Ασκήσεις.

1. Δίδεται η επιφάνεια σφαίρας ακτίνας a:

$$\vec{\Phi}(\theta,\varphi) = a(\cos\varphi \sin\theta, \sin\varphi \sin\theta, \cos\theta), \quad 0 \le \varphi \le 2\pi, \quad 0 \le \theta \le \pi.$$

Να ευρεθεί το εμβαδόν της.

Να ευρεθεί ο όγκος της περιοχής την οποία φράζει η επιφάνεια αυτή.

2. Δίδεται η επιφάνεια κώνου:

$$\vec{\Phi}(r,\varphi) = r(\cos\varphi \sin\theta_0, \sin\varphi \sin\theta_0, \cos\theta_0).$$

Να ευρεθεί το εμβαδόν της για $0 \le z \le h$.

Να ευρεθεί ο όγκος του της περιοχής την οποία φράζει, μαζί με την αντίστοιχη βάση.

3. Δίδεται η τοροειδής επιφάνεια:

$$\vec{\Phi}(\theta,\varphi) = \big((a+b\sin\theta)\cos\varphi, (a+b\sin\theta)\sin\varphi, b\cos\theta\big),$$

$0 \le \theta, \varphi \le 2\pi$.

Να ευρεθεί το εμβαδόν της.

Να ευρεθεί ο όγκος της περιοχής την οποία φράζει.

4. Δίδεται το διανυσματικό πεδίο $\vec{F} = (z, 2x, 3y)$.

Να επιβεβαιωθεί το θεώρημα Gauss για την πυραμίδα η οποία ορίζεται από τα σημεία $(0,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$, $(1,0,0)$.

Να επιβεβαιωθεί το θεώρημα Stokes επιλέγοντας κατάλληλες καμπύλες και επιφάνειες του ανωτέρω σχήματος.

5. Δίδεται το σταθερό διανυσματικό πεδίο $\vec{B} = (B_x, B_y, B_z)$.

Να ευρεθεί διανυσματικό δυναμικό $\vec{A}$ για το πεδίο $\vec{B}$ ($\vec{\nabla}\times\vec{A} = B$).

Να υπολογισθεί η ροή του $\vec{B}$

(i). από τον δίσκο ακτίνας a, με κέντρο την αρχή και ευρισκόμενο στο επίπεδο $(x-y)$,

(ii). από το ημισφαίριο ακτίνας a με κέντρο την αρχή και $z \geq 0$.

Να επιβεβαιωθεί το θεώρημα Stokes.

6. Τα ερωτήματα της προηγούμενης άσκησης να απαντηθούν για το διανυσματικό πεδίο

$$\vec{F} = \left(\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{-x}{x^2+y^2}, 0\right).$$

7. Δίδονται τα διανυσματικά πεδία

$$\vec{F}_1 = \left(\frac{x}{x^2+y^2+a^2}, \frac{y}{x^2+y^2+a^2}, 0\right),$$

$$\vec{F}_2 = \left(-\frac{y}{x^2+y^2+a^2}, \frac{x}{x^2+y^2+a^2}, 0\right).$$

Να υπολογισθούν η απόκλιση και ο στροβιλισμός τους.

Να επιβεβαιωθούν τα θεωρήματα Stokes και Gauss

σε ημισφαίριο ακτίνας a με κέντρο την αρχή και

σε κύλινδρο ακτίνας a και ύψους h με άξονα τον

άξονα z.

8. Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα

$$\oint_{S(a)} (x^2+y+z)\,ds, \qquad \oint_{S(a)} (x^2+y^2+z)\,ds$$

(όπου $S(a)$ η σφαιρική επιφάνεια ακτίνας a με κέντρο την αρχή) με χρήση του θεωρήματος Gauss και με απ' ευθείας υπολογισμό.

9. Δίδεται το διανυσματικό πεδίο

$$\vec{F} = (2x,\ y^2,\ z^2).$$

Να υπολογισθεί η ροή του από σφαιρικό φλοιό εσωτερικής ακτίνας a και εξωτερικής b $(b>a)$ με κέντρο την αρχή, με απ' ευθείας υπολογισμό και με χρήση του θεωρήματος Gauss.

8 Παράρτημα.

A. Η απόκλιση σε Καρτεσιανές συντεταμένες.
Από την "σχέση ορισμού"

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oint_{S(\Delta V)} \vec{E} \cdot \vec{da}}{\Delta V}$$

για να υπολογισθεί η απόκλιση του ανυσματικού πεδίου σε σημείο P με συντεταγμένες (x, y, z), αρκεί να υπολογισθεί η ροή του από κατάλληλη επιφάνεια η οποία να περικλείει το σημείο. Για τον σκοπό αυτό επιλέγεται παραλληλεπίδο ακμών Δx Δy και Δz, με το σημείο P στο κέντρο του. Η ροή του πεδίου από τις έδρες του είναι:

$$\begin{aligned}
\oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} da &= \int_{S_1} \vec{E} \cdot \hat{n}_1 da + \int_{S_2} \vec{E} \cdot \hat{n_2} da + \int_{S_3} \vec{E} \cdot \hat{n_3} da \\
&+ \int_{S_4} \vec{E} \cdot \hat{n_4} da + \int_{S_5} \vec{E} \cdot \hat{n_5} da + \int_{S_6} \vec{E} \cdot \hat{n_6} da \\
&= \left[E_z(x, y, z + \tfrac{\Delta z}{2}) - E_z(x, y, z - \tfrac{\Delta z}{2})\right] \Delta x \, \Delta y \\
&+ \left[E_y(x, y + \tfrac{\Delta y}{2}, z) - E_y(x, y - \tfrac{\Delta y}{2}, z)\right] \Delta x \, \Delta z \\
&+ \left[E_x(x + \tfrac{\Delta x}{2}, y, z) - E_x(x - \tfrac{\Delta y}{2}, y, z)\right] \Delta x \, \Delta z.
\end{aligned}$$

Αναπτύσσοντας τις τιμές των συνιστωσών του πεδίου γύρω από την τιμή τους στο σημείο $(x,\ y,\ z)$, για παράδειγμα:

$$E_z(x, y, z + \frac{\Delta z}{2}) = E_x(x, y, z) + \frac{\Delta z}{2} \frac{\partial E_z}{\partial z} + \frac{(\Delta z)^2}{8} \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} + \cdots,$$

καταλήγουμε ότι:

$$\oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} da = \left[\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} + \cdots\right] \Delta x \, \Delta y \, \Delta z,$$

όπου οι όροι στα αποσιωπητικά περιέχουν τουλάχιστον μία δύναμη του Δx η του Δy η του Δz. Κατά συνέπειαν διαιρώντας με τον όγκο του παραλληλεπιπέδου ($\Delta V = \Delta x \, \Delta y \, \Delta z$) και λαμβάνοντας το όριο με τις τρείς πλευρές να τείνουν στο μηδέν, όλοι αυτοί οι όροι μηδενίζονται και έχουμε:

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}}$$

B. Ο στροβιλισμός σε Καρτεσιανές συντεταμένες.
Από την "σχέση ορισμού"

$$(\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot \hat{n} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\oint_\Gamma \vec{E} \cdot \vec{dl}}{\Delta S}$$

για να υπολογισθεί π.χ. η z συνιστώσα του στροβιλισμού αρκεί να μελετηθεί η ανωτέρω ποσότητα σε κατάλληλη καμπύλη, σε επίπεδο παράλληλο προς το επίπεδο $x-y$, η οποία να διαγράφεται δεξιόστροφα. Για το σκοπό αυτό επιλέγεται παραλληλλόγραμμο πλευρών Δx, Δy τέτοιο ώστε το σημείο P στο οποίο υπολογίζουμε τον στροβιλισμό να ευρίσκεται στο κέντρο του. Η κυκλοφορία του ανυσματικού πεδίου κατά μήκος της κλειστής γραμμής $[ABCD]$ ισούται με :

$$\begin{aligned}\oint_{[ABCD]} \vec{E}\cdot\vec{dl} &= \int_{[AB]} \vec{E}\cdot\vec{dl} + \int_{[BC]} \vec{E}\cdot\vec{dl} + \int_{[CD]} \vec{E}\cdot\vec{dl} + \int_{[DA]} \vec{E}\cdot\vec{dl} \\ &= \quad E_x(x, y-\tfrac{\Delta y}{2}, z)\Delta x + E_y(x+\tfrac{\Delta x}{2}, y, z)\Delta y \\ &- \quad E_x(x, y+\tfrac{\Delta y}{2}, z)\Delta x - E_y(x-\tfrac{\Delta x}{2}, y, z)\Delta y.\end{aligned}$$

Αναπτύσσοντας πάλι τις τιμές των συνιστωσών του πεδίου γύρω από την τιμή τους στο σημείο $(x,\ y,\ z)$, για παράδειγμα:

$$E_x(x, y-\frac{\Delta y}{2}, z) = E_x(x,y,z) - \frac{\Delta y}{2}\frac{\partial E_x}{\partial y} + \frac{(\Delta y)^2}{8}\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \cdots,$$

όπου οι μερικές παράγωγοι υπολογίζονται στο σημείο $(x,\ y,\ z)$, καταλήγουμε στην έκφραση :

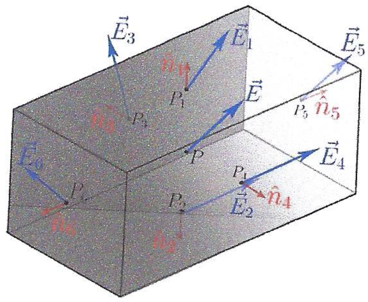
$$\oint_{[ABCD]} \vec{E}\cdot\vec{dl} = \left[\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} + \cdots\right]\Delta x\,\Delta y$$

όπου οι όροι στα αποσιωπητικά περιέχουν τουλάχιστον μία δύναμη του Δx η του Δy. Κατά συνέπειαν διαιρώντας με το εμβαδόν του παραλληλογράμμου ($\Delta S = \Delta x\,\Delta y$) και λαμβάνοντας το όριο με τις δύο πλευρές να τείνουν στο μηδέν, όλοι αυτοί οι όροι μηδενίζονται και έχουμε:

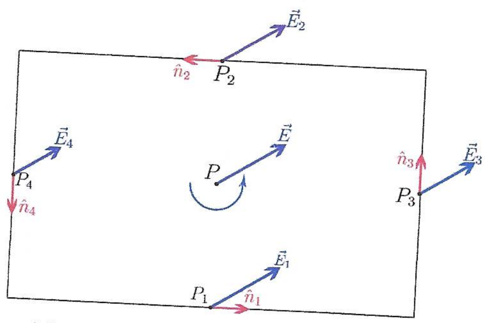
$$(\vec{\nabla}\times\mathbf{\vec{E}})\cdot\hat{\mathbf{k}} = (\vec{\nabla}\times\vec{E})_z = lim_{\Delta S\to 0}\frac{\oint_{[ABCD]} \vec{E}\cdot\vec{dl}}{\Delta S} = \frac{\partial \mathbf{E_y}}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\partial \mathbf{E_x}}{\partial \mathbf{y}}$$

Θεωρώντας αντίστοιχα παραλληλόγραμμα στα επίπεδα $y-z$ και $z-x$ υπολογίζουμε τις x και y συνιστώσες του στροβιλισμού σε καρτεσιανές συντεταγμένες. Τελικά :

$$\boxed{\vec{\nabla}\times\vec{E} = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right)\hat{i} + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right)\hat{j} + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)\hat{k}}$$



Σχήμα 11: Κατάλληλη στοιχειώδης κλειστή επιφάνεια για την σύνδεση της απόκλισης και της ροής διανυσματικού πεδίου.



Σχήμα 12: Κατάλληλη στοιχειώδης κλειστή γραμμή για την σύνδεση του στροβιλισμού με την κυκλοφορία διανυσματικού πεδίου.