ΑΣΚΗΣΕΙΣ 3ου ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ II

Ανάγνου Κωνσταντίνος

Απρίλιος 2020

Άσκηση 1 :

Να σχεδιαστούν οι ισουψείς καμπύλες της συνάρτησης:

$z = f(x, y) = \sqrt{64 - x^2 - y^2}$.

Λύση :

Αρχικά θα βρούμε το πεδίο ορισμού D_f της συνάρτησης.
Πρέπει

$$\begin{aligned} &64 - x^2 - y^2 \geq 0 \\ &\Rightarrow x^2 + y^2 \leq 64 \end{aligned}$$

Άρα $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 64\}$. Προκειμένου να βρούμε τις ισουψείς καμπύλες πρέπει πρώτα να θεωρήσουμε ένα τυχαιό επίπεδο $z = c$, και να εξετάσουμε την τομή του με τη συναρτησή μας.

$$\begin{aligned} &z = f(x, y) \\ &\Rightarrow c = \sqrt{64 - x^2 - y^2} \\ &\Rightarrow c^2 = 64 - x^2 - y^2 \\ &\Rightarrow x^2 + y^2 = 64 - c^2 \end{aligned}$$

Άρα οι ισουψείς καμπύλες είναι το σύνολο:
$I_c = \{(x, y) \in D_f \subseteq \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 64 - c^2\}$ και παριστάνουν το σύνολο των κύκλων με κέντρο το $O(0, 0)$, και ακτίνα $r = \sqrt{64 - c^2}$.

Οι γραφικες παραστάσεις παρατίθενται στο τέλος του αρχείου.

Άσκηση 2:

Ερώτημα 1:

Να σχεδιαστούν οι ισουψείς καμπύλες της συνάρτησης:

$f(x,y) = 1 - x^2 - \frac{y^2}{R^2}$.

Λύση :

Το πεδίο ορισμού αυτής της συνάρτησης ειναι $D_f = \mathbb{R}^2$.
Ξανά, θεωρούμε ένα τυχαιό επίπεδο $z = c$ και εξετάζουμε την τομή του με τη συναρτησή μας.

$$
\begin{aligned}
&z = f(x,y)\\
&\Rightarrow c = 1 - x^2 - \frac{y^2}{R^2}\\
&\Rightarrow x^2 + \frac{y^2}{R^2} = 1 - c\\
&\Rightarrow \frac{x^2}{1-c} + \frac{y^2}{R^2(1-c)} = 1, c \neq 1
\end{aligned}
$$

Άρα οι ισουψείς καμπύλες είναι το σύνολο:
$I_c = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{1-c} + \frac{y^2}{R^2(1-c)} = 1\}$ και παριστάνουν ενα σύνολο ελλείψεων.

Οι γραφικες παραστάσεις παρατίθενται στο τέλος του αρχείου.

Ερώτημα 2:

Να σχεδιαστούν οι ισουψείς καμπύλες της συνάρτησης:

$f(x,y) = \frac{1-x^2-y^2}{R^2}$

Λύση :

Το πεδίο ορισμού αυτής της συνάρτησης ειναι $D_f = \mathbb{R}^2$.
Ξανά, θεωρούμε ένα τυχαιό επίπεδο $z = c$ και εξετάζουμε την τομή του με τη συναρτησή μας.

$$
\begin{aligned}
&z = f(x,y)\\
&\Rightarrow c = \frac{1-x^2-y^2}{R^2}\\
&\Rightarrow x^2 + y^2 = 1 - cR^2
\end{aligned}
$$

Άρα οι ισουψείς καμπύλες είναι το σύνολο:
$I_c = \{(x,y) \in D_f \subseteq \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1 - cR^2\}$
και παριστάνουν το σύνολο των κύκλων με κέντρο το $O(0,0)$, και ακτίνα $r = \sqrt{1 - c\, R^2}$.

Οι γραφικες παραστάσεις παρατίθενται στο τέλος του αρχείου.

Άσκηση 3:

Εξετάστε αν υπάρχει το όριο:

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \left(y \sin \frac{1}{x}\right)$$

Λύση :

Θεωρούμε την συνάστηση $f(x,y) = y \sin \frac{1}{x}$, με $x \neq 0$, καθώς και τις ακολουθίες $\overrightarrow{a_n} = \left(\frac{1}{2n\pi}, 1\right)$, $\overrightarrow{b_n} = \left(\frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}, 1\right)$.
Και οι δύο αυτές ακολουθίες είναι διαφορετικές του σημείου συσσώρευσης, $\overrightarrow{a_n}, \overrightarrow{b_n} \neq (0,1)$, ενώ συγκλίνουν σε αυτό καθώς $n \to \infty$. Δηλαδή:

$$\overrightarrow{a_n} = \left(\frac{1}{2n\pi}, 1\right) \to (0,1), n \to \infty$$
$$\overrightarrow{b_n} = \left(\frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}, 1\right) \to (0,1), n \to \infty$$

Επίσης ισχύει:

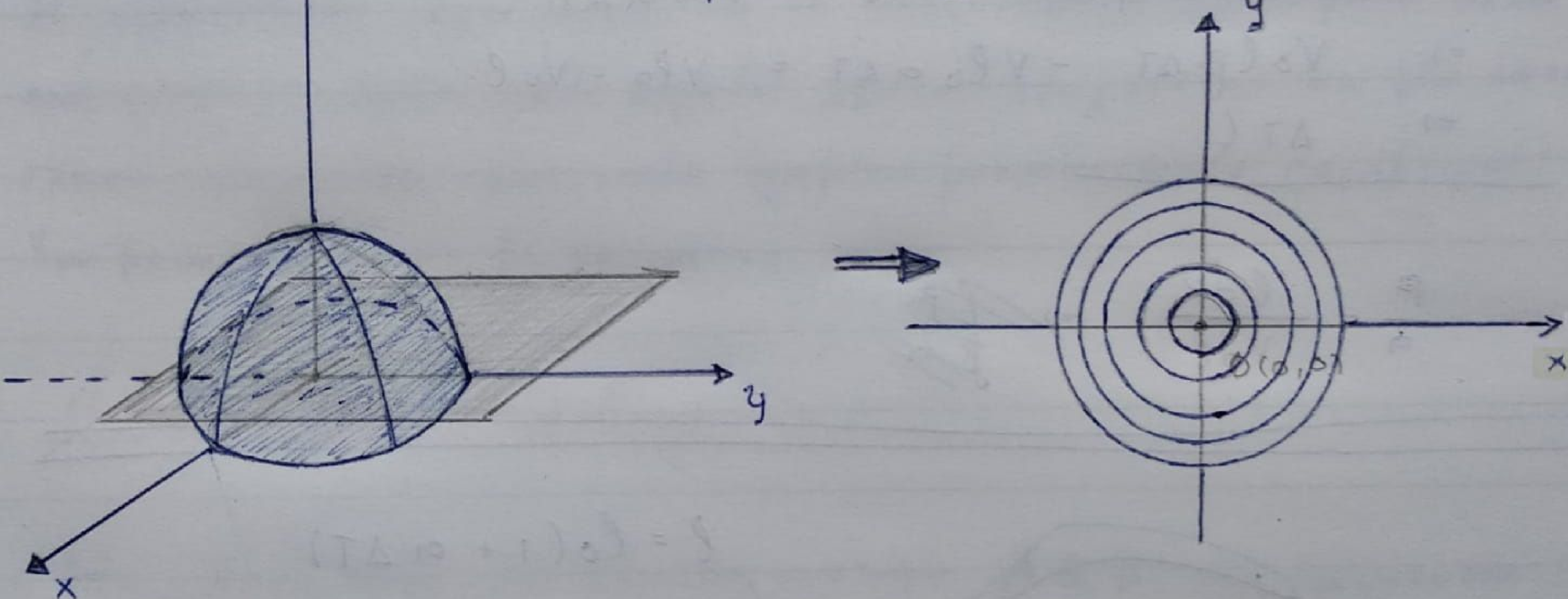
$$f(\overrightarrow{a_n}) = 1 \sin 2n\pi = 0 \to 0$$
$$f(\overrightarrow{b_n}) = 1 \sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 1 \to 1$$

Επομένως με βάση την Αρχή της Μεταφοράς το όριο

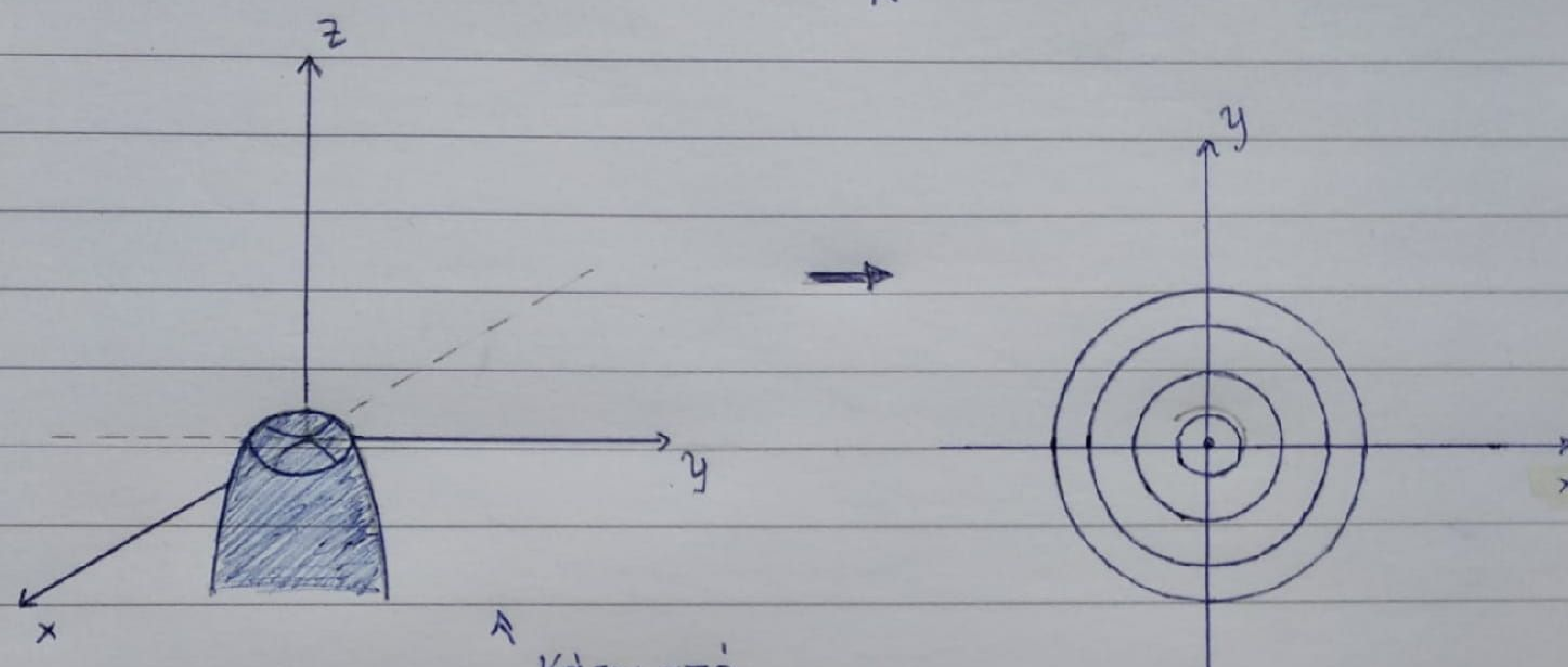
$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \left(y \sin \frac{1}{x}\right),$$

δεν υπάρχει ($\nexists$).

$$f(x,y) = \sqrt{64 - x^2 - y^2}$$

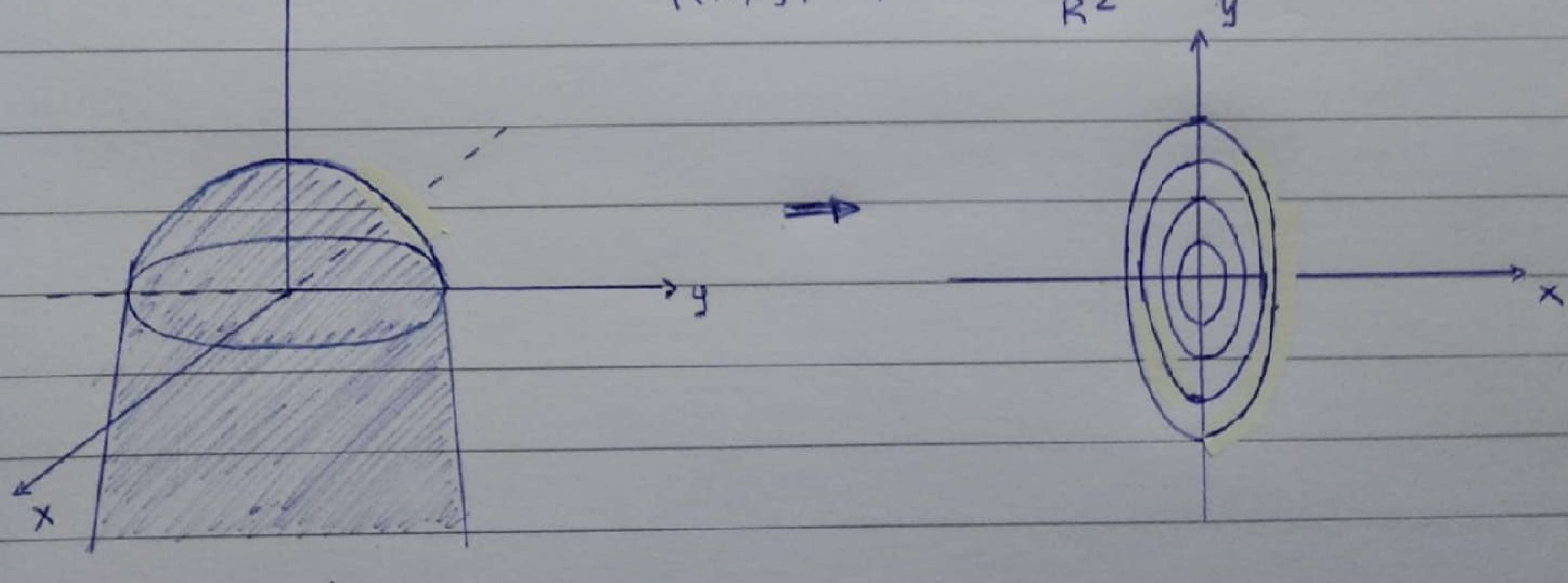


$$f(x,y) = \frac{1 - x^2 - y^2}{R^2}$$



Κάτω από
το επίπεδο $z = 0\ (xy)$

$$f(x,y) = 1 - x^2 - \frac{y^2}{R^2}$$



ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙ - 5ο ΜΑΘΗΜΑ

Άσκηση 1

Υπολογίστε το $D\vec{\mathbf{f}}(1,2,-1)$, όπου $\vec{\mathbf{f}}$ είναι η διανυσματική συνάρτηση τριών μεταβλητών $\vec{\mathbf{f}}(x,y,z) = (x^2+y-z, xyz^2, 2xy-y^2z)$.

Λύση

Ο πίνακας των μερικών παραγώγων της $\vec{\mathbf{f}} = (f_1, f_2, f_3)$ είναι ο εξής :

$$D\vec{\mathbf{f}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \\ \frac{\partial f_2}{\partial 2} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial z} \end{pmatrix}$$

.
Στη συνέχεια θα υπολογίσουμε τις μερικές παραγώγους(στοιχεία του πίνακα) στο σημείο $(1,2,-1)$

- $\frac{\partial f_1}{\partial x}\Big|_{(1,2,-1)} = 2x\big|_{(1,2,-1)} = 2$
- $\frac{\partial f_1}{\partial y}\Big|_{(1,2,-1)} = 1$
- $\frac{\partial f_1}{\partial x}\Big|_{(1,2,-1)} = -1$
- $\frac{\partial f_2}{\partial x}\Big|_{(1,2,-1)} = yz^2\big|_{(1,2,-1)} = 2$
- $\frac{\partial f_2}{\partial y}\Big|_{(1,2,-1)} = xz^2\big|_{(1,2,-1)} = 1$
- $\frac{\partial f_2}{\partial z}\Big|_{(1,2,-1)} = 2xyz\big|_{(1,2,-1)} = -4$
- $\frac{\partial f_3}{\partial x}\Big|_{(1,2,-1)} = 2y\big|_{(1,2,-1)} = 4$
- $\frac{\partial f_3}{\partial y}\Big|_{(1,2,-1)} = 2x-2yz\big|_{(1,2,-1)} = 6$
- $\frac{\partial f_3}{\partial z}\Big|_{(1,2,-1)} = -y^2\big|_{(1,2,-1)} = -4$

Τελικά έχουμε

$$D\vec{\mathbf{f}}(1,2,-1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \\ 4 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Άσκηση 2

Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή της κατευθυνόμενης παραγώγου , της βαθμωτής συνάρτησης $f(x,y,z) = x + \frac{y}{z}$, στο σημείο $\vec{\mathbf{a}} = (4,3,-1)$.

Λύση

Αρχικά θα υπολογίσουμε το ανάδελτα της f στη θέση $\vec{\mathbf{a}}$.

$$\boldsymbol{\nabla} f(x,y,z) = (f_x, f_y, f_z) = (1, \frac{1}{z}, \frac{-y}{z^2})$$

και

$$\boldsymbol{\nabla} f\Big|_{(4,3,-1)} = (1,-1,-3)$$

Η ελάχιστη τιμή της κατευθυνόμενης παραγώγου θα είναι

$$\min\left[\boldsymbol{\nabla} f(4,3,-1)\right] = -\|\boldsymbol{\nabla} f(4,3,-1)\| = -\sqrt{1+(-1)^2+(-3)^2} = -\sqrt{11}.$$

Άσκηση 3

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{αν } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{αν } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Λύση

α) Να βρεθούν οι f_x , f_y.
Για $(x,y) \neq (0,0)$ έχουμε

$$f_x(x,y) = 2x\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - x(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Ομοίως

$$f_y(x,y) = 2y\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - y(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Στο σημείο $(x,y) = (0,0)$ θα υπολογίσουμε τα όρια

$$lim_{h\to 0}\Big(\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}\Big) = lim_{h\to 0}\Big(h\sin\frac{1}{h}\Big) = 0$$

και

$$lim_{h\to 0}\Big(\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}\Big) = lim_{h\to 0}\Big(h\sin\frac{1}{h}\Big) = 0$$

Άρα για $(x,y)=(0,0)$, $f_x=0$ και $f_y=0$

β) Να εξετάσετε την συνέχεια των μερικών παραγώγων στο $(0,0)$ Θα μελετήσουμε τα όρια $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_x$ και $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_y$. Έχουμε

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_x = \lim_{(x,y)\to(0,0)} f_x(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} 2x\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - x(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Κατα μήκος της $x=0$

$$\lim_{y\to0} f_x(0,y) = \lim_{y\to0} 0 = 0$$

Κατά μήκος της $y=0$

$$\lim_{x\to0} f_x(x,0) = \lim_{y\to0}(2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x})$$

το οποίο δεν υπάρχει , άρα δεν υπάρχει και το $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_x$, και η f_x δεν είναι συνεχής στο $(0,0)$. Λόγω της συμμετρίας των μερικών παραγώγων τα ίδια ισχύουν και για την f_y.

γ)Να εξετάσετε αν η f είναι διαφορίσιμη στο $(0,0)$. Προκειμένου να είναι η συνάρτησή μας διαφορίσιμη στο $(0,0)$, θα πρέπει να ισχύει

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)-\nabla f(0,0)\cdot(x,y)}{\|(x,y)-(0,0)\|} = 0$$

Ισχύει

$$\nabla f(0,0)\cdot(x,y) = (0,0)\cdot(x,y) = 0$$

Έχουμε λοιπόν

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)-\nabla f(0,0)\cdot(x,y)}{\|(x,y)-(0,0)\|} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{(x^2+y^2)}\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

Για τον υπολογιμό του ορίου χρησιμοποιούμε τον ορισμό του ορίου.Άρα τελικά η $f(x,y)$ είναι διαφορίσιμη στο $(0,0,)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙ - 7ο ΜΑΘΗΜΑ

Άσκηση 1

Βρείτε τη μάζα μίας λεπτής πλάκας, πυκνότητας $\delta(x,y) = x+1$, που φράσσεται από τις καμπύλες $y = x^2$, $y = -x^2+2x$.

Λύση

Το χωρίο που περιγράφεται είναι το εξής :

$$D = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1,\ x^2 \leq y \leq -x^2+2x\}$$

και είναι X-απλό χωρίο.
Επομένως σύμφωνα με τον ορισμό της, η μάζα θα είναι:

$$m = \int\int_D \delta(x,y)dxdy = \int_0^1 \int_{x^2}^{-x^2+2x} (x+1)dydx = \int_0^1 [y(x+1)]_{x^2}^{-x^2+2x} dx =$$

$$\int_0^1 [(x+1)(-2x^2+2x)]dx = \int_0^1 (-2x^3+2x)dx = \Big[-\frac{1}{2}x^4+x^2\Big]_0^1 \Rightarrow m = \frac{1}{2}$$

Άσκηση 2

Βρείτε το κέντρο μάζας, τις στατικές ροπές, τις ροπές αδράνειας και την πολική ροπή του τριγωνικού χωρίου OAB με κορυφές O(0,0), A(1,0) και B(1,1), πάνω στο οποίο κατανέμεται μάζα αμελητέου πάχους πυκνότητας $\delta(x,y) = x+y^2$.

Λύση

Το χωρίο που περιγράφεται είναι το εξής :

$$D = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq x\}$$

και είναι X-απλό χωρίο.
Επομένως σύμφωνα με τον ορισμό της η μάζα θα είναι:

$$m = \int\int_D \delta(x,y)dxdy = \int_0^1 \int_0^x (x+y^2)dydx = \int_0^1 \Big[yx+\frac{y^3}{3}\Big]_0^x dx =$$

$$m = \int_0^1 \Big(x^2+\frac{x^3}{3}\Big)dx = \Big[\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{12}\Big]_0^1 = \frac{5}{12}$$

Οι στατικές ροπές ως προς τον άξονα Οχ και Οy αντίστοιχα είναι $M_x, \; M_y$

$$M_x = \int\int_D y\delta(x,y)dxdy = \int_0^1\int_0^x (yx+y^3)dydx = \int_0^1 \Big(\frac{x^3}{2}+\frac{x^4}{4}\Big)dx$$

$$M_x = \Big[\frac{x^4}{8}+\frac{x^5}{20}\Big]_0^1 \Rightarrow M_x = \frac{7}{40}$$

και

$$M_y = \int\int_D x\delta(x,y)dxdy = \int_0^1\int_0^x (x^2+xy^2)dydx = \int_0^1 \Big[x^2y+\frac{xy^3}{3}\Big]_0^x dx$$

$$M_y = \int_0^1 \Big(x^3+\frac{x^4}{4}\Big)dx = \Big[\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{20}\Big]_0^1 \Rightarrow M_y = \frac{6}{20}$$

Άρα το κέντρο μάζας είναι $C = \big(\frac{M_y}{m}, \frac{M_x}{m}\big) \Rightarrow C = \big(\frac{72}{100}, \frac{84}{200}\big)$.
Οι ροπές αδράνειας είναι :

$$I_x = \int\int_D y^2(x+y^2)dxdy = \int_0^1\int_0^x (xy^2+y^4)dydx = \int_0^1 \Big[x\frac{y^3}{3}+\frac{y^5}{5}\Big]_0^x dx$$

$$I_x = \int_0^1 \Big(\frac{x^4}{3}+\frac{x^5}{5}\Big)dx = \Big[\frac{x^5}{15}+\frac{x^6}{30}\Big]_0^1 \Rightarrow I_x = \frac{1}{10}$$

και

$$I_y = \int\int_D x^2(x+y^2)dxdy = \int_0^1\int_0^x (x^3+x^2y^2)dydx = \int_0^1 \Big[x^2\frac{y^3}{3}+x^3y\Big]_0^x dx$$

$$I_y = \int_0^1 \Big(x^4+\frac{x^5}{3}\Big)dx = \Big[\frac{x^5}{5}+\frac{x^6}{18}\Big]_0^1 \Rightarrow I_x = \frac{23}{90}$$

Τελικά η πολική ροπή είναι

$$I_o = I_x + I_y = \frac{16}{45} \quad .$$

Άσκηση 3

Να υπολογίσετε το διπλό ολοκλήρωμα $\int\int_B (e^x+x)sinydxdy$, όπου
$B = [1,2]\times[0,\frac{\pi}{2}]$.

Λύση

Ορίζουμε τη συνάρτηση $f : B \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = (e^x + x)siny$.Η f είναι συνεχής στο χωρίο B, το οποίο είναι Απλό.Άρα, με βάση το θώρημα $Fubini$, ισχύει :

$$\int\int_B (e^x+x)sinydxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_1^2 (e^x+x)sinydxdy = \int_1^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (e^x+x)sinydydx =$$

$$\int_1^2 (e^x+x)\Big[-cosy\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \int_1^2 (e^x+x)dx = \Big[e^x + \frac{x^2}{2}\Big]_1^2 = e^2 - e + \frac{3}{2}$$

.

Άσκηση 4

Να υπολογίσετε το διπλό ολοκλήρωμα $\int_0^1\int_x^1 \frac{cosy}{y}dydx$.

Λύση

Το χωρίο πάνω στο οποίο ολοκληρώνουμε την συνάρτησή μας είναι το

$$D = \{(x,y) : 0 \le x \le 1,\ x \le y \le 1\}$$

και είναι απλό (τριγωνικό χωρίο). Επομένως μπορεί να γραφεί και ως

$$D = \{(x,y) : 0 \le y \le 1,\ 0 \le x \le y\}$$

Από το Θεώρημα $Fubini$ έχουμε :

$$\int_0^1\int_x^1 \frac{cosy}{y}dydx = \int_0^1\int_0^y \frac{cosy}{y}dxdy = \int_0^1 \frac{cosy}{y}\Big[x\Big]_0^y dy =$$

$$= \int_0^1 y\frac{cosy}{y}dy = \int_0^1 cosydy = sin1$$

.