbb{R}^2 - \{y = 1\}$$

$$\text{το } D^c = \mathbb{R}^2 \setminus D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 1 \right\} \text{ είναι κλειστό} \implies D \text{ ανοιχτό}$$

$$\text{θεωρούμε } g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } g(x) = \sin x, g \in C^\infty(\mathbb{R}) \text{ και } u: D \rightarrow \mathbb{R}: u(x, y) = \frac{3x + x^2}{1 - y} = \frac{3proj_1(x, y) + [proj_1(x, y)]^2}{1 - proj_2(x, y)}.$$

όπου $proj_1, proj_2: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με $proj_1(x, y) = x$ και $proj_2(x, y) = y$ (ομοιόμορφα) συνεχείς. Άρα $u \in C^0(D)$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων

$$\text{Τότε } g(u(x, y)) = \sin\left(\frac{3x + x^2}{1 - y}\right), (x, y) \in D. \text{ Παρατηρούμε ότι } D_f = D = g \circ u \text{ και } \forall (x, y) \in D:$$

$(g \circ u)(x, y) = f(x, y)$. Άρα $f = g \circ u \implies f \in C^0(D)$ ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων

$$f_x(x, y) = \left[\frac{df}{du}(u(x, y)) \right] \left[\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) \right] = \cos\left(\frac{3x + x^2}{1 - y}\right) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{3x + x^2}{1 - y} \right) = \frac{3 + 2x}{1 - y} \cos\left(\frac{3x + x^2}{1 - y}\right), (x, y) \in D$$

$$f_y(x, y) = \left[\frac{df}{du}(u(x, y)) \right] \left[\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \right] = \cos\left(\frac{3x + x^2}{1 - y}\right) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{3x + x^2}{1 - y} \right) = -\cos\left(\frac{3x + x^2}{1 - y}\right) \frac{3x + x^2}{(1 - y)^2} (-1) \implies$$

$$f_y(x, y) = \frac{3x + x^2}{(1 - y)^2} \cos\left(\frac{3x + x^2}{1 - y}\right), (x, y) \in D. \text{ Τότε } \nabla f: D \rightarrow \mathbb{R} \text{ με}$$

$$\nabla f = \left(\frac{3 + 2x}{1 - y} \cos\left(\frac{3x + x^2}{1 - y}\right), \frac{3x + x^2}{(1 - y)^2} \cos\left(\frac{3x + x^2}{1 - y}\right) \right) = \cos\left(\frac{3x + x^2}{1 - y}\right) \left(\frac{3 + 2x}{1 - y}, \frac{3x + x^2}{(1 - y)^2} \right)$$

Ο κανόνας της αλυσίδας σε αυτήν την περίπτωση παίρνει την μορφή: $f(x, y) = g(u(x, y)) \implies \nabla f = \frac{dg}{du} \nabla u$

Δεν ορίζεται συνεχής επέκταση της f σε κανένα σημείο του επιπέδου $y = 1$.

$$\text{Έστω ότι } \exists \lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, 1)} f(x, y) = \lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, 1)} \left(\sin\left(\frac{3x + x^2}{1 - y}\right) \right) \in \mathbb{R}. \text{ Για } x_0 \neq 0:$$

$$\vec{a}_n = \left(x_0, \frac{1 - \frac{2\pi n}{(3x_0 + x_0^2)}}{\frac{2\pi n}{(3x_0 + x_0^2)}} \right) = \left(x_0, -\frac{3x_0 + x_0^2 - 2\pi n}{2\pi n} \right): \forall n \in \mathbb{N}: \vec{a}_n \in D \text{ και } \vec{a}_n \neq (0, 1), \vec{a}_n \rightarrow (x_0, 1) \text{ και}$$

$$f(\vec{a}_n) = \sin\left(\frac{3x_0 + x_0^2}{1 + \frac{3x_0 + x_0^2 - 2\pi n}{2\pi n}}\right) = \sin\left(\frac{3x_0 + x_0^2}{\frac{3x_0 + x_0^2}{2\pi n}}\right) = \sin(2\pi n) = 0$$

$$\vec{b}_n = \left(x_0, \frac{1 - \frac{\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi}{2}}{\frac{\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi}{2}} \right) = \left(x_0, -\frac{3x_0 + x_0^2 - \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}}{\left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}} \right): \forall n \in \mathbb{N}: \vec{b}_n \in D \text{ και } \vec{b}_n \neq (0, 1), \vec{b}_n \rightarrow (x_0, 1) \text{ και}$$

$$f(\vec{b}_n) = \sin\left(\frac{3x_0 + x_0^2}{1 + \frac{3x_0 + x_0^2 - \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}}{\left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}}}\right) = \sin\left(\frac{\left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}}{\left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}}\right) = 1 \neq 0, \text{ το οποίο είναι άτοπο.}$$

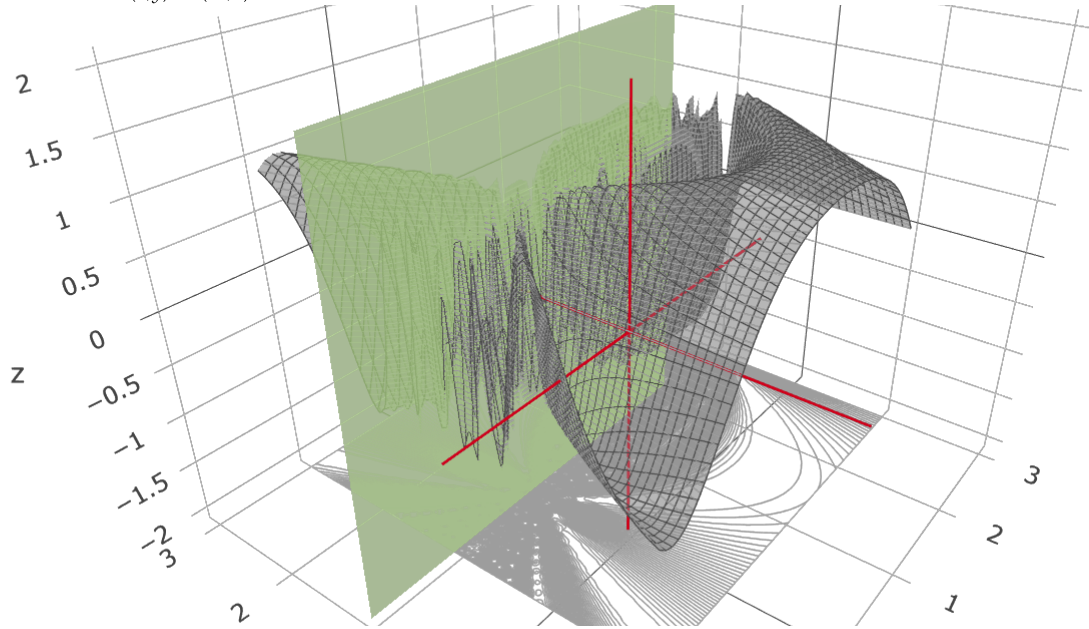
για $x_0 = 0$:

$$\text{για } y = 1 - x, x > 0: f(x, 1 - x) = \sin\left(\frac{3x + x^2}{1 - (1 - x)}\right) = \sin\left(\frac{3x + x^2}{x}\right) = \sin(x + 3) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \sin 3$$

$$\text{για } x = 0, y = 1 + x, x > 0: f(x, 1 + x) = \sin\left(\frac{3x + x^2}{1 - (1 + x)}\right) = \sin\left(\frac{3x + x^2}{-x}\right) = \sin(-x - 3) \xrightarrow{x \rightarrow 0} -\sin 3 \neq \sin 3,$$

το οποίο είναι άτοπο.

$$\text{Αρα } \forall x_0 \in \mathbb{R}: \nexists \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,1)} f(x,y)$$



Άσκηση 4

Να βρεθεί η $f_{\vec{u}}(\vec{a})$ της $f(x, y, z) = xe^y + 2 \sin y$ για $\vec{a} = (1, 0, 1)$, $\vec{u} = (1, 1, 0)$.

Λύση

$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ με $\nabla f = (e^y, xe^y + 2 \cos y, 0)$. Παρατηρούμε ότι f κυλινδρική συνάρτηση:

$$f(x, y, z) = f(x, y). \text{ Το } \vec{u} \text{ ορίζει } \hat{u} = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)$$

$$f \in C^1(\mathbb{R}^3) \subset C^\infty(\mathbb{R}^3) \implies \lim_{\vec{h} \rightarrow 0} \frac{f(\vec{a} + \vec{h}) - f(\vec{a}) - \nabla f(\vec{a}) \cdot \vec{h}}{|\vec{h}|} = 0. \text{ Παρατηρούμε ότι εφόσον η } f$$

$$\text{είναι διαφορίσιμη } f_{\vec{u}}(\vec{a}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\vec{a} + t\hat{u}) - f(\vec{a})}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\vec{a}) + \nabla f(\vec{a}) \cdot (t\hat{u}) - f(\vec{a})}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\nabla f(\vec{a}) \cdot (t\hat{u})}{t} \implies$$

$$f_{\vec{u}}(\vec{a}) = \nabla f(\vec{a}) \cdot \hat{u} = (e^{a_2}, a_1 e^{a_2} + 2 \cos a_2, 0) \cdot (u_1, u_2, u_3) = e^{a_2} u_1 + (a_1 e^{a_2} + 2 \cos a_2) u_2$$

Αναλυτικά:

$$f_{\vec{u}}(\vec{a}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\vec{a} + t\hat{u}) - f(\vec{a})}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\vec{a} + t\hat{u}) - f(\vec{a})}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\vec{a} + t\hat{u}) - f(\vec{a})}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\vec{a} + t\hat{u}) - f(\vec{a})}{t} \implies$$

$$f_{\vec{u}}(\vec{a}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a_1 + tu_1, a_2 + tu_2, a_3 + tu_3) - f(a_1, a_2, a_3)}{t} \implies$$

$$f_{\vec{u}}(\vec{a}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(a_1 + tu_1)e^{a_2 + tu_2} + 2 \sin(a_2 + tu_2) - a_1 e^{a_2} - 2 \sin a_2}{t} =$$

$$f_{\vec{u}}(\vec{a}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{a_1 e^{a_2} (e^{tu_2} - 1) + tu_1 e^{a_2 + tu_2} 2[\sin(a_2 + tu_2) - \sin a_2]}{t} = a_1 e^{a_2} \cdot u_2 + e^{a_2} \cdot u_1 + \cos a_2 \cdot u_2$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{tu_2} - 1}{t} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{e^h - 1}{h} u_2 \right) = e^0 \cdot u_2 = u_2 \implies \lim_{t \rightarrow 0} \left(a_1 e^{a_2} \frac{e^{tu_2} - 1}{t} \right) = a_1 e^{a_2} u_2$$

$$h = tu_2 \implies t = \frac{h}{u_2}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{te^{a_2 + tu_2}}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} (e^{a_2 + tu_2}) = e^{a_2 + 0 \cdot u_2} = e^{a_2} \implies \lim_{t \rightarrow 0} \frac{tu_1 e^{a_2 + tu_2}}{t} = e^{a_2} u_1$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(a_2 + tu_2) - \sin a_2}{t} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(a_2 + h) - \sin a_2}{h} u_2 \right) = \cos a_2 \cdot u_2$$

$$\text{για } \vec{a} = (1, 0, 1), \hat{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right) f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right) (1, 0, 1) = 1e^0 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + e^0 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \cos 0 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

Άσκηση 5

Να βρεθεί το $df_{(0,2,1)} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ της $f(x, y, z) = x^4 y + 2e^{-xy} - 2y^2 + 3z^3 - 5$.

Λύση

$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$. Συγκεκριμένα, η f είναι διαφορίσιμη διότι $\exists \nabla f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ και $\nabla f \in C^0(\mathbb{R}^3)$

$$\mu\epsilon df_{(x,y,z)}(\vec{h}) = \nabla f(x, y, z) \cdot \vec{h} = (4x^3 y - 2ye^{-xy}, x^4 - 2xe^{-xy} - 4y, 9z^2) \cdot \vec{h} \implies$$

$$df_{(0,2,1)}(\vec{h}) = (4 \cdot 0^3 \cdot 2 - 2 \cdot 2e^{-0 \cdot 2}, 0^4 - 2 \cdot 0e^{-0 \cdot 2} - 4 \cdot 2, 9 \cdot 1^2) \cdot \vec{h} = (-4, -8, 9) \cdot \vec{h} = -4h_1 - 8h_2 + 9h_3$$

Άσκηση

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Λύση

$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^0(\mathbb{R}^2)$, διότι $\forall (x, y) \neq (0, 0)$ f συνεχής ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων και

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(\frac{x^2 y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) = 0 = f(0, 0). \text{ Έστω } \varepsilon > 0. \text{ Για } \delta(\varepsilon) = \sqrt{\varepsilon} > 0, ||(x, y)|| < \delta \implies$$

$$\left| \frac{x^2 y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| = \frac{x^2 |y|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq \frac{(x^2 + y^2) \sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = x^2 + y^2 < \varepsilon. \text{ Θέτουμε } D = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$$

$$\forall (x, y) \in \left\{ \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\} \right\} : f_x(x, y) = \frac{2xy\sqrt{x^2 + y^2} + \frac{2x^3 y}{2\sqrt{x^2 + y^2}}}{x^2 + y^2} = \frac{2xy(x^2 + y^2) + x^3 y}{\sqrt{x^2 + y^2}^3} = \frac{3x^3 y + xy^3}{\sqrt{x^2 + y^2}^3}, \quad f_x : D \rightarrow \mathbb{R},$$

$$f_x \in C^0(D) \text{ ως πράξεις } C^0(D) - \text{συναρτήσεων και } f_y(x, y) = \frac{x^2 \sqrt{x^2 + y^2} + \frac{2x^2 y^2}{2\sqrt{x^2 + y^2}}}{x^2 + y^2} = \frac{x^2(x^2 + y^2) + 2x^2 y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}^3} \implies$$

$$f_y(x, y) = \frac{x^4 + 3x^2 y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}^3} \quad f_y : D \rightarrow \mathbb{R} \text{ και } f_y \in C^0(D) \text{ ως πράξεις } C^0(D) - \text{συναρτήσεων.}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f_x(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(\frac{3x^3 y + xy^3}{\sqrt{x^2 + y^2}^3} \right) = 0 \text{ και } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f_y(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(\frac{x^4 + 3x^2 y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}^3} \right) = 0$$

$$\text{έστω } \varepsilon > 0. \text{ Για } \delta(\varepsilon) = \delta = \frac{\varepsilon}{4} > 0 : 0 < ||(x, y)|| < \delta \implies$$

$$\left| \frac{3x^3 y + xy^3}{\sqrt{x^2 + y^2}^3} \right| \leq \frac{3|x|^3 |y| + |x| |y|^3}{\sqrt{x^2 + y^2}^3} \leq \frac{3\sqrt{x^2 + y^2}^3 \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{x^2 + y^2}^3}{\sqrt{x^2 + y^2}^3} \leq \frac{4\sqrt{x^2 + y^2}^4}{\sqrt{x^2 + y^2}^3} = 4|| (x, y) || < \varepsilon$$

$$\left| \frac{x^4 + 3x^2 y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}^3} \right| \leq \frac{(x^2 + y^2)^2 + 3(x^2 + y^2)(x^2 + y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}^3} = \frac{4(x^2 + y^2)^2}{\sqrt{x^2 + y^2}^3} = 4|| (x, y) || < \varepsilon$$

$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta(\varepsilon) = \delta > 0 : 0 < ||(x, y)|| < \delta \implies |f_x(x, y)| < \varepsilon \text{ και } |f_y(x, y)| < \varepsilon. \text{ Άρα}$

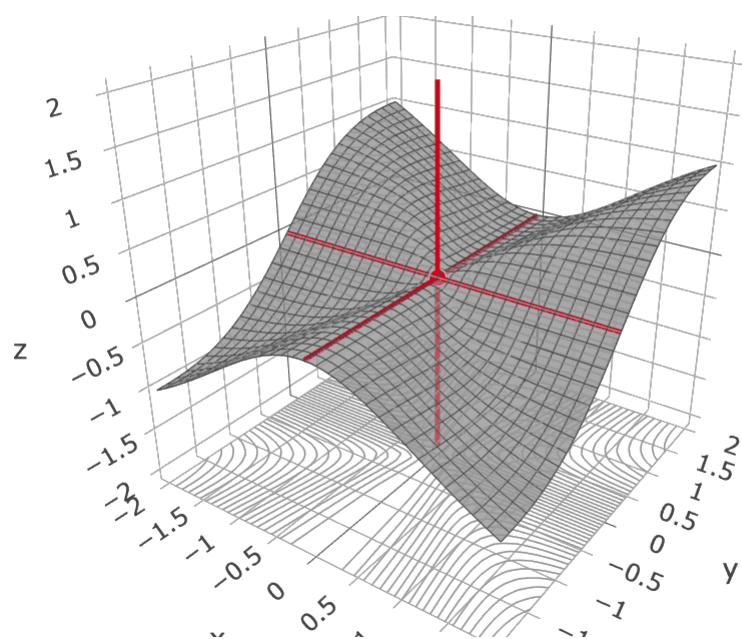
$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f_x(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f_y(x, y) = 0$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0 \in \mathbb{R} \implies f_x(0, 0) = 0 = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f_x(x, y)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0 \in \mathbb{R} \implies f_y(0, 0) = 0 = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f_y(x, y)$$

Άρα $f_x, f_y \in C^0(\mathbb{R}^2) \implies f \in C^1(\mathbb{R}^2) \implies f$ διαφορίσιμη $\implies f$ διαφορίσιμη στο $(0, 0)$ με

$$Df_{(0,0)}(x, y) = \nabla f(0, 0) \cdot (x, y) = (0, 0) \cdot (x, y) = 0$$



ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙ & ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ_ΕΑΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2020

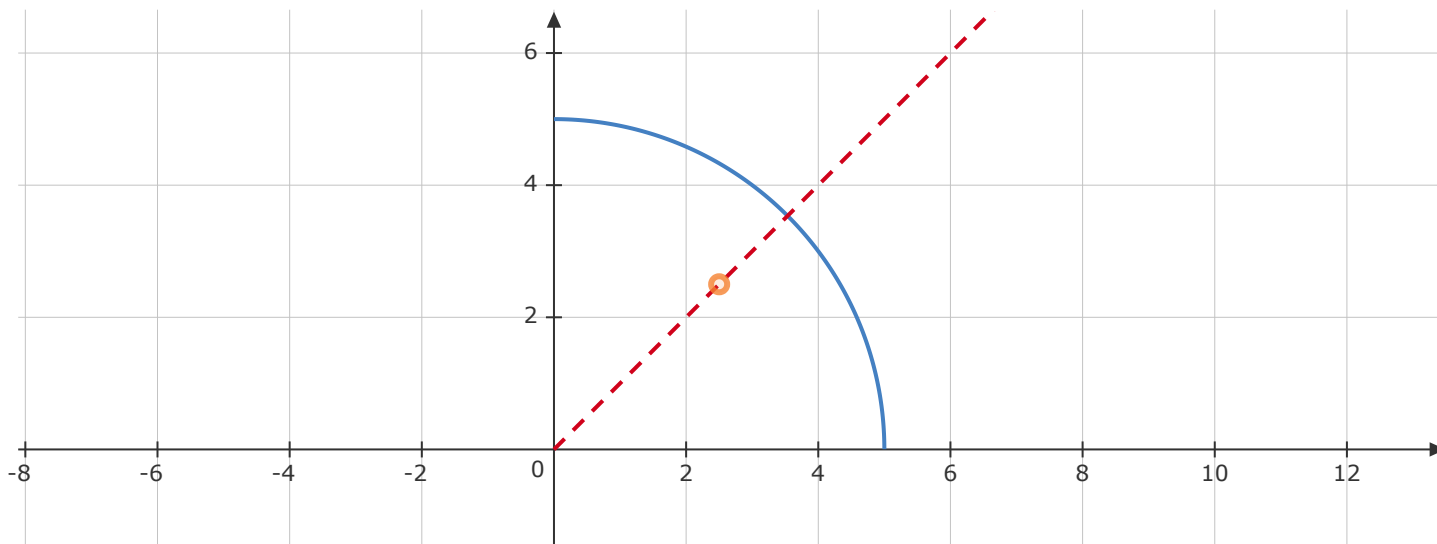
ΔΗΜΗΤΡΗΣ ΠΙΤΣΟΣ_ ΑΡ.ΜΗΤΡΩΟΥ: 1110201900303

Άσκηση1

Υπολογίστε την μάζα, τις ροπές M_x, M_y , τις συντεταγμένες του κέντρου βάρους $C(\bar{x}, \bar{y})$, τις ροπές I_x, I_y ,

I_0 του κυκλικού τομέα $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq a^2, x \geq 0, y \geq 0\}$ με πυκνότητα $\delta(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Λύση



Χρησιμοποιούμε τον πολικό μετασχηματισμό $\vec{T}: (r, \theta) \in [0, \infty) \times [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$ με

$x(r, \theta) = r \cos \theta, y(r, \theta) = r \sin \theta$ και $J(\vec{T}) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}$ με $|\det J(\vec{T})| = r(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = r$

$$m = \iint \delta(x, y) dA = \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} \sqrt{x^2 + y^2} dy dx = \int_0^{\pi/2} \int_0^a (r) r dr d\theta = \left(\int_0^{\pi/2} d\theta \right) \left(\int_0^a r^2 dr \right) \Rightarrow$$

$$m = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{a^3}{3} = \frac{\pi a^3}{6}$$

$$M_x = \iint y \delta(x, y) dA = \int_0^{\pi/2} \int_0^a [(r \sin \theta) r] r dr d\theta = \left(\int_0^{\pi/2} \sin \theta d\theta \right) \left(\int_0^a r^3 dr \right) = \frac{a^4}{4}$$

$$M_y = \iint x \delta(x, y) dA = \int_0^{\pi/2} \int_0^a (r \cos \theta) r^2 dr d\theta = \left(\int_0^{\pi/2} \cos \theta d\theta \right) \left(\int_0^a r^3 dr \right) = \frac{a^4}{4}$$

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{\frac{a^4}{4}}{\frac{\pi a^3}{6}} = \frac{3a}{2\pi}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{\frac{a^4}{4}}{\frac{\pi a^3}{6}} = \frac{3a}{2\pi} = \bar{x}. \text{ Τότε } C = (\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{3a}{2\pi}, \frac{3a}{2\pi} \right)$$

Παρατηρούμε ότι το C βρίσκεται επί της ευθείας $\theta = \frac{\pi}{4}$, όπως είναι αναμενόμενο λόγω της

ισοτροπίας του συνόλου D και του πεδίου πυκνότητας.

$$I_x = \iint y^2 \delta(x, y) dA = \int_0^{\pi/2} \int_0^a [(r \sin \theta)^2 r] r dr d\theta = \left(\int_0^{\pi/2} \sin^2 \theta d\theta \right) \left(\int_0^a r^4 dr \right) \Rightarrow$$

$$I_x = \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1 - \cos 2\theta}{2} \right) d\theta \left(\frac{r^5}{5} \right)_0^a = \frac{1}{2} \left(\theta - \frac{\sin 2\theta}{2} \right)_0^{\pi/2} \frac{a^5}{5} = \frac{\pi a^5}{20}$$

$$I_y = \iint x^2 \delta(x, y) dA = \int_0^{\pi/2} \int_0^a [(r \cos \theta)^2 r] r dr d\theta = \left(\int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta d\theta \right) \left(\int_0^a r^4 dr \right) \Rightarrow$$

$$I_y = \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1 + \cos 2\theta}{2} \right) d\theta \left(\frac{r^5}{5} \right)_0^a = \frac{1}{2} \left(\theta + \frac{\sin 2\theta}{2} \right)_0^{\pi/2} \frac{a^5}{5} = \frac{\pi a^5}{20}$$

$$I_o = \iint (x^2 + y^2) \delta(x, y) dA = \iint x^2 \delta(x, y) dA + \iint y^2 \delta(x, y) dA = I_y + I_x = \frac{\pi a^5}{10}$$

Άσκηση 2

Υπολογίστε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_{\Gamma+} (x^3 + y^3) dx + (2y^3 - x^3) dy$ όπου $\Gamma = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$

Λύση

A' τρόπος (εφαρμογή A' θεωρήματος *Green*)

Θεωρούμε την $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\vec{F}(x, y) = (x^3 + y^3, 2y^3 - x^3) \in C^1(\mathbb{R}^2)$ και τον μοναδιαίο κύκλο

$\Gamma = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^2$ με παραμέτρηση $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t)$ $\theta \in \mathbb{R}$. Παρατηρούμε ότι

η καμπύλη είναι :

– **κλειστή** : $\forall t \in \mathbb{R} : \vec{r}(t) = \vec{r}(t + 2\pi)$. Τότε μπορούμε να περιορίσουμε το

Π.Ο. σε $t \in [0, 2\pi]$.

– **απλή** : $\forall t_1, t_2 \in (0, 2\pi) : \vec{r}(t_1) = \vec{r}(t_2) \implies \cos t_1 = \cos t_2$ και $\sin t_1 = \sin t_2 \implies t_1 = t_2$ ή $t_1 = 2\pi - t_2$

και $t_1 = t_2$ ή $t_1 = \pi - t_2 \implies v = t_2$

– **λεία** : $\left\| \frac{d\vec{r}}{dt} \right\| = \|(-\sin t, \cos t)\| = 1 \neq 0 \forall t \in [0, 2\pi]$

– θετικά προσανατολισμένη (αντιωρολογιακά / αριστερόστροφα).

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \hat{k} = -3(x^2 + y^2) \hat{k}.$$

Ισχύουν οι προϋποθέσεις του πρώτου θεωρήματος *Green*. Τότε :

$$\int_{\Gamma+} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_D \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) dA = \iint_D [(\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \hat{k}] dA = \iint_D -3(x^2 + y^2) dx dy \implies$$

$$\int_{\Gamma+} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (-3r^2) r dr d\theta = -3 \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \left(\int_0^1 r^3 dr \right) = -6\pi \left(\frac{r^4}{4} \right)_0^1 = -\frac{6\pi}{4} = -\frac{3\pi}{2}$$

B' τρόπος (άμεσος υπολογισμός διανυσματικού επικαμπύλιου ολοκληρώματος)

$$\int_{\Gamma+} [(x^3 + y^3) dx + (2y^3 - x^3) dy] = \int_{\Gamma+} (F_x dx + F_y dy) = \int_{\Gamma+} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\Gamma+} \left[\vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \right] dt \implies$$

$$\int_{\Gamma+} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \left[F_x(x(t), y(t)) \frac{dx}{dt} + F_y(x(t), y(t)) \frac{dy}{dt} \right] dt \implies$$

$$\int_{\Gamma+} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \left[(\cos^3 t + \sin^3 t)(-\sin t) + (2 \sin^3 t - \cos^3 t) \cos t \right] dt \implies$$

$$\int_{\Gamma+} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} (-\cos^3 t \sin t - \sin^4 t + 2 \sin^3 t \cos t - \cos^4 t) dt \implies$$

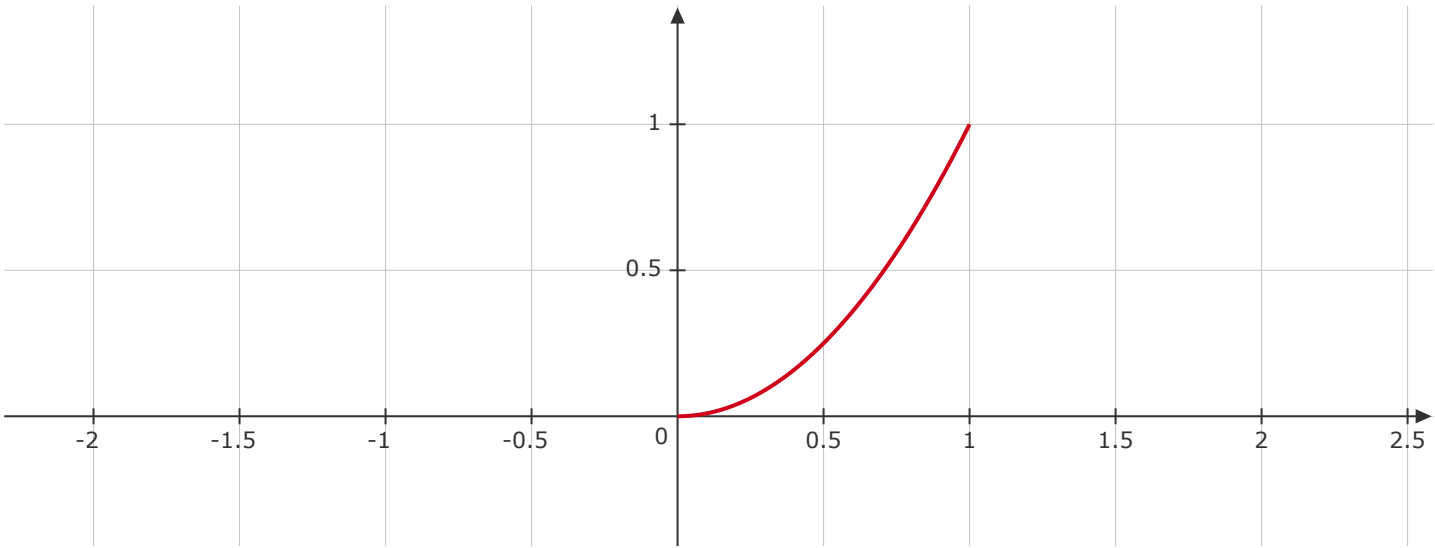
$$\int_{\Gamma+} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} (\cos^3 t) d(\cos t) - \int_0^{2\pi} \left[(\sin^2 t + \cos^2 t)^2 - 2 \sin^2 t \cos^2 t \right] dt + 2 \int_0^{2\pi} (\sin^3 t) d(\sin t) \implies$$

$$\int_{\Gamma+} \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_0^{2\pi} \left(1 - \frac{\sin^2 2t}{2} \right) dt = - \int_0^{2\pi} \left(1 - \frac{1 - \cos 4t}{4} \right) dt = - \left(\frac{3t}{4} + \frac{\sin 4t}{16} \right)_0^{2\pi} = -\frac{3\pi}{2}$$

Άσκηση 3

Υπολογίστε το έργο της δύναμης $\vec{F}(x,y) = (2xy, x^2)$ που μετατοπίζει το σημείο εφαρμογής κατά μήκος της παραμετρικής καμπύλης $\Gamma = \Gamma(\vec{r}) : \vec{r}(t) = (t, t^2), t \in [0, 1]$

Λύση



$\vec{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \vec{F} \in C^1(\mathbb{R}^2), \Gamma = \Gamma(\vec{r})$ απλή, λεία καμπύλη (τμήμα παραβολής $y = x^2$) με $\vec{r} = \vec{r}(t)$ συνεχή παραμέτρηση. Τότε :

$$W = \int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 \left[\vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \right] dt = \int_0^1 \left[(2t^3, t^2) \cdot (1, 2t) \right] dt = \int_0^1 (2t^3 + 2t^3) dt = \int_0^1 4t^3 dt \implies$$

$$W = (t^4)_0^1 = 1$$

Άσκηση 4

Υπολογίστε το $\iiint_B z^2 dx dy dz$, όπου B σφαίρα με εξίσωση επιφάνειας $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ καθώς και τον όγκο $V(B)$ της σφαίρας.

Λύση

Από στερεομετρία είναι γνωστό ότι $V(B) = \frac{4\pi}{3} \cdot 2^3 = \frac{32\pi}{3}$. Αναλυτικά, $V(B) = \iiint_B dV \implies$

Χρησιμοποιούμε τον "1 – 1", επί και συνεχή μετασχηματισμό σε σφαιρικές συντεταγμένες

$\vec{T} : (0, \infty) \times [0, \pi] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ με $\vec{T}(\rho, \theta, \varphi) = (\rho \sin \varphi \cos \theta, \rho \sin \varphi \sin \theta, \rho \cos \varphi)$ και

$$\vec{T}^{-1}(x, y, z) = \begin{cases} \left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \arcsin\left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right), \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) \right), & x \geq 0 \\ \left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \pi - \arcsin\left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right), \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) \right), & x < 0 \end{cases} \quad . \text{ Τότε :}$$

$$J(\vec{T}) = \begin{pmatrix} \sin \varphi \cos \theta & -\rho \sin \varphi \sin \theta & -\rho \cos \varphi \cos \theta \\ \sin \varphi \sin \theta & \rho \sin \varphi \cos \theta & \rho \cos \varphi \sin \theta \\ \cos \varphi & 0 & -\rho \sin \varphi \end{pmatrix} \text{ και}$$

$$\det J(\vec{T}) = -\rho^2 \sin^3 \varphi \cos^2 \theta + \rho \sin \varphi \sin \theta (-\rho \sin^2 \varphi \sin \theta - \rho \cos^2 \varphi \sin \theta) + \rho^2 \cos^2 \varphi \sin \varphi \cos^2 \theta \implies$$

$$|\det J(\vec{T})| = |-\rho^2 \sin \varphi (\sin^2 \varphi \cos^2 \theta + \sin^2 \varphi \sin^2 \theta + \cos^2 \varphi \sin^2 \theta + \cos^2 \varphi \cos^2 \theta)| = \rho^2 \sin \varphi.$$

$$V(B) = \iiint_B dx dy dz = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^2 \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta = \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \left(\int_0^\pi \sin \varphi d\varphi \right) \left(\int_0^2 \rho^2 d\rho \right) \Rightarrow$$

$$V(B) = 2\pi \cdot (-\cos \varphi)_0^\pi \cdot \left(\frac{\rho^3}{3} \right)_0^2 = 4\pi \frac{2^3}{3} = \frac{32\pi}{3}. \quad \text{\textbf{\textit{\Theta}}}\epsilon\omega\rho\acute{o}\mu\epsilon f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}: f(x, y, z) = z^2 \in C(\mathbb{R}^3),$$

$$\kappa\alpha\iota \left(f \circ \overrightarrow{T^{-1}} \right)(x, y, z) = f\left(\overrightarrow{T^{-1}}(x, y, z) \right) = f(r, \theta, \varphi) = (\rho \cos \varphi)^2.$$

$$I = \iiint_B z^2 dx dy dz = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^2 (\rho \cos \varphi)^2 \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta \Rightarrow$$

$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^2 \rho^4 \cos^2 \varphi \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta = \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \left(\int_0^\pi \cos^2 \varphi \sin \varphi d\varphi \right) \left(\int_0^2 \rho^4 d\rho \right) \Rightarrow$$

$$I = 2\pi \int_0^\pi (-\cos^2 \varphi) d(\cos \varphi) \left(\frac{\rho^5}{5} \right)_0^2 = -2\pi \cdot \frac{2^5}{5} \int_1^{-1} u^2 du = \frac{64\pi}{5} \left(\frac{u^3}{3} \right)_{-1}^1 = \frac{128\pi}{15}.$$

Επαλήθευση Θ.Μ.Τ. ολοκληρωτικού λογισμού

Παρατηρούμε ότι $I = \frac{4}{5} \cdot V(B)$, άρα η μέση τιμή της $f: B \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y, z) = z^2$ στο B είναι

$$\bar{f}_B = \frac{I}{V(B)} = \frac{4}{5} \text{ και } B \text{ κλειστό και φραγμένο σύνολο, δηλαδή συμπαγές. Για } (x, y, z) \in B:$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq \frac{16}{5} \\ z = -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{cases} \quad \text{ή} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 \leq \frac{16}{5} \\ z = \frac{2}{\sqrt{5}} \end{cases} \Rightarrow f(x, y, z) = \bar{f}_B \text{ δηλαδή } \exists (x_0, y_0, z_0) \in B: f(x_0, y_0, z_0) = \bar{f}_B$$

Άσκηση 5

Υπολογίστε το $V(B)$ και το $\iiint_B \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz$, όπου B το στερεό που βρίσκεται στην πρώτη στερεά γωνία και περιβάλλεται από τα επίπεδα $x = 0, y = 0$ και $z = 4$ και το παραβολοειδές $z = x^2 + y^2$.

Λύση

Χρησιμοποιούμε τον "1-1", επί και συνεχή μετασχηματισμό σε κυλινδρικές συντεταγμένες

$\vec{T}: (0, \infty) \times [0, 2\pi) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \vec{T}(r, \theta, z) = (r \cos \theta, r \sin \theta, z)$ και

$$\overrightarrow{T^{-1}}(x, y, z) = \begin{cases} \left(\sqrt{x^2 + y^2}, \arcsin\left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right), z \right), & x \geq 0 \\ \left(\sqrt{x^2 + y^2}, \pi - \arcsin\left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right), z \right), & x < 0 \end{cases}$$

$$\text{Τότε } J(\vec{T}) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ με } \det J(\vec{T}) = r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta = r. \text{ Το χωρίο } B \text{ σε κυλινδρικές}$$

συντεταγμένες περιγράφεται από σχέσεις: $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq z \leq 4$ και $0 \leq z \leq r^2 \Rightarrow$

$0 \leq r \leq \sqrt{z}$ ενώ η $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}, f \in C(\mathbb{R}^2)$ με

$\left(f \circ \overrightarrow{T^{-1}}\right)(x, y, z) = f\left(\overrightarrow{T^{-1}}(x, y, z)\right) = f(r, \theta, z) = r$ συνεχή ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων $\implies f \circ \overrightarrow{T^{-1}}$ ολοκληρώσιμη. Τότε: $V(B) = \iiint_B dx dy dz = \int_0^4 \int_0^{\pi/2} \int_0^{\sqrt{z}} r dr d\theta dz \implies$

$$V(B) = \int_0^{\pi/2} \int_0^4 \left(\frac{r^2}{2}\right)_0^{\sqrt{z}} dz d\theta = \int_0^{\pi/2} \int_0^4 \left(\frac{z}{2}\right) dz d\theta = \left(\int_0^{\pi/2} d\theta\right) \int_0^4 \left(\frac{z}{2}\right) dz = \frac{\pi}{2} \left(\frac{z^2}{4}\right)_0^4 = 2\pi$$

$$I = \iiint_B \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz = \int_0^4 \int_0^{\pi/2} \int_0^{\sqrt{z}} (r) r dr d\theta dz = \int_0^{\pi/2} \int_0^4 \left(\frac{r^3}{3}\right)_0^{\sqrt{z}} dz d\theta \implies$$

$$I = \int_0^{\pi/2} \int_0^4 \left(\frac{z^{3/2}}{3}\right) dz d\theta = \left(\int_0^{\pi/2} d\theta\right) \int_0^4 \left(\frac{z^{3/2}}{3}\right) dz = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{2}{5} \cdot \left(\frac{z^{5/2}}{3}\right)_0^4 = \frac{\pi}{5} \cdot \frac{32}{3} = \frac{32\pi}{15}$$

$$\text{και παρατηρούμε ότι } I = \frac{16}{15} \cdot V(B) \implies \bar{f}_B = \frac{I}{V(B)} = \frac{16}{15} = f\left(\frac{4}{\sqrt{15}}, \theta, \frac{16}{15}\right) \forall \theta \in [0, 2\pi),$$

δηλαδή $\exists (r_0, \theta_0, z_0) \in B: f(r_0, \theta_0, z_0) = \bar{f}_B$

Συμπληρωματικές ασκήσεις για το 9ο μάθημα

Άσκηση 1

Δίνεται η συνάρτηση $f(x, y, z) = xye^{x^2+y^2+z^2}$. Να υπολογιστεί η κατευθυνόμενη παράγωγος $f_u'(\vec{a})$ στο

σημείο $\vec{a} = (1, 1, 1)$ ως προς την κατεύθυνση $\vec{u} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$

Λύση

$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x, y, z) = xye^{x^2+y^2+z^2} \in C(\mathbb{R}^3)$. Παρατηρούμε ότι $f(x, y, z) = f(z, x, y) = f(y, z, x)$

$$f_x(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial x} (xye^{x^2+y^2+z^2}) = yz \left[\frac{\partial}{\partial x} (x) \cdot e^{x^2+y^2+z^2} + x \frac{\partial}{\partial x} (e^{x^2+y^2+z^2}) \right] \implies$$

$$f_x(x, y, z) = yz (e^{x^2+y^2+z^2} + x \cdot 2xe^{x^2+y^2+z^2}) \implies f_x(x, y, z) = yze^{x^2+y^2+z^2} (1 + 2x^2).$$

Αντίστοιχα, με κυκλική μετάθεση δεικτών $x \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow x$

$f_y(x, y, z) = zxe^{x^2+y^2+z^2} (1 + 2y^2)$ και $f_z(x, y, z) = xye^{x^2+y^2+z^2} (1 + 2z^2)$. f_x, f_y, f_z συνεχείς ως

γινόμενο συνεχών (πολυωνυμικών και σύνθεσης εκθετικής με πολυωνυμική συνάρτηση των

των x, y, z) $\implies f \in C^1(\mathbb{R}^3) \implies f$ διαφορίσιμη με $D_{f(x,y,z)}(\vec{h}) = \vec{\nabla} f(x, y, z) \cdot \vec{h} \implies$

$$D_{f(x,y,z)}(\vec{h}) = (f_x(x, y, z), f_y(x, y, z), f_z(x, y, z)) \cdot \vec{h} = e^{x^2+y^2+z^2} (yz(1+2x^2), zx(1+2y^2), xy(1+2z^2)) \cdot \vec{h}$$

$$f_u'(\vec{a}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\vec{a} + t\vec{u}) - f(\vec{a})}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{D_{f(\vec{a})}(t\vec{u})}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\vec{\nabla} f(\vec{a}) \cdot (t\vec{u})}{t} = \vec{\nabla} f(1, 1, 1) \cdot \vec{u} \implies$$

$$f_u'(\vec{a}) = (3, 3, 3) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) = 3\sqrt{2}$$

Άσκηση 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x, y, z) = x + y^2 + z^3$. Να βρεθεί για ποιες κατευθύνσεις η κατευθυνόμενη

παράγωγος της συνάρτησης f παίρνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή στο $(0, 0, 0)$ και στο $(1, 1, 1)$.

Λύση

$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x, y, z) = x + y^2 + z^3 \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$.

$$f_x(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial x}(x + y^2 + z) = 1, \quad f_y(x, y, z) = 2y \text{ και } f_z(x, y, z) = 3z^2, \quad f_x, f_y, f_z \text{ συνεχείς ως}$$

πολυωνυμικές συναρτήσεις των $x, y, z \implies f \in C^1(\mathbb{R}^3) \implies f$ διαφορίσιμη με

$$D_{f(x,y,z)}(\vec{h}) = \vec{\nabla} f(x, y, z) \cdot \vec{h} \implies D_{f(x,y,z)}(\vec{h}) = (f_x(x, y, z), f_y(x, y, z), f_z(x, y, z)) \cdot \vec{h}$$

$$D_{f(x,y,z)}(\vec{h}) = (1, 2y, 3z^2) \cdot \vec{h}$$

$$f_{\vec{u}}(\vec{a}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\vec{a} + t\vec{u}) - f(\vec{a})}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{D_{f(\vec{a})}(t\vec{u})}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\vec{\nabla} f(\vec{a}) \cdot (t\vec{u})}{t} = \vec{\nabla} f(x, y, z) \cdot \vec{u}$$

Από ανισότητα *Cauchy – Schwarz*: $|\vec{\nabla} f(x, y, z) \cdot \vec{u}| \leq \|\vec{\nabla} f(x, y, z)\| \cdot \|\vec{u}\| = \|\vec{\nabla} f(x, y, z)\| \implies$

$$-\|\vec{\nabla} f(x, y, z)\| \leq f_{\vec{u}}(\vec{a}) \leq \|\vec{\nabla} f(x, y, z)\| \text{ με } f_{\vec{u}}(\vec{a}) = \|\vec{\nabla} f(x, y, z)\| \text{ για } \hat{u}_1 = \frac{\vec{\nabla} f(\vec{a})}{\|\vec{\nabla} f(\vec{a})\|} \text{ (κατεύθυνση}$$

$$\text{μέγιστης κατευθυνόμενης παραγώγου) και } f_{\vec{u}}(\vec{a}) = -\|\vec{\nabla} f(\vec{a})\| \text{ για } \hat{u}_2 = -\frac{\vec{\nabla} f(\vec{a})}{\|\vec{\nabla} f(\vec{a})\|} = -\hat{u}_1$$

(κατεύθυνση ελάχιστης κατευθυνόμενης παραγώγου). Για $\vec{a} = (0, 0, 0)$:

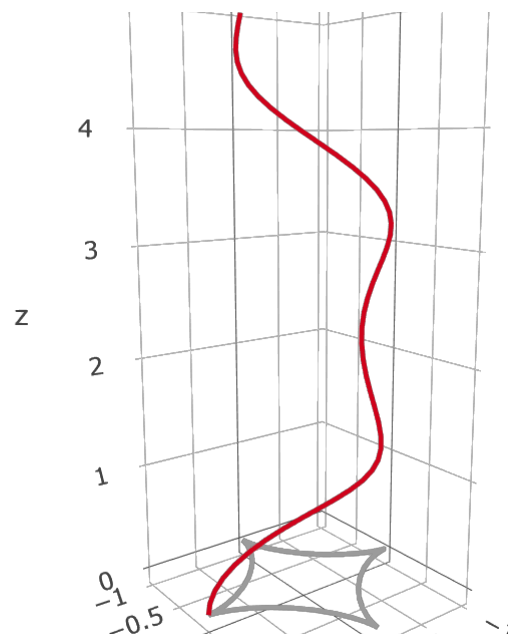
$$\hat{u}_1 = \frac{\vec{\nabla} f(0)}{\|\vec{\nabla} f(0)\|} = (1, 0, 0) \text{ και } \hat{u}_2 = (-1, 0, 0). \text{ Για } \vec{a} = (1, 1, 1): \hat{u}_1 = \frac{\vec{\nabla} f(1, 1, 1)}{\|\vec{\nabla} f(1, 1, 1)\|} = \frac{(1, 2, 3)}{\|(1, 2, 3)\|} \implies$$

$$\hat{u}_1 = \left(\frac{\sqrt{14}}{14}, \frac{\sqrt{14}}{7}, \frac{3\sqrt{14}}{14} \right) \text{ και αντίστοιχα } \hat{u}_2 = -\hat{u}_1 = \left(-\frac{\sqrt{14}}{14}, -\frac{\sqrt{14}}{7}, -\frac{3\sqrt{14}}{14} \right).$$

Άσκηση 3

Να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ της συνάρτησης $\vec{F}(x, y, z) = (\sin z, \cos z, \sqrt[3]{xy})$

$$\text{όπου } \Gamma = \left\{ \vec{r}(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t, t), t \in \left[0, \frac{3\pi}{2} \right] \right\}.$$



Λύση

$\vec{F}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ με $\vec{F}(x, y, z) = (\sin z, \cos z, \sqrt[3]{xy}) \in C(\mathbb{R}^3)$ – πεδίο, διότι $F_x = \sin z$, $F_y = \cos z$ και

$F_z = \sqrt[3]{xy} \in C(\mathbb{R}^3)$. Η παραμέτρηση της καμπύλης Γ $\vec{r}(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t, t)$, $t \in \left[0, \frac{3\pi}{2} \right]$ με

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = (-3\cos^2 t \sin t, 3\sin^2 t \cos t, 1) \text{ και } \left\| \frac{d\vec{r}}{dt} \right\| = \sqrt{9\sin^2 t \cos^2 t (\cos^2 t + \sin^2 t) + 1} \implies$$

$$\left\| \frac{d\vec{r}}{dt} \right\| = \sqrt{\frac{9}{4} - (2 \sin t \cos t)^2 + 1} = \frac{\sqrt{9(\sin 2t)^2 + 4}}{2} \neq 0 \text{ είναι } C^1, \text{ η καμπύλη } \Gamma \text{ είναι λεία}$$

$$\left(\text{έλικα με βάση το μοναδιαίο υποκυκλοειδές στο συμπαγές διάστημα } I = \left[0, \frac{3\pi}{2} \right] \right). \text{ Τότε:}$$

$$\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{3\pi/2} \left[(\vec{F} \circ \vec{r}(t)) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \right] dt \Rightarrow$$

$$\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{3\pi/2} \left[(\sin t, \cos t, \sqrt[3]{(\cos t)^3 (\sin t)^3}) \cdot (-3 \cos^2 t \sin t, 3 \sin^2 t \cos t, 1) \right] dt \Rightarrow$$

$$\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{3\pi/2} (-3 \sin^2 t \cos^2 t + 3 \sin^2 t \cos^2 t + \cos t \sin t) dt \Rightarrow$$

$$\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{3\pi/2} \left(\frac{\sin 2t}{2} \right) dt = \frac{1}{2} \left(-\frac{\cos 2t}{2} \right)_0^{3\pi/2} = -\frac{1}{4} \left[\cos \left(2 \cdot \frac{3\pi}{2} \right) - \cos 0 \right] = -\frac{1}{4}(-1 - 1) = \frac{1}{2}$$

Άσκηση 4

Να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ της συνάρτησης $\vec{F}(x, y) = \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$

όπου Γ ο μοναδιαίος κύκλος με κέντρο το $(0, 0)$.

Λύση

Παρατηρούμε ότι δεν υπάρχει συνεχής επέκταση για την $\vec{F}: D = \left\{ \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\} \right\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ με

$$\vec{F}(x, y) = \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right) \text{ στο } (0, 0). \text{ Όμως, } \forall (x, y) \neq (0, 0): F_x = -\frac{y}{x^2 + y^2}, F_y = \frac{x}{x^2 + y^2},$$

συνεχείς ως ρητές συναρτήσεις των $x, y \Rightarrow \vec{F}$ συνεχής στο D . $(0, 0) \notin \Gamma$, τότε ο περιορισμός

$\vec{F}: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^2$ στην καμπύλη Γ αποτελεί $C(\Gamma)$ πεδίο. Ο μοναδιαίος κύκλος με

κέντρο $(0, 0)$ παραμετροποιείται ως εξής: $\vec{r}: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2: \vec{r}(t) = (\cos t, \sin t) \Rightarrow$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = (-\sin t, \cos t), \text{ δηλαδή } \vec{r} \in C^1([0, 2\pi]) \text{ και } \left\| \frac{d\vec{r}}{dt} \right\| = 1 \neq 0 \forall t \in [0, 2\pi] \text{ (λεία καμπύλη)}$$

$$\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \left[(\vec{F} \circ \vec{r}(t)) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \right] dt = \int_0^{2\pi} [(-\sin t, \cos t) \cdot (-\sin t, \cos t)] dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$$

Παρατηρούμε τα εξής:

η καμπύλη Γ είναι κλειστή, απλή και λεία, αλλά δεν ισχύει το πρώτο θεώρημα

του *Green*. Η $\vec{F}$ δεν είναι C^1 στο $\text{es}\Gamma = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 \leq 1 \right\}$, εφόσον $(0, 0) \in \text{es}\Gamma$.

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{y}{x^2 + y^2} \right) \right] \hat{k} = \left[-x \frac{2y}{(x^2 + y^2)^2} - \left[-y \frac{2x}{(x^2 + y^2)^2} \right] \right] \hat{k} = \vec{0} = \text{το } \vec{F}$$

είναι αστρόβιλο πεδίο – αλλά $\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} \neq 0$

Άσκηση 5

Να αποδειχθεί ότι :

$$(i) \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} xy \right) = 0$$

$$(ii) \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \left(y \frac{2xy}{x^2 + y^2} \right) = 0$$

Λύση

(i) $f: D_f = \{\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}\} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} xy$, $(x,y) \neq (0,0)$, όμως το $(0,0)$ είναι σημείο

συσσώρευσης του D , δηλαδή $\forall \varepsilon > 0: N_\varepsilon(\vec{0}) \cap D_f \neq \emptyset$. Για $\delta = \delta(\varepsilon) = \sqrt{\varepsilon} > 0: \|(x,y)\| < \delta \implies$

$$|f(x,y)| = \left| \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} xy \right| = \frac{|x^2 - y^2|}{x^2 + y^2} \cdot |x||y| \leq \frac{|x^2| + |y^2|}{x^2 + y^2} \sqrt{x^2 + y^2}^2 \leq x^2 + y^2 < \delta^2 = \sqrt{\varepsilon}^2 = \varepsilon$$

$$\text{Άρα } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} xy \right) = 0$$

(ii) $f: D_f = \{\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}\} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x,y) = y \frac{2xy}{x^2 + y^2}$, $(x,y) \neq (0,0)$, όμως το $(0,0)$ είναι σημείο

συσσώρευσης του D , δηλαδή $\forall \varepsilon > 0: N_\varepsilon(\vec{0}) \cap D_f \neq \emptyset$. Για $\delta = \delta(\varepsilon) = \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}} > 0: \|(x,y)\| < \delta \implies$

$$|f(x,y)| = \left| y \frac{2xy}{x^2 + y^2} \right| = \frac{2|x| \cdot y^2}{x^2 + y^2} \leq \frac{2\sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2} (x^2 + y^2) \leq 2\sqrt{x^2 + y^2} < 2\delta^2 = 2\sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}^2 = \varepsilon$$

$$\text{Άρα } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(y \frac{2xy}{x^2 + y^2} \right) = 0$$

Άσκηση 6

Να μελετηθεί ως προς την συνέχεια η συνάρτηση $f(x,y) = \begin{cases} \frac{2x^2 y}{x^4 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Λύση

(i) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x,y) = \begin{cases} \frac{2x^2 y}{x^4 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

$\forall (x,y) \neq (0,0): f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής ως ρητή συνάρτηση των x,y . Έστω ότι

$\exists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(\frac{2x^2 y}{x^4 + y^2} \right) \in \mathbb{R}$. Παρατηρούμε ότι για τον περιορισμό $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ της f στον άξονα των x

ισχύει $g(x) = f(x,0) = 0 \implies \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$ ενώ για τον περιορισμό $h: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ της f στην

παραβολή $y = x^2$ ισχύει $h(x) = f(x, x^2) = \frac{2x^4}{x^4 + x^4} = \frac{2x^4}{2x^4} = 1 \implies \lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 1 \neq 0 \implies$ Άτοπο.

Άρα $\nexists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(\frac{2x^2 y}{x^4 + y^2} \right)$, δηλαδή η f παρουσιάζει στο $(0,0)$ ασυνέχεια δεύτερου είδους.

Ομοίως, αποδεικνύεται με αρχή της μεταφοράς:

Έστω ότι $\exists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(\frac{2x^2 y}{x^4 + y^2} \right) \in \mathbb{R}$. Τότε $\forall \left(\vec{a_n} \right)_{n \in \mathbb{N}'}$ με $\vec{a_n} \neq \vec{0}$ και $\lim \vec{a_n} = \vec{0} \implies \lim f(\vec{a_n}) = 0$

θεωρούμε $\left(\vec{a}_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ με $\vec{a}_n = \left(\frac{1}{n}, 0\right)$, $\forall n \in \mathbb{N} : \vec{a}_n \neq \vec{0}$, $\vec{a}_n \rightarrow (0, 0)$, $f\left(\vec{a}_n\right) = 0 \rightarrow 0$ και

$$\left(\vec{b}_n\right)_{n \in \mathbb{N}} \text{ με } \vec{b}_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\right), \forall n \in \mathbb{N} \quad \vec{b}_n \neq \vec{0}, \vec{b}_n \rightarrow (0, 0) \text{ και } f\left(\vec{b}_n\right) = \frac{\frac{2}{n^4}}{\frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^4}} = 1 \rightarrow 1 \neq 0$$

$$\text{Άτοπο} \implies \nexists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(\frac{2x^2y}{x^4 + y^2} \right)$$

Άσκηση 7

Δίνεται η συνάρτηση $f(x, y) = x^2 + 4y^2$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Να υπολογιστεί το $df(2, 3)$

Λύση

(i) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x, y) = x^2 + 4y^2 \in C(\mathbb{R}^2)$ με $f_x(x, y) = 2x$, $f_y(x, y) = 8y \in C(\mathbb{R}^2)$.

Τότε η $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$, άρα είναι διαφορίσιμη. $df_{(2,3)}(\vec{h}) = \vec{\nabla} f(2, 3) \cdot \vec{h} = (f_x(2, 3), f_y(2, 3)) \cdot \vec{h} \implies df_{(2,3)}(\vec{h}) = (4, 24) \cdot (h_1, h_2) = 4h_1 + 24h_2$.

Αναλυτικά:

Ορισμός διαφορικού για συναρτήσεις 2 μεταβλητών:

$$df(x, y): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \text{ γραμμική: } \lim_{\vec{h} \rightarrow \vec{0}} \frac{f(\vec{r} + \vec{h}) - f(\vec{r}) - df(x, y) \cdot \vec{h}}{||\vec{h}||} = 0 \quad (\text{A})$$

Τότε $\exists a, b \in \mathbb{R} \quad df(x, y) = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$

Μοναδικότητα γραμμικού τελεστή με ιδιότητα (A)

Έστω $\exists c, d \in \mathbb{R}: df(x, y) = \begin{pmatrix} c & d \end{pmatrix}$:

$$\lim_{\vec{h} \rightarrow \vec{0}} \frac{f(\vec{r} + \vec{h}) - f(\vec{r}) - (ah_1 + bh_2)}{||\vec{h}||} = \lim_{\vec{h} \rightarrow \vec{0}} \frac{f(\vec{r} + \vec{h}) - f(\vec{r}) - (ch_1 - dh_2)}{||\vec{h}||} = 0 \implies$$

$$\lim_{\vec{h} \rightarrow \vec{0}} \left[\frac{f(\vec{r} + \vec{h}) - f(\vec{r}) - (ah_1 + bh_2)}{||\vec{h}||} \right] - \lim_{\vec{h} \rightarrow \vec{0}} \left[\frac{f(\vec{r} + \vec{h}) - f(\vec{r}) - (ch_1 + dh_2)}{||\vec{h}||} \right] = 0 \implies$$

$$\lim_{\vec{h} \rightarrow \vec{0}} \left[\frac{f(\vec{r} + \vec{h}) - f(\vec{r}) - (ah_1 + bh_2)}{||\vec{h}||} - \frac{f(\vec{r} + \vec{h}) - f(\vec{r}) - (ch_1 + dh_2)}{||\vec{h}||} \right] = 0 \implies$$

$$\lim_{\vec{h} \rightarrow \vec{0}} \frac{(c-a)h_1 + (d-b)h_2}{||\vec{h}||} = 0. \text{ Από αρχή μεταφοράς } \forall (\vec{a}_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ με } (0, 0) \neq \vec{a}_n = \left(0, \frac{1}{n}\right) \rightarrow (0, 0):$$

$$f\left(\vec{a}_n\right) \rightarrow 0. \text{ Έστω } c-a \neq 0 \text{ ή } d-b \neq 0. \text{ Θεωρούμε } (\vec{a}_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ με } (0, 0) \neq \vec{a}_n = \left(0, \frac{1}{n}\right) \rightarrow (0, 0):$$

$$f\left(\vec{a}_n\right) \rightarrow d-b=0 \text{ και } \left(\vec{b}_n\right)_{n \in \mathbb{N}} \text{ με } (0, 0) \neq \vec{b}_n = \left(\frac{1}{n}, 0\right) \rightarrow (0, 0): f(b_n) \rightarrow c-a=0, \text{ άτοπο. Άρα}$$

$a = c$ και $b = d$, δηλαδή υπάρχει το πολύ μία γραμμική συνάρτηση με την παραπάνω ιδιότητα.

Για $df(x, y) := \vec{\nabla} f(x, y) = (f_x(x, y), f_y(x, y))$ και f συνάρτηση C^1 στο (x, y) :

$$\lim_{\vec{h} \rightarrow \vec{0}} \frac{f(\vec{r} + \vec{h}) - f(\vec{r}) - \vec{\nabla} f(\vec{r}) \cdot \vec{h}}{||\vec{h}||} = \lim_{\vec{h} \rightarrow \vec{0}} \frac{f(x+h_1, y+h_2) - f(x, y) - f_x(x, y)h_1 - f_y(x, y)h_2}{||\vec{h}||} =$$

$$= \lim_{\vec{h} \rightarrow \vec{0}} \frac{f(x+h_1, y+h_2) - f(x, y+h_2) - f_x(x, y)h_1 + f(x, y+h_2) - f(x, y) - f_y(x, y)h_2}{\|\vec{h}\|}$$

Παρατηρούμε ότι:

$$\begin{aligned} \lim_{\vec{h} \rightarrow \vec{0}} \frac{f(x+h_1, y+h_2) - f(x, y+h_2) - f_x(x, y)h_1}{\|\vec{h}\|} &= \\ &= \lim_{\vec{h} \rightarrow \vec{0}} \left\{ \left[\frac{f(x+h_1, y+h_2) - f(x, y+h_2)}{h_1} - f_x(x, y) \right] \frac{h_1}{\|\vec{h}\|} \right\} \end{aligned}$$

Από ορισμό και συνέχεια μερικών παραγώγων – έχουμε υποθέσει ότι η f είναι C^1 στο $(x, y) -$

$$\begin{aligned} \lim_{\vec{h} \rightarrow \vec{0}} \frac{f(x+h_1, y+h_2) - f(x, y+h_2)}{h_1} &= f_x(x, y) \implies \\ \lim_{\vec{h} \rightarrow \vec{0}} \left[\frac{f(x+h_1, y+h_2) - f(x, y+h_2)}{h_1} - f_x(x, y) \right] &= 0 \text{ και } 0 \leq \frac{|h_1|}{\|\vec{h}\|} \leq 1. \text{ Τότε} \\ \lim_{\vec{h} \rightarrow \vec{0}} \left[\frac{f(x+h_1, y+h_2) - f(x, y+h_2) - f_x(x, y)h_1}{\|\vec{h}\|} \right] &= 0. \end{aligned}$$

Ομοίως αποδεικνύεται ότι:

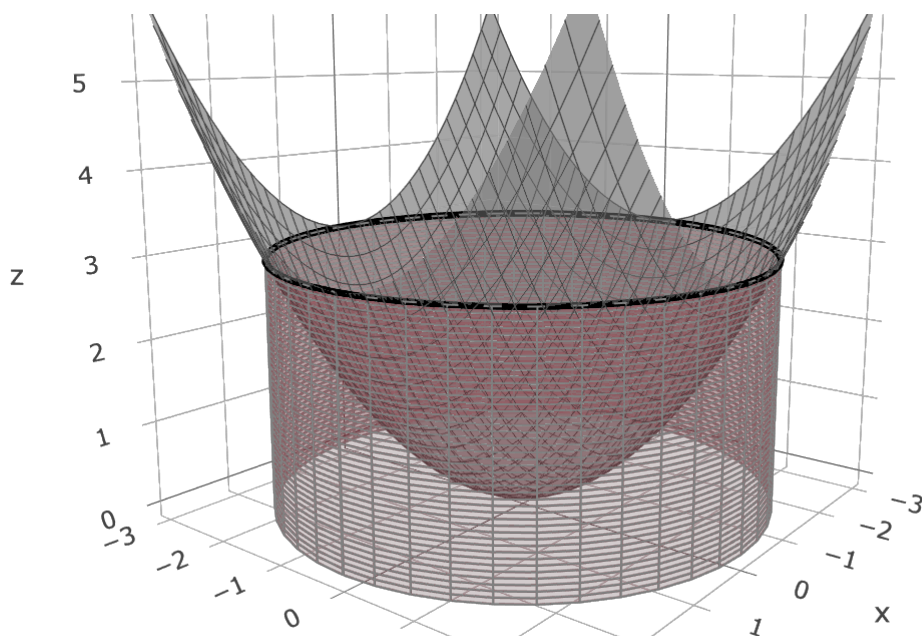
$$\lim_{\vec{h} \rightarrow \vec{0}} \frac{f(x, y+h_2) - f(x, y) - f_y(x, y)h_2}{\|\vec{h}\|} = \lim_{\vec{h} \rightarrow \vec{0}} \left\{ \left[\frac{f(x, y+h_2) - f(x, y) - f_y(x, y)h_2}{h_2} - f_y(x, y) \right] \frac{h_2}{\|\vec{h}\|} \right\} = 0.$$

$$\text{Τελικά, } \lim_{\vec{h} \rightarrow \vec{0}} \frac{f(\vec{r} + \vec{h}) - f(\vec{r}) - \vec{\nabla} f(\vec{r}) \cdot \vec{h}}{\|\vec{h}\|} = 0. \text{ Σύμφωνα με τα παραπάνω το διαφορικό της } f,$$

εφόσον υπάρχει, ορίζεται μονοσήμαντα ως $df(x, y)(\vec{h}) = \vec{\nabla} f(\vec{r}) \cdot \vec{h}$

Άσκηση 8

Να υπολογιστεί ο όγκος του στερεού B που βρίσκεται στο πρώτο ογδοημόριο ($x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$) και περιβάλλεται από τις επιφάνειες $x^2 + y^2 = 9, 3z = x^2 + y^2$.



Λύση

Η εξίσωση $x^2 + y^2 = 9, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ περιγράφει το τμήμα κυλίνδρου κυκλικής βάσης με $r = 3$ και άξονα περιστροφής zz' στο πρώτο ογδοημόριο ενώ η $3z = x^2 + y^2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ αντιστοιχεί σε τμήμα παραβολοειδούς με τον ίδιο άξονα περιστροφής.

Οι δυο επιφάνειες τέμνονται για $3z = 9 \implies z = 3$ κατά τμήμα κύκλου $x^2 + y^2 = 9, x \geq 0, y \geq 0$.

Παρατηρούμε ότι το B είναι στερεό εκ περιστροφής περί τον άξονα z, δηλαδή έχει κυλινδρική συμμετρία. Σε κυλινδρικές συντεταγμένες γράφεται

$$B = \left\{ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq z \leq 3, \sqrt{3z} \leq r \leq 3 \right\}. \text{ Τότε:}$$

$$V(B) = \iiint_B r dr d\theta dz = \int_0^{\pi/2} \int_0^3 \int_{\sqrt{3z}}^3 r dr dz d\theta = \int_0^{\pi/2} \int_0^3 \left(\frac{r^2}{2} \right)_{\sqrt{3z}}^3 dz d\theta \Rightarrow$$

$$V(B) = \left(\int_0^{\pi/2} d\theta \right) \left[\int_0^3 \left(\frac{9 - 3z}{2} \right) dz \right] = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} \left(9z - \frac{3z^2}{2} \right)_0^3 = \frac{\pi}{4} \left(27 - \frac{27}{2} \right) = \frac{27\pi}{8}$$

Αλλιώς παρατηρούμε $B_2 \subset B_1$ και $V(B) = V(B_1) - V(B_2) \Rightarrow$

$$V(B) = \int_0^{\pi/2} \int_0^3 \int_0^3 r dr dz d\theta - \int_0^{\pi/2} \int_0^3 \int_0^{\sqrt{3z}} r dr dz d\theta = \frac{\pi}{2} \cdot 3 \cdot \frac{3^2}{2} - \frac{\pi}{2} \int_0^3 \left(\frac{3z}{2} \right) dz \Rightarrow$$

$$V(B) = \frac{\pi}{4} \left[27 - \left(\frac{3z^2}{2} \right)_0^3 \right] = \frac{27\pi}{8}$$

ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙ & ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ_ΕΑΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2020

ΔΗΜΗΤΡΗΣ ΠΙΤΣΟΣ_ ΑΡ.ΜΗΤΡΩΟΥ: 1110201900303

Συμπληρωματικές ασκήσεις για το 10ο μάθημα

Άσκηση 1

Εξετάστε ως προς τη συνέχεια τις παρακάτω συναρτήσεις :

$$\begin{aligned} (i) f(x, y) &= \begin{cases} \frac{3x^2 - y^2}{x^2 + 3y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases} & (ii) f(x, y) &= \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + 2y^4}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \\ (iii) f(x, y) &= \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases} & (iv) f(x, y) &= \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right), & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \\ (v) f(x, y) &= \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases} & (v) f(x, y) &= \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} \sqrt[3]{y}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \end{aligned}$$

Λύση

$$(i) f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } f(x, y) = \begin{cases} \frac{3x^2 - y^2}{x^2 + 3y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases} . \text{ Παρατηρούμε ότι } \forall (x, y) \neq (0, 0):$$

f συνεχής ως ρητή συνάρτηση των x, y . Έστω $\exists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = a \in \mathbb{R}$. Τότε από αρχή

$$\text{μεταφοράς: } \forall \left(\vec{a_n} \right)_{n \in \mathbb{N}}, \vec{a_n} \neq \vec{0} \forall n \in \mathbb{N} \text{ με } \lim_{n \rightarrow \infty} \vec{a_n} = \vec{0}: f\left(\vec{a_n}\right) = a. \text{ Για } \vec{a_n} = \left(0, \frac{1}{n}\right) \neq \vec{0} \text{ με}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \vec{a_n} = 0, f\left(\vec{a_n}\right) = \frac{-\frac{1}{n^2}}{\frac{3}{n^2}} = -\frac{1}{3} \rightarrow -\frac{1}{3} \implies a = -\frac{1}{3}. \text{ Όμως, για } \vec{b_n} = \left(\frac{1}{n}, 0\right) \neq \vec{0} \text{ με } \lim_{n \rightarrow \infty} \vec{b_n} = 0,$$

$$f\left(\vec{b_n}\right) = \frac{\frac{3}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} = 3 \rightarrow 3 \implies a = 3, \text{ το οποίο είναι άτοπο } \implies \nexists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y). \text{ Τότε η } f$$

παρουσιάζει ασυνέχεια δεύτερου είδους (ουσιώδης) στο $(0, 0)$. Άρα η f είναι ασυνεχής.

$$(ii) f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + 2y^4}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases} . \text{ Παρατηρούμε ότι } \forall (x, y) \neq (0, 0):$$

f συνεχής ως ρητή συνάρτηση των x, y . Έστω $\exists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = a \in \mathbb{R}$. Τότε από αρχή

$$\text{μεταφοράς } \forall \left(\vec{a_n} \right)_{n \in \mathbb{N}}, \vec{a_n} \neq \vec{0} \forall n \in \mathbb{N} \text{ με } \lim_{n \rightarrow \infty} \vec{a_n} = \vec{0}: f\left(\vec{a_n}\right) = a. \text{ Για } \vec{a_n} = \left(0, \frac{1}{n}\right) \neq \vec{0},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \vec{a_n} = 0, f\left(\vec{a_n}\right) = 0 \rightarrow 0 \implies a = 0. \text{ Όμως, για } \vec{b_n} = \left(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n}\right) \neq \vec{0} \text{ με } \lim_{n \rightarrow \infty} \vec{b_n} = 0,$$

$$f\left(\vec{b_n}\right) = \frac{\frac{1}{n^4}}{\frac{1}{n^4} + \frac{2}{n^4}} = \frac{1}{3} \rightarrow \frac{1}{3} \implies a = \frac{1}{3}, \text{ το οποίο είναι άτοπο } \implies \nexists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y). \text{ Τότε η } f$$

παρουσιάζει ασυνέχεια δεύτερου είδους στο $(0,0)$. Άρα η f είναι ασυνεχής.

$$iii) f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}. \text{ Παρατηρούμε ότι } \forall (x,y) \neq (0,0):$$

f συνεχής ως ρητή συνάρτηση των x,y . Έστω $\varepsilon > 0$: για $\delta = \delta(\varepsilon) = \varepsilon > 0$: $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$||(x,y)|| < \delta: \left| \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| = \frac{|x||y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{x^2+y^2} = ||(x,y)|| < \varepsilon. \text{ Τότε}$$

$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$, δηλαδή η f είναι συνεχής στο $(0,0)$. Άρα, η f είναι συνεχής.

$$iv) f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right), & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}. \text{ Παρατηρούμε ότι}$$

$\forall (x,y) \neq (0,0)$ f συνεχής ως πράξεις (και σύνθεση) συνεχών συναρτήσεων. Έστω $\varepsilon > 0$:

για $\delta = \delta(\varepsilon) = \sqrt{\varepsilon} > 0$: $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$: $||(x,y)|| < \delta$:

$$\left| (x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) \right| = (x^2+y^2) \left| \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) \right| \leq x^2+y^2 = ||(x,y)||^2 < \varepsilon. \text{ Τότε}$$

$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$, δηλαδή η f είναι συνεχής στο $(0,0)$. Άρα, η f είναι συνεχής.

$$v) f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } f(x,y) = \begin{cases} xy \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}. \text{ Παρατηρούμε ότι } \forall (x,y) \neq (0,0): f$$

συνεχής ως ρητή συνάρτηση των x,y . Έστω $\varepsilon > 0$: για $\delta = \delta(\varepsilon) = \sqrt[3]{\varepsilon} > 0$: $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$||(x,y)|| < \delta: \left| xy \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \right| = |x||y| \frac{|x^2-y^2|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \sqrt{x^2+y^2} \sqrt{x^2+y^2} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = ||(x,y)||^3 < \varepsilon. \text{ Τότε}$$

$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$, δηλαδή η f είναι συνεχής στο $(0,0)$. Άρα, η f είναι συνεχής.

$$vi) f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} \sqrt[3]{y}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}. \text{ Παρατηρούμε ότι } \forall (x,y) \neq (0,0): f$$

συνεχής ως ρητή συνάρτηση των x,y . Έστω $\varepsilon > 0$: για $\delta = \delta(\varepsilon) = \sqrt[4]{\varepsilon^3} > 0$: $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$||(x,y)|| < \delta: \left| \frac{xy}{x^2+y^2} \sqrt[3]{y} \right| = \frac{|x||y|^{4/3}}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{\sqrt{x^2+y^2} \sqrt{x^2+y^2}^{4/3}}{\sqrt{x^2+y^2}} = ||(x,y)||^{4/3} < \varepsilon. \text{ Τότε}$$

$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$, δηλαδή η f είναι συνεχής στο $(0,0)$. Άρα, η f είναι συνεχής.

Άσκηση 2

Υπολογίστε στο σημείο $(0, 1)$ την παράγωγο (πίνακα *Jacobi*) της $\vec{f}(x, y) = (xy^2, ye^{x^2})$.

Λύση

$\vec{f}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ με $\vec{f}(x, y) = (xy^2, ye^{x^2})$ με συνιστώσες (συναρτήσεις) $P, Q: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,
 $P(x, y) = xy^2$, $Q(x, y) = ye^{x^2}$. $P, Q \in C(\mathbb{R}^2)$ ως γινόμενο και σύνθεση συνεχών συναρτήσεων.
 $P_x = y^2$, $P_y = 2xy$, $Q_x = 2xye^{x^2}$, $Q_y = e^{x^2}$, $P_x, P_y, Q_x, Q_y: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \in C(\mathbb{R}^2)$, άρα
 $\vec{f} \in C^1(\mathbb{R}^2) \Rightarrow \vec{f}$ διαφορίσιμη.

$$D_{\vec{f}}(x, y) = \left(\frac{\vec{\nabla} P}{\vec{\nabla} Q} \right) = \begin{pmatrix} P_x & P_y \\ Q_x & Q_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^2 & 2xy \\ 2xye^{x^2} & e^{x^2} \end{pmatrix}. \text{ Για } (x, y) \equiv (0, 1): D_{\vec{f}}(0, 1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Άσκηση 3

Υπολογίστε τις f_{xx} , f_{yy} των συναρτήσεων:

(i) $f(x, y) = e^{xy} \sin^2 x$

(ii) $f(x, y) = (x^2 + y^3) \ln(1 + y^2)$

Λύση

(i) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x, y) = e^{xy} \sin^2 x \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ ως σύνθεση και γινόμενο στοιχειδών
συναρτήσεων με $f_x(x, y) = ye^{xy} \sin^2 x + e^{xy} (2 \sin x \cos x) \Rightarrow f_x(x, y) = ye^{xy} \sin^2 x + e^{xy} \sin(2x) \Rightarrow$
 $f_x(x, y) = e^{xy} [y \sin^2 x + \sin(2x)]$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ και $f_{xx}(x, y) = (f_x(x, y))_x \Rightarrow$
 $f_{xx}(x, y) = ye^{xy} [y \sin^2 x + \sin(2x)] + e^{xy} [y \sin(2x) + 2 \cos(2x)] \Rightarrow$
 $f_{xx}(x, y) = e^{xy} [y^2 \sin^2 x + 2y \sin(2x) + 2 \cos(2x)] = e^{xy} [(y \sin x + 2 \cos x)^2 - 2]$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, διότι
 $y^2 \sin^2 x + 2y \sin(2x) + 2 \cos(2x) = y^2 \sin^2 x + 4y \sin x \cos x + 4 \cos^2 x + 2(2 \cos^2 x - 1) - 4 \cos^2 x \Rightarrow$
 $y^2 \sin^2 x + 2y \sin(2x) + 2 \cos(2x) = (y \sin x + 2 \cos x)^2 - 2$
Αντίστοιχα, $f_y(x, y) = xe^{xy} \sin^2 x$ και $f_{yy}(x, y) = x^2 e^{xy} \sin^2 x = e^{xy} (x \sin x)^2$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

(ii) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x, y) = (x^2 + y^3) \ln(1 + y^2) \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ ως άθροισμα, γινόμενο και σύνθεση
στοιχειωδών συναρτήσεων με $f_x(x, y) = 2x \ln(1 + y^2)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$f_{xx}(x, y) = 2 \ln(1 + y^2), (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ και } f_y(x, y) = 3y^2 \ln(1 + y^2) + (x^2 + y^3) \frac{2y}{1 + y^2}, (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

$$f_{yy}(x, y) = 6y \ln(1 + y^2) + 3y^2 \frac{2y}{1 + y^2} + 3y^2 \frac{2y}{1 + y^2} - (x^2 + y^3) \frac{2(1 + y^2) - 4y^2}{(1 + y^2)^2} \Rightarrow$$

$$f_{yy}(x, y) = 6y \ln(1 + y^2) + \frac{12y^3}{1 + y^2} - 2(x^2 + y^3) \frac{1 - y^2}{(1 + y^2)^2} \Rightarrow$$

$$f_{yy}(x, y) = 6y \ln(1 + y^2) + 2 \cdot \frac{6y^3(1 + y^2) - (x^2 + y^3)(1 - y^2)}{(1 + y^2)^2} \Rightarrow$$

$$f_{yy}(x, y) = 2 \left[3y \ln(1 + y^2) + \frac{6y^3 + 6y^5 - x^2 + x^2 y^2 - y^3 + y^5}{(1 + y^2)^2} \right] \Rightarrow$$

$$f_{yy}(x, y) = 2 \left[3y \ln(1 + y^2) + \frac{7y^5 + 5y^3 + x^2(y^2 - 1)}{(1 + y^2)^2} \right], (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Άσκηση 4

(a) Υπολογίστε τις f_{zx} των συναρτήσεων :

(i) $f(x, y, z) = \sin(xy)\cos(z^2)$

(ii) $f(x, y, z) = x^{y+z}$

(b) Υπολογίστε τις f_{yx} και την f_{zz} των συναρτήσεων :

(iii) $f(x, y, z) = z^2 \arctan(xy)$

(iv) $f(x, y, z) = ze^{x+y+z}$

Λύση

(i) $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x, y, z) = \sin(xy)\cos(z^2) \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ με $f_x(x, y, z) = y \cos(xy)\cos(z^2) \implies$
 $f_{zx}(x, y, z) = (f_x(x, y, z))_z = y \cos(xy) \left[-2z \sin(z^2) \right] = -2yz \cos(xy)\sin(z^2), (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

(ii) $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x, y, z) = x^{y+z} = e^{\ln x^{y+z}} = e^{(y+z)\ln x} \in C^\infty(D), D = (0, \infty) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Τότε
 $f_x(x, y, z) = (y+z)x^{y+z-1}$. Ομοίως με τον ισοδύναμο τύπο για την f παίρνουμε :

$$f_x(x, y) = \frac{y+z}{x} e^{(y+z)\ln x} \implies f_x(x, y) = (y+z) \frac{x^{y+z}}{x} = (y+z)x^{y+z-1}. \text{ Τότε}$$

$$f_{zx}(x, y, z) = x^{y+z-1} + (y+z)x^{y+z-1} \ln x \implies f_{zx}(x, y, z) = x^{y+z-1} [1 + (y+z)\ln x], x > 0.$$

Ομοίως, $f_{zx}(x, y, z) = \frac{1}{x} e^{(y+z)\ln x} + \frac{y+z}{x} e^{(y+z)\ln x} \ln x \implies f_{zx}(x, y, z) = \frac{x^{y+z}}{x} + \frac{y+z}{x} x^{y+z} \ln x \implies$

$$f_{zx}(x, y, z) = [(y+z)\ln x + 1]x^{y+z-1}, x > 0$$

(iii) $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x, y, z) = z^2 \arctan(xy) \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$. Τότε

$$f_x(x, y, z) = \frac{yz^2}{1 + (xy)^2}, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \implies f_{yx}(x, y,) = \frac{z^2(1 + x^2 y^2) - yz^2(2x^2 y)}{(1 + x^2 y^2)^2} \implies$$

$$f_{yx}(x, y,) = \frac{z^2 + x^2 y^2 z^2 - 2x^2 y^2 z^2}{(1 + x^2 y^2)^2} = \frac{z^2(1 - x^2 y^2)}{(1 + x^2 y^2)^2}, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

$$f_z(x, y, z) = 2z \arctan(xy), (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \implies f_{zz}(x, y, z) = 2 \arctan(xy), (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

(iv) $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x, y, z) = ze^{x+y+z} \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$. Τότε

$$f_x(x, y, z) = ze^{x+y+z}, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \implies f_{yx}(x, y,) = ze^{x+y+z}, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

$$f_z(x, y, z) = (z+1)e^{x+y+z}, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \implies f_{zz}(x, y, z) = (z+2)e^{x+y+z}, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

Άσκηση 5

Εξετάστε αν είναι διαφορίσιμη στο σημείο $(0, 0)$ η συνάρτηση

$$\vec{f}(x, y) = \begin{cases} \left(\frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{xy^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right), & (x, y) \neq (0, 0) \\ (0, 0), & (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Λύση

$\vec{f}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ διαφορίσιμη στο $(0,0)$ αν και μόνο αν οι $P, Q: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$P(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}, \quad Q(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad \text{διαφορίσιμες στο } (0, 0).$$

(Έλεγχος συνέχειας)

Έστω P, Q διαφορίσιμες στο $(0,0) \implies P, Q$ συνεχείς στο $(0,0)$, το οποίο ισχύει:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} P(x, y) = 0 = P(0, 0) = Q(0, 0) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} Q(x, y), \text{ ε διότι}$$

$$\left| \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| = \frac{|x||y|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq \frac{\sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \|(x, y)\|$$

$$\left| \frac{xy^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| = \frac{|x|y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} (x^2 + y^2) = \|(x, y)\|^2.$$

$$\text{Για τις μερικές παραγώγους ισχύει: } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{P(h, 0) - P(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0 \in \mathbb{R} \implies P_x(0, 0) = 0$$

$$\text{και } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{P(0, h) - P(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0 \in \mathbb{R} \implies P_y(0, 0) = 0. \text{ Όμως, παρατηρούμε ότι:}$$

$$\lim_{\vec{h} \rightarrow \vec{0}} \left(\frac{P(\vec{h}) - P(\vec{0}) - \vec{\nabla} P(\vec{0}) \cdot \vec{h}}{\|\vec{h}\|} \right) = \lim_{\vec{h} \rightarrow \vec{0}} \left(\frac{\frac{h_1 h_2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \right) = \lim_{\vec{h} \rightarrow \vec{0}} \left(\frac{h_1 h_2}{h_1^2 + h_2^2} \right) \text{ δεν ορίζεται, διότι}$$

$$\text{αν } g(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}, \quad (x, y) \neq (0, 0) \text{ για } \vec{a}_n = \left(0, \frac{1}{n} \right) \neq \vec{0}, \quad \lim \vec{a}_n = \vec{0}, \quad f(\vec{a}_n) = 0 \rightarrow 0 \implies a = 0,$$

$$\text{ενώ για } \vec{b}_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right) \neq \vec{0} \text{ με } \lim \vec{b}_n = \vec{0}, \quad g(\vec{b}_n) = \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2}} = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2} \implies a = \frac{1}{2}, \text{ το οποίο είναι}$$

άτοπο. Άρα η P δεν είναι διαφορίσιμη στο $(0,0) \implies$ η $\vec{f}$ δεν είναι διαφορίσιμη στο $(0,0)$.

$$\text{Παρατηρούμε ότι για την } Q \text{ ισχύει: } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{Q(h, 0) - Q(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0 \in \mathbb{R} \implies Q_x(0, 0) = 0$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{Q(0, h) - Q(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0 \in \mathbb{R} \implies Q_y(0, 0) = 0$$

$$\lim_{\vec{h} \rightarrow \vec{0}} \left(\frac{Q(\vec{h}) - Q(\vec{0}) - \vec{\nabla} Q(\vec{0}) \cdot \vec{h}}{\|\vec{h}\|} \right) = \lim_{\vec{h} \rightarrow \vec{0}} \left(\frac{\frac{h_1 h_2^2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \right) = \lim_{\vec{h} \rightarrow \vec{0}} \left(\frac{h_1 h_2^2}{h_1^2 + h_2^2} \right) = 0$$

$$\left| \frac{h_1 h_2^2}{h_1^2 + h_2^2} \right| = \frac{|h_1| h_2^2}{h_1^2 + h_2^2} \leq \sqrt{h_1^2 + h_2^2} \frac{h_1^2 + h_2^2}{h_1^2 + h_2^2} = \|(h_1, h_2)\|. \text{ Η } Q \text{ είναι διαφορίσιμη στο } (0,0). \text{ Όμως,}$$

δεν έχει σημασία για την διαφορισιμότητα της $\vec{f}$, εφόσον η P δεν είναι διαφορίσιμη.

Άσκηση 6

Να βρεθεί η κατευθυνόμενη παράγωγος της συνάρτησης $f(x, y, z) = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$ κατά την κατεύθυνση

$\vec{a} = (1, 2, -1)$ στο σημείο (x_0, y_0, z_0) .

Λύση

$f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : xyz \neq 0 \right\}$ με $f(x, y, z) = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} \in C(D)$ ως άθροισμα

ρητών συναρτήσεων των x, y, z . (Παρατηρούμε ότι $f(x, y, z) = f(z, x, y) = f(y, z, x)$, διότι

$$f(z, x, y) = \frac{z}{x} + \frac{x}{y} + \frac{y}{z}, \quad f(y, z, x) = \frac{y}{z} + \frac{z}{x} + \frac{x}{y}, \quad \text{τότε αρκεί να υπολογίσουμε μία μερική}$$

παράγωγο και οι υπόλοιπες προκύπτουν με κυκλική μετάθεση των μεταβλητών

$$x \rightarrow y \rightarrow z). \quad f_x(x, y, z) = \frac{1}{y} - \frac{z}{x^2}, \quad f_y(x, y, z) = \frac{1}{z} - \frac{x}{y^2}, \quad f_z(x, y, z) = \frac{1}{x} - \frac{y}{z^2}, \quad (x, y, z) \in D$$

$$f_x, f_y, f_z \in C(D) \implies f \in C^1(D) \implies f \text{ διαφορίσιμη με } df(x, y, z) = \vec{\nabla} f(x, y, z)$$

$$\vec{\nabla} f(x, y, z) = \left(\frac{1}{y} - \frac{z}{x^2}, \frac{1}{z} - \frac{x}{y^2}, \frac{1}{x} - \frac{y}{z^2} \right) = \left(\frac{x^2 - yz}{yx^2}, \frac{y^2 - zx}{zy^2}, \frac{z^2 - xy}{xz^2} \right), \quad (x, y, z) \in D$$

$$f_{\hat{a}}(\vec{r}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\vec{r} + t\hat{a}) - f(\vec{r})}{t} \implies f_{\hat{a}}(\vec{r}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{df(\vec{r}) \cdot (t\hat{a})}{t} = \vec{\nabla} f(\vec{r}) \cdot \frac{\vec{a}}{||\vec{a}||} \implies$$

$$f_{\hat{a}}(\vec{r}) = \left(\frac{1}{y_0} - \frac{z_0}{x_0^2}, \frac{1}{z_0} - \frac{x_0}{y_0^2}, \frac{1}{x_0} - \frac{y_0}{z_0^2} \right) \cdot \frac{(1, 2, -1)}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}} \left(\frac{1}{y_0} - \frac{z_0}{x_0^2} + \frac{2}{z_0} - \frac{2x_0}{y_0^2} - \frac{1}{x_0} + \frac{y_0}{z_0^2} \right) \implies$$

$$f_{\hat{a}}(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{6}} \left(\frac{x_0 z_0 + 2x_0 y_0 - y_0 z_0}{x_0 y_0 z_0} + \frac{-y_0^2 z_0^3 - 2x_0^3 z_0^2 + x_0^2 z_0^3}{x_0^2 y_0^2 z_0^2} \right) \implies$$

$$f_{\hat{a}}(\vec{r}) = \frac{x_0^2 y_0 z_0^2 + 2x_0^2 y_0^2 z_0 - x_0 y_0^2 z_0^2 - y_0^2 z_0^3 - 2x_0^3 z_0^2 + x_0^2 z_0^3}{(x_0 y_0 z_0)^2 \sqrt{6}}$$

Άσκηση 7

Βρείτε την μέγιστη και ελάχιστη τιμή της κατευθυνομενης παραγώγου $f_{\vec{u}}(1, 2, 0)$ της συνάρτησης

$f(x, y, z) = x^2 z + y e^z + x z^3$ και την κατεύθυνση στην οποία λαμβάνονται αυτές οι τιμές.

Λύση

$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x, y, z) = x^2 z + y e^z + x z^3 \in C(\mathbb{R}^3)$ ως γινόμενο στοιχειδών συναρτήσεων με

$$f_x(x, y, z) = 2xz + z^3, \quad f_y(x, y, z) = e^z, \quad f_z(x, y, z) = x^2 + y e^z + 3xz^2, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

$f_x, f_y, f_z \in C(\mathbb{R}^3) \implies f \in C^1(\mathbb{R}^3) \implies f$ διαφορίσιμη με $df(x, y, z) = \vec{\nabla} f(x, y, z)$ και

$$\vec{\nabla} f(x, y, z) = (2xz + z^3, e^z, x^2 + y e^z + 3xz^2). \quad \text{Τότε } f_{\vec{u}}(\vec{r}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\vec{r} + t\hat{u}) - f(\vec{r})}{t} \implies$$

$$f_{\vec{u}}(\vec{r}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\vec{r} + t\hat{u}) - f(\vec{r}) - df(\vec{r}) \cdot (t\hat{u}) + df(\vec{r}) \cdot (t\hat{u})}{t} \implies$$

$$f_{\vec{u}}(\vec{r}) = \lim_{t \rightarrow 0} \left[\frac{f(\vec{r} + t\hat{u}) - f(\vec{r}) - df(\vec{r}) \cdot (t\hat{u})}{t} + \frac{df(\vec{r}) \cdot (t\hat{u})}{t} \right] \text{ και}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left[\frac{f(\vec{r} + t\hat{u}) - f(\vec{r}) - df(\vec{r}) \cdot (t\hat{u})}{t} \right] = \lim_{\vec{h} \rightarrow \vec{0}} \left[\frac{f(\vec{r} + \vec{h}) - f(\vec{r}) - df(\vec{r}) \cdot \vec{h}}{t} \right] = 0$$

$$f_{\vec{u}}(\vec{r}) = \lim_{t \rightarrow 0} \left[\frac{df(\vec{r}) \cdot (t\hat{u})}{t} \right] = \lim_{t \rightarrow 0} [df(\vec{r}) \cdot \hat{u}] = [\vec{\nabla} f(\vec{r})] \cdot \hat{u}. \quad \text{Τότε:}$$

$$|f_{\vec{u}}(1, 2, 0)| = |\vec{\nabla} f(1, 2, 0) \cdot \hat{u}| \leq ||(0, 1, 3)|| \text{ (ανισότητα Cauchy - Schwarz)} \implies$$

$$-\sqrt{10} \leq f_u^{\rightarrow}(1, 2, 0) \leq \sqrt{10} \text{ με } f_u^{\rightarrow}(1, 2, 0) = \max\{f_u^{\rightarrow}(1, 2, 0)\} = \sqrt{10} \text{ για } \widehat{u}_1 = \frac{(0, 1, 3)}{\|(0, 1, 3)\|} \Rightarrow$$

$$\widehat{u}_1 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}\right) \text{ κατεύθυνση μέγιστης τιμής κατευθυνόμενης παραγώγου και}$$

$$f_u^{\rightarrow}(1, 2, 0) = \min\{f_u^{\rightarrow}(1, 2, 0)\} = -\sqrt{10} \text{ για } \widehat{u}_2 = -\frac{(0, 1, 3)}{\|(0, 1, 3)\|} \Rightarrow \widehat{u}_2 = \left(0, -\frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$$

κατεύθυνση ελάχιστης τιμής κατευθυνόμενης παραγώγου.

Άσκηση 8

(a) Υπολογίστε την Λαπλασιανή της συνάρτησης $\vec{F}(x, y, z) = (x, y^2z, xz^3)$.

(b) Εξετάστε αν είναι συντηρητικό το πεδίο $\vec{F}(x, y, z) = (2xy, x^2 + ze^y, e^y)$.

Λύση

(a) $\vec{F}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ με $\vec{F}(x, y, z) = (x, y^2z, xz^3) \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ – πεδίο, εφόσον συνιστώσες συναρτήσεις

$P, Q, R: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ με $P(x, y, z) = x$, $Q(x, y, z) = y^2z$, $R(x, y, z) = xz^3$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ ως

πολυνώνυμα των x, y, z .

$$\vec{\Delta F} = (\Delta P, \Delta Q, \Delta R) = (0, 2z, 6xz)$$

$$\Delta P = \vec{\nabla} \cdot \vec{P} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left(\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial P}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = P_{xx} + P_{yy} + P_{zz}$$

Αντίστοιχα $\Delta Q = Q_{xx} + Q_{yy} + Q_{zz}$ και $\Delta R = R_{xx} + R_{yy} + R_{zz}$

$$P_x = 1 \Rightarrow P_{xx} = 0, P_y = 0 = P_z \Rightarrow P_{yy} = P_{zz} = 0$$

$$Q_x = 0 \Rightarrow Q_{xx} = 0, Q_y = 2yz \Rightarrow Q_{yy} = 2z, Q_z = y^2 \Rightarrow Q_{zz} = 0$$

$$R_x = z^3 \Rightarrow R_{xx} = 0, R_y = 0 \Rightarrow R_{yy} = 0, R_z = 3xz^2 \Rightarrow R_{zz} = 6xz$$

$$\Delta P = 0, \Delta Q = 2z, \Delta R = 6xz$$

(b) $\vec{F}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ με $\vec{F}(x, y, z) = (2xy, x^2 + ze^y, e^y) \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ – πεδίο εφόσον συνιστώσες

$P, Q, R: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ με $P(x, y, z) = 2xy$, $Q(x, y, z) = x^2 + ze^y$, $R(x, y, z) = e^y$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$P, Q, R \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ ως στοιχειώδεις συναρτήσεις των x, y, z .

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xy & x^2 + ze^y & e^y \end{vmatrix} = (e^y - e^y)\hat{i} - 0\hat{j} + (2x - 2x)\hat{k} = \vec{0}$$

Θεωρούμε $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$: $f(x, y, z) = \int (2xy)dx + g(y, z)$ με $f_y = Q$, $f_z = R$

$$f(x, y, z) = x^2y + g(y, z) \Rightarrow f_y = x^2 + \frac{\partial g}{\partial y} = x^2 + ze^y \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial y} = ze^y \Rightarrow g(y, z) = \int ze^y dy + h(z) \Rightarrow$$

$$g(y, z) = ze^y + h(z) \Rightarrow f(x, y, z) = x^2y + ze^y + h(z) \Rightarrow e^y + \frac{dh}{dz} = e^y \Rightarrow \frac{dh}{dz} = 0 \Rightarrow h(z) = c \Rightarrow$$

$$f(x, y, z) = x^2y + ze^y + c \text{ με } \vec{\nabla} f = (2xy, x^2 + ze^y, e^y), \text{ δηλαδή } \exists f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \in C^1(\mathbb{R}^3): \vec{F} = \vec{\nabla} f.$$

Άρα το πεδίο $\vec{F}$ είναι συντηρητικό.

ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙ & ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ_ΕΑΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2020

ΔΗΜΗΤΡΗΣ ΠΙΤΣΟΣ_ ΑΡ.ΜΗΤΡΩΟΥ: 1110201900303

11ο μάθημα

Άσκηση 1

Θεωρούμε την $f(x, y) = \begin{cases} \frac{-3xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$. Να δείξετε ότι οι μερικές παράγωγοι υπάρχουν στο

$(0, 0)$ αλλά η f δεν είναι διαφορίσιμη στο $(0, 0)$.

Λύση

(i) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x, y) = \begin{cases} \frac{-3xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ Έστω f διαφορίσιμη. Τότε f

συνεχής. $\forall (x, y) \neq (0, 0): f$ συνεχής ως ρητή συνάρτηση των x, y . Έστω

$\exists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = c \in \mathbb{R}$: λόγω της αρχής της μεταφοράς: $\forall \left(\vec{a}_n\right)_{n \in \mathbb{N}}, \vec{a}_n \neq \vec{0} \forall n \in \mathbb{N}$ με

$\lim_{n \rightarrow \infty} \vec{a}_n = \vec{0}: f\left(\vec{a}_n\right) \rightarrow c$. Για $\vec{a}_n = \left(0, \frac{1}{n}\right) \neq \vec{0}: \lim_{n \rightarrow \infty} \vec{a}_n = \vec{0}, f\left(\vec{a}_n\right) = 0 \rightarrow 0 \implies c = 0$. Όμως, για

$\vec{b}_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \neq \vec{0}: \lim_{n \rightarrow \infty} \vec{b}_n = \vec{0}, f\left(\vec{b}_n\right) = \frac{\frac{-3}{n^2}}{\frac{2}{n^2}} = -\frac{3}{2} \rightarrow -\frac{3}{2} \implies c = -\frac{3}{2} \neq 0$. Άρα $\nexists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$,

Η f παρουσιάζει ασυνέχεια (δεύτερου είδους, ουσιώδης) στο $(0, 0)$, δηλαδή η f δεν είναι συνεχής. Επομένως, η f δεν είναι διαφορίσιμη.

Η f είναι μερικώς παραγωγίσιμη, διότι:

$$f_x = \frac{-3y}{x^2 + y^2} - \frac{2x \cdot (-3xy)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{-3y(x^2 + y^2) + 6x^2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{-3y^3 + 3x^2y}{(x^2 + y^2)^2}, (x, y) \neq (0, 0)$$

$$f_y = \frac{-3x}{x^2 + y^2} - \frac{2y \cdot (-3xy)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{-3x(x^2 + y^2) + 6xy^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{-3x^3 + 3xy^2}{(x^2 + y^2)^2}, (x, y) \neq (0, 0)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0 = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} \implies f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0.$$

Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι $\nexists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f_x(x, y), \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f_y(x, y)$, οι f_x, f_y είναι ασυνεχείς στο $(0, 0)$.

$$\lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0,0)} \frac{f(h_1, h_2) - f(0, 0) - f_x(0, 0)h_1 - f_y(0, 0)h_2}{\|(h_1, h_2)\|} = \lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0,0)} \frac{-3h_1h_2}{\left(h_1^2 + h_2^2\right)^{3/2}} \text{ δεν ορίζεται, διότι}$$

$$\text{για } (0, 0) \neq (h_1, h_2) = \left(\frac{3}{n}, \frac{4}{n}\right) \rightarrow (0, 0): \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-3h_1h_2}{\left(h_1^2 + h_2^2\right)^{3/2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\frac{36}{n^2}}{\left(\frac{25}{n^2}\right)^{3/2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\frac{36}{n^2}}{\left(\frac{25}{n^2}\right)^{3/2}} = -\infty \notin \mathbb{R}.$$

Άρα η f δεν είναι διαφορίσιμη στο $(0, 0)$.

Άσκηση 2

Αν ισχύει η σχέση $x = u^2 - v^2$, $y = uv$ και η $f(x, y) = \frac{y}{x^2}$ να βρεθούν οι μερικές παράγωγοι πρώτης τάξης της f .

Λύση

$x, y: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f: D = \left\{ \mathbb{R}^2 - \{(x, y) : x = 0\} \right\} \rightarrow \mathbb{R}$ διαφορίσιμες ως στοιχειώδεις συναρτήσεις των

u, v και x, y αντίστοιχα. Περιορίζουμε τις x, y στο $x^{-1}(D)$. Τότε $(f \circ \vec{r})(u, v) = f(x(u, v), y(u, v))$

διαφορίσιμη στο $x^{-1}(D) = \left\{ (u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 - v^2 \neq 0 \implies u \neq \pm v \right\}$ ως σύνθεση διαφορίσιμων

συναρτήσεων. Μπορούμε να υπολογίσουμε τις μερικές παραγώγους της f ως προς u, v απευθείας :

$$\left. \begin{array}{l} f(x, y) = \frac{y}{x^2} \\ x(u, v) = u^2 - v^2 \\ y(u, v) = uv \end{array} \right\} \implies f(u, v) = \frac{y(u, v)}{[x(u, v)]^2} = \frac{uv}{(u^2 - v^2)^2} \implies$$
$$f_u = \frac{v(u^2 - v^2)^2 - uv \cdot 2(u^2 - v^2)2u}{(u^2 - v^2)^4} = \frac{u^2v - v^3 - 4u^2v}{(u^2 - v^2)^3} = -\frac{3u^2v + v^3}{(u^2 - v^2)^3}, u \neq \pm v$$
$$f_v = \frac{u(u^2 - v^2)^2 - uv \cdot 2(u^2 - v^2)(-2v)}{(u^2 - v^2)^4} = \frac{u^3 - uv^2 + 4uv^2}{(u^2 - v^2)^3} = \frac{u^3 + 3uv^2}{(u^2 - v^2)^3}, u \neq \pm v$$

είτε με τον κανόνα αλυσίδας :

$$f_u = f_x x_u + f_y y_u = -\frac{2y}{x^3} \cdot 2u + \frac{1}{x^2} \cdot v = \frac{-4yu + xv}{x^3} = \frac{-4uv \cdot u + (u^2 - v^2)v}{(u^2 - v^2)^3} = \frac{-3u^2v - v^3}{(u^2 - v^2)^3}, u \neq \pm v$$
$$f_v = f_x x_v + f_y y_v = -\frac{2y}{x^3} \cdot (-2v) + \frac{1}{x^2} \cdot u = \frac{4yv + xu}{x^3} = \frac{4uv \cdot v + (u^2 - v^2)u}{(u^2 - v^2)^3} = \frac{u^3 + 3uv^2}{(u^2 - v^2)^3}, u \neq \pm v$$

Άσκηση 3

Αν ισχύει η σχέση $x = u^2 + v^2$, $y = \frac{u}{v}$ και η $f(x, y) = 2xy$ να βρεθούν οι μερικές παράγωγοι πρώτης τάξης της f .

Λύση

$f, x: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, y: D = \left\{ \mathbb{R}^2 - \{(u, v) : v \neq 0\} \right\} \rightarrow \mathbb{R}$ διαφορίσιμες ως στοιχειώδεις συναρτήσεις των

x, y και u, v αντίστοιχα. Περιορίζουμε την x στο D . Τότε $(f \circ \vec{r})(u, v) = f(x(u, v), y(u, v))$

διαφορίσιμη στο D ως σύνθεση διαφορίσιμων συναρτήσεων.

$$\left. \begin{array}{l} f(x, y) = 2xy \\ x(u, v) = u^2 + v^2 \\ y(u, v) = \frac{u}{v} \end{array} \right\} \implies f(u, v) = 2x(u, v)y(u, v) = 2(u^2 + v^2) \cdot \frac{u}{v} \implies$$
$$f_u = 4u \cdot \frac{u}{v} + 2 \frac{u^2 + v^2}{v} = \frac{6u^2 + 2v^2}{v}, v \neq 0$$

$$f_v = 4v \cdot \frac{u}{v} + 2(u^2 + v^2) \left(-\frac{u}{v^2} \right) = 2u - \frac{2u^3}{v^2} = \frac{2uv^2 - 2u^3}{v^2}, \quad v \neq 0$$

Αντίστοιχα, με κανόνα αλυσίδας :

$$f_u = f_x x_u + f_y y_u = 2y \cdot (2u) + 2x \cdot \frac{1}{v} = 4 \cdot \frac{u^2}{v} + 2(u^2 + v^2) \frac{1}{v} = \frac{6u^2}{v} + 2v = \frac{6u^2 + 2v^2}{v}, \quad v \neq 0$$

$$f_v = f_x x_v + f_y y_v = 2y \cdot (2v) + 2x \cdot \left(-\frac{u}{v^2} \right) = 4u - 2(u^2 + v^2) \cdot \frac{u}{v^2} = 2u - \frac{2u^3}{v^2} = \frac{2uv^2 - 2u^3}{v^2}, \quad v \neq 0$$

Άσκηση 4

Να βρεθεί η κατευθυνόμενη παράγωγος της συνάρτησης $f(x, y, z) = e^{x^2+y^2+z^2}$ στο σημείο $(-1, 1, 1)$ κατά κατεύθυνση $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$.

Λύση

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f \in C^\infty(\mathbb{R}^3) \quad \text{με} \quad \vec{\nabla} f(x, y, z) = 2e^{x^2+y^2+z^2}(x, y, z) \implies \vec{\nabla} f(-1, 1, 1) = 2e^3(-1, 1, 1)$$

διότι $f_x = 2xe^{x^2+y^2+z^2}$, $f_y = 2ye^{x^2+y^2+z^2}$, $f_z = 2ze^{x^2+y^2+z^2} \in C^1(\mathbb{R}^3)$. Τότε

$$f_{\vec{a}}(-1, 1, 1) = \vec{\nabla} f(-1, 1, 1) \cdot \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} = 2e^3(-1, 1, 1) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, -1) = \frac{2e^3}{\sqrt{3}}(-1 + 1 - 1) = -\frac{2e^3}{\sqrt{3}}$$

$$f\left(-1 - \frac{h}{\sqrt{3}}, 1 + \frac{h}{\sqrt{3}}, 1 + \frac{h}{\sqrt{3}}\right) - f(-1, 1, 1)$$

$$\text{Αναλυτικά: } f_{\vec{a}}(-1, 1, 1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(-1 - \frac{h}{\sqrt{3}}, 1 + \frac{h}{\sqrt{3}}, 1 + \frac{h}{\sqrt{3}}\right) - f(-1, 1, 1)}{h}$$

Όμως, η f είναι διαφορίσιμη. Τότε :

$$\lim_{(h_1, h_2, h_3) \rightarrow (0,0,0)} \frac{f(-1 + h_1, 1 + h_2, 1 + h_3) - f(-1, 1, 1) - \vec{\nabla} f(-1, 1, 1) \cdot (h_1, h_2, h_3)}{h} = 0$$

$$\text{για } (h_1, h_2, h_3) = \left(-\frac{h}{\sqrt{3}}, \frac{h}{\sqrt{3}}, \frac{h}{\sqrt{3}}\right) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0:$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(-1 - \frac{h}{\sqrt{3}}, 1 + \frac{h}{\sqrt{3}}, 1 + \frac{h}{\sqrt{3}}\right) - f(-1, 1, 1) - \vec{\nabla} f(-1, 1, 1) \cdot \left[h\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}\right)\right]}{h} = 0$$

$$\text{Παρατηρούμε ότι } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\vec{\nabla} f(-1, 1, 1) \cdot \left[h\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}\right)\right]}{h} = \vec{\nabla} f(-1, 1, 1) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}\right) \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Τότε } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(-1 - \frac{h}{\sqrt{3}}, 1 + \frac{h}{\sqrt{3}}, 1 + \frac{h}{\sqrt{3}}\right) - f(-1, 1, 1)}{h} = \vec{\nabla} f(-1, 1, 1) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{2e^3}{\sqrt{3}}$$

Άσκηση 5

Να υπολογιστεί ο όγκος που σχηματίζεται από το παραβολοειδές $z = x^2 + y^2$ και το επίπεδο $z = 6$.

Λύση

$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = z = x^2 + y^2 \geq 0$. Η $G_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2\}$ τέμνει το επίπεδο

$z = 6$ κατά τον κύκλο $\left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 6 \\ z = 6 \end{array} \right\}$. Τότε $V(B) = \int \int \int_B dV = \int \int \int_B dV \implies$

$$V(B) = \int_0^{2\pi} \int_0^6 \int_0^{\sqrt{z}} r dr dz d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^6 \left(\frac{r^2}{2} \right)_{r=0}^{r=\sqrt{z}} dz d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^6 \left(\frac{z}{2} \right) dz d\theta = \frac{1}{2} \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \left(\frac{z^2}{2} \right)_0^6 \Rightarrow$$

$$V(B) = \frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot \frac{6^2}{2} = 18\pi$$

Επίσης, μπορεί να υπολογιστεί ως στερεό εκ περιστροφής με την αρχή *Cavalieri* :

$$V(B) = \int_0^6 A(z) dz = \int_0^6 \pi r^2(z) dz = \int_0^6 \pi z dz = \pi \left(\frac{z^2}{2} \right)_0^6 = 18\pi$$

Άσκηση 5

Να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_{\Gamma} y ds$ όπου Γ είναι η καμπύλη με παραμετρικές

εξισώσεις $x(t) = t, y(t) = \sqrt{t}, 2 \leq t \leq 6$.

Λύση

$\vec{r}: [2, 6] \rightarrow \mathbb{R}^2: \vec{r}(t) = (x(t), y(t)) = (t, \sqrt{t}), 2 \leq t \leq 6$, συνεχής, παραγωγίσιμη $\Rightarrow$

$$\vec{r}'(t) = \left(1, \frac{1}{2\sqrt{t}} \right) \Rightarrow \|\vec{r}'(t)\| = \frac{ds}{dt} = \sqrt{1 + \frac{1}{4t}} = \sqrt{\frac{4t+1}{4t}} = \frac{\sqrt{4t+1}}{2\sqrt{t}} \text{ και } f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = y$$

$f \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Τότε ορίζεται η $f \circ \vec{r}: [2, 6] \rightarrow \mathbb{R}$, ο περιορισμός της f επί της καμπύλης $\vec{r}$, συνεχής συνάρτηση ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων, άρα ολοκληρώσιμη στο $[2, 6]$ με

$$\int_{\Gamma} y ds = \int_{\Gamma} (f \circ \vec{r})(t) \cdot \frac{ds}{dt} dt = \int_2^6 (f \circ \vec{r})(t) \cdot \|\vec{r}'(t)\| dt = \int_2^6 \left[y(t) \cdot \frac{ds}{dt} \right] dt \Rightarrow$$

$$\int_{\Gamma} y ds = \int_2^6 \left[\sqrt{t} \cdot \left(\frac{\sqrt{4t+1}}{2\sqrt{t}} \right) \right] dt = \frac{1}{2} \cdot \int_2^6 (\sqrt{4t+1}) dt = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} (4t+1)^{3/2} \right]_2^6 \Rightarrow$$

$$\int_{\Gamma} y ds = \frac{1}{12} (25^{3/2} - 9^{3/2}) = \frac{125 - 27}{12} = \frac{98}{12} = \frac{49}{6}$$