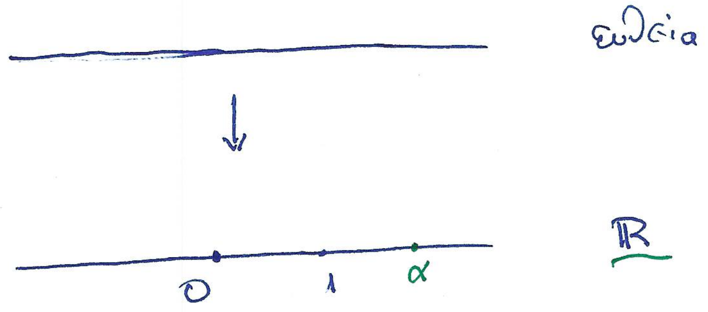
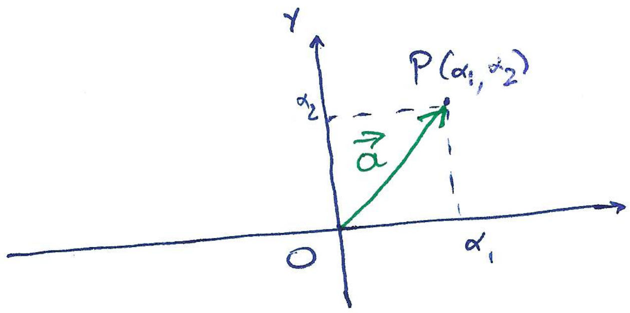
Ευκλείδειος χώρος – $\mathbb{R}^n$.



E_1 $\qquad$ $\mathbb{R}$

αρχή (σύστημα αναφοράς)

Επίπεδο:

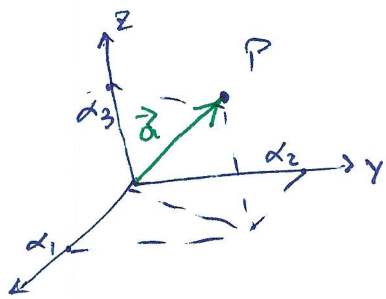


E_2 $\qquad$ $\mathbb{R}^2$

$P \longmapsto (\alpha_1, \alpha_2)$

$\boxed{(O + \text{άξονες}) : \text{Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων}}$

Χώρος:



E_3 $\qquad$ $P \longmapsto (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ $\qquad$ $\mathbb{R}^3$

$\Downarrow$ Γενίκευση (χωρίς πλήρη εποπτεία)

$E_n \to \mathbb{R}^n$

$P \longmapsto (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$

$\mathbb{R}^n : \{ \vec{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n), \quad \alpha_i \in \mathbb{R}, \ i = 1, \dots, n \}$

↳ Διανυσματικός χώρος (πραγματικός)

- $\vec{a} + \vec{b}$

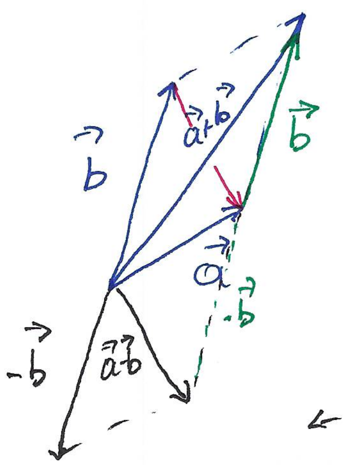
$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$
$$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$$
$$\exists \ \vec{0} : \quad \vec{a} + \vec{0} = \vec{a}, \quad \forall \vec{a}$$
$$\forall \vec{a}, \ \exists \ -\vec{a} : \quad \vec{a} + (-\vec{a}) = 0$$

$$\vec{a} + \vec{b} = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \dots, \alpha_n + \beta_n).$$

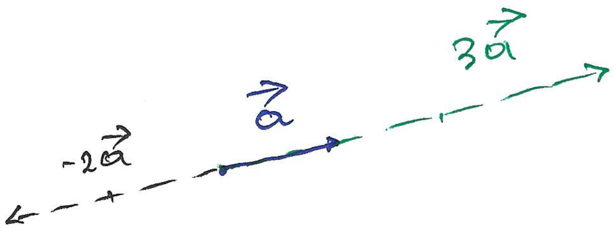
- $\lambda \vec{a}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$

$$\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda \vec{a} + \lambda \vec{b}$$
$$(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{a}$$
$$(\lambda \mu)\vec{a} = \lambda(\mu \vec{a})$$
$$1\vec{a} = \vec{a}$$

$$\lambda \vec{a} = (\lambda \alpha_1, \dots, \lambda \alpha_n).$$



(Γεωμετρική απεικόνιση των πράξεων).



$$\vec{a} = \underbrace{\alpha_1 (1,0,\dots,0) + \alpha_2 (0,1,\dots,0) + \dots + \alpha_n (0,0,\dots,1)}_{\text{βάση του } \mathbb{R}^n}$$

n: μέγιστο πλήθος γραμμικώς ανεξαρτήτων διανυσμάτων. *

* Γραμμική ανεξαρτησία.

$\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_m$ γραμμικώς ανεξάρτητα όταν

$$\lambda_1 \vec{a}_1 + \dots + \lambda_m \vec{a}_m = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_m = 0.$$

- Στον $\mathbb{R}^n$, $(n+1)$ διανύσματα είναι αναγκαστικά γραμμικώς εξαρτημένα.

Μπορούμε να έχουμε ακριβώς n γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα — βάση του χώρου.

Μετρικές σχέσεις.

Απόσταση του P από την αρχή (μήκος του ευθύγραμμου τμήματος OP)

$$OP = \sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2+\dots+\alpha_n^2}$$

(Πυθαγόρειο θεώρημα)

Μέτρο του διανύσματος $\vec{a}$:

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{\alpha_1^2+\dots+\alpha_n^2}$$

(Ευκλείδειο μέτρο)

Χώρος με νόρμα

Απόσταση μεταξύ δύο σημείων

$P=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$, $Q=(\beta_1,\dots,\beta_n)$: $d(P,Q)=\sqrt{(\alpha_1-\beta_1)^2+\dots+(\alpha_n-\beta_n)^2}$

$$\|\vec{a}-\vec{b}\| = d(\vec{a},\vec{b})$$

(Ευκλείδεια απόσταση)

$\vec{a}=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$

$\vec{b}=(\beta_1,\dots,\beta_n)$

Μετρικός χώρος

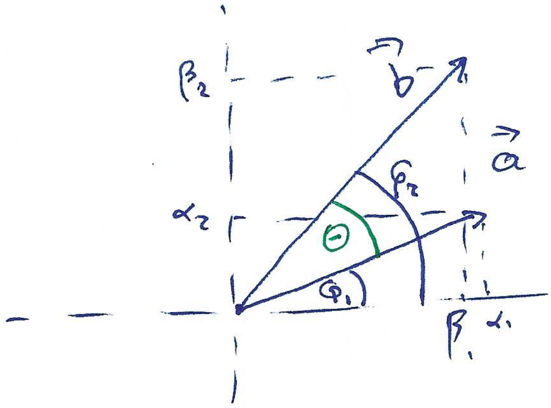
Ιδιότητες $\| \ \|$:

- $\|\vec{a}\| \geq 0$, $\|\vec{a}\|=0 \Leftrightarrow \vec{a}=\vec{0}$.
- $\|\lambda\vec{a}\| = |\lambda|\,\|\vec{a}\|$.
- $\|\vec{a}+\vec{b}\| \leq \|\vec{a}\|+\|\vec{b}\|$.

Ιδιότητες d:

- $d(\vec{a},\vec{b})\geq 0$, $d(\vec{a},\vec{b})=0 \Leftrightarrow \vec{a}=\vec{b}$.
- $d(\vec{a},\vec{b}) = d(\vec{b},\vec{a})$.
- $d(\vec{a},\vec{b}) \leq d(\vec{a},\vec{c})+d(\vec{b},\vec{c})$.

Εύρεση γωνιών — Εσωτερικό γινόμενο.



$\alpha_1 = \|\vec{a}\| \cos\varphi_1 \qquad \beta_1 = \quad \cos\varphi_2$

$\alpha_2 = \|\vec{a}\| \sin\varphi_1 \qquad \beta_2 = \|\vec{b}\| \sin\varphi_2$

$$\cos\Theta = \cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \cos\varphi_2 \cos\varphi_1 + \sin\varphi_2 \sin\varphi_1$$

$$= \frac{\alpha_1 \beta_1}{\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|} + \frac{\alpha_2 \beta_2}{\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|}$$

(Για τις κυρίες γωνίες $0 \le \Theta \le \pi$ το συνημίτονο είναι 1↔1 συνάρτηση, $-1 \le \cos\Theta \le 1$).

Εσωτερικό γινόμενο: (Ευκλείδειο)

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2$$

$$= \|\vec{a}\|\|\vec{b}\| \cos\Theta$$

↓

η κυρία γωνία μεταξύ των δύο διανυσμάτων.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \iff \Theta = \frac{\pi}{2} \qquad (\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}).$$

$$\vec{a} \perp \vec{b}$$

Στον $\mathbb{R}^n$:

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b} = \alpha_1\beta_1 + \cdots + \alpha_n\beta_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\beta_i}$$

Ιδιότητες εσωτερικού γινομένου. (Ευκλείδειου).

- $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$
- $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c}$
- $\vec{a}\cdot(\lambda\vec{b}) = \lambda\,\vec{a}\cdot\vec{b}$
- $\vec{a}\cdot\vec{a} \geq 0, \quad \vec{a}\cdot\vec{a} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = 0.$

$$\Downarrow$$

$$\|\vec{a}\| = (\vec{a}\cdot\vec{a})^{1/2}$$

$$d(\vec{a},\vec{b}) = \|\vec{a}-\vec{b}\| = [(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})]^{1/2}$$

α). Ανισότης Cauchy-Schwarz.

Σε χώρο με θετικά ορισμένο εσωτερικό γινόμενο:

$$|\vec{a}\cdot\vec{b}| \leq \|\vec{a}\|\|\vec{b}\|.$$

Απόδειξη.

$$(\vec{a}+\lambda\vec{b})\cdot(\vec{a}+\lambda\vec{b}) \geq 0 \Rightarrow$$

$$\|\vec{a}\|^2 + 2\lambda\vec{a}\cdot\vec{b} + \lambda^2\|\vec{b}\|^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow \quad (\vec{a}\cdot\vec{b})^2 - \|\vec{a}\|^2\|\vec{b}\|^2 \leq 0$$

(Διακρίνουσα του τριωνύμου ως προς λ)

$$\Rightarrow \quad |\vec{a}\cdot\vec{b}| \leq \|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|.$$

Εάν η διακρίνουσα μηδενίζεται (η Cauchy-Schwarz γίνεται ισότητα) το τριώνυμο έχει μία (διπλή) ρίζα ως προς λ. Επομένως

$$\exists\,\lambda : \quad (\vec{a}+\lambda\vec{b})\cdot(\vec{a}+\lambda\vec{b}) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \vec{a}+\lambda\vec{b} = 0 \rightarrow \vec{a} = -\lambda\vec{b}$$ (τα διανύσματα είναι γραμμικώς εξηρτημένα

η γεωμετρικά τα διανύσματα είναι ομόρροπα ($\lambda<0$)

η αντίρροπα ($\lambda>0$) κείμενα επί ευθείας).

β). Τριγωνική ανισότητα.

$$\|\vec{a}+\vec{b}\|^2 = (\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b}) = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b}$$

$$\leq \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 + 2|\vec{a}\cdot\vec{b}|$$

$$(\vec{a}\cdot\vec{b}\in\mathbb{R} \Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} \leq |\vec{a}\cdot\vec{b}|)$$

(Ανισότητα C-S) $\leq \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 + 2\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|$

$$= (\|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|)^2$$

Επομένως εδείχθη ότι

$$\|\vec{a}+\vec{b}\| \leq \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|.$$

Για να ισχύει ως ισότητα πρέπει:

(i). η C-S να ισχύει ως ισότητα $\Rightarrow \vec{a} = \mu\vec{b}$

οπότε $\vec{a}\cdot\vec{b} = \mu\|\vec{b}\|^2$

(ii). $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}\cdot\vec{b}|$

$$\Rightarrow \mu\|\vec{b}\|^2 = |\mu\|\vec{b}\|^2| = |\mu|\,\|\vec{b}\|^2 \Rightarrow \mu > 0.$$

(Τα διανύσματα να είναι συνευθειακά και ομόρροπα).

- Η ανισότητα C-S δείχνει ότι:

$$-1 \leq \underbrace{\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|}}_{\cos\Theta} \leq 1$$

Θ κυρτή γωνία

αρκεί μόνο το εσωτερικό γινόμενο να είναι θετικά ορισμένο.
(Εδώ έχουμε το Ευκλείδειο).

- Η τριγωνική ανισότητα δείχνει ότι

Εσωτ. γινόμενο $\Rightarrow$ μέτρο, απόσταση.

- $\|\vec{a}\| = 1$: μοναδιαίο (συμβολίζεται με $\hat{a}$).

- $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$: τα διανύσματα είναι κάθετα.

- Η βάση:

$$\underbrace{(1,0,\dots,0)}_{\hat{e}_1}, \quad \underbrace{(0,1,0,\dots,0)}_{\hat{e}_2}, \dots, \quad \underbrace{(0,0,\dots,1)}_{\hat{e}_n}$$

είναι ορθοκανονική: $\hat{e}_i\cdot\hat{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i\neq j \\ 1, & i=j. \end{cases}$

$n=2$ συνήθως συμβολίζονται $\hat{i}, \hat{j}$ ή $\hat{x}, \hat{y}$.

$n=3$ —//— $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ ή $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$

- Προβολή διανύσματος:

$\vec{a} \to \hat{e} = \dfrac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}$, $\quad \vec{b} = \underbrace{\vec{b} - (\vec{b}\cdot\hat{e})\hat{e}}_{\vec{b}_\perp} + \underbrace{(\vec{b}\cdot\hat{e})\hat{e}}_{\vec{b}_\parallel}$, $\quad \vec{b}_\perp\cdot\hat{e} = 0$

Εξωτερικό Γινόμενο.

$n = 3$

$\vec{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$

$\vec{b} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$

$$\underbrace{\vec{a} \times \vec{b}}_{} = (a_2 b_3 - a_3 b_2)\hat{i} + (a_3 b_1 - a_1 b_3)\hat{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\hat{k}$$

Εξωτερικό γινόμενο
των $\vec{a}, \vec{b}$

Το εξωτερικό γινόμενο γράφεται τυπικά ως μία 3×3 ορίζουσα:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Ιδιότητες.

(i). $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

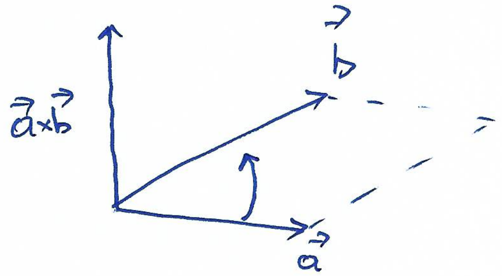
(ii). $\vec{a} \times (\lambda_1 \vec{b}_1 + \lambda_2 \vec{b}_2) = \lambda_1 \vec{a} \times \vec{b}_1 + \lambda_2 \vec{a} \times \vec{b}_2$

(iii). $\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$

(iv). $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) = 0$ (Jacobi)

$\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$: ορθοκανονικό δεξιόστροφο σύστημα

$\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}, \quad \hat{k} \times \hat{i} = \hat{j}, \quad \hat{j} \times \hat{k} = \hat{i}.$



$$\|\vec{a}\times\vec{b}\|^2 = (a_2b_3-a_3b_2)^2+(a_3b_1-a_1b_3)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2$$

$$\begin{aligned} = \; & a_2^2b_3^2 + a_3^2b_2^2 - 2a_2b_3a_3b_2 \\ & + a_1^2b_3^2 + a_1^2b_2^2 - 2a_3b_1a_1b_3 \\ & + a_3^2b_1^2 + a_2^2b_1^2 - 2a_1a_2b_1b_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & b_3^2\|\vec{a}\|^2 - a_3^2b_3^2 - 2a_2b_2a_3b_3 \\ & b_2^2\|\vec{a}\|^2 - a_2^2b_2^2 - 2a_1b_1a_3b_3 \\ & b_1^2\|\vec{a}\|^2 - a_1^2b_1^2 - 2a_1b_1a_2b_2 \quad \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\|\vec{a}\times\vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2\|\vec{b}\|^2 - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2$$

$$= \|\vec{a}\|^2\|\vec{b}\|^2\sin^2\Theta \quad \Rightarrow$$

$$\|\vec{a}\times\vec{b}\| = \|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|\sin\Theta \quad (\sin\Theta\geq 0)$$

Εμβαδόν του παραλληλογράμμου που ορίζουν τα $\vec{a},\vec{b}$.

Μικτό γινόμενο:

$|\vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})|$ Όγκος παραλληλεπιπέδου που ορίζουν τα $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$.