Ακρότατα πραγματικών συναρτήσεων.

Εάν $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, ένα σημείο $\vec{r}_0 \in U$ καλείται:

- Τοπικό ελάχιστο της f εάν υπάρχει περιοχή του $\vec{r}_0$, V:

$$\vec{r} \in V \Rightarrow f(\vec{r}) > f(\vec{r}_0)$$

- Τοπικό μέγιστο της f εάν υπάρχει περιοχή V του $\vec{r}_0$:

$$\vec{r} \in V \Rightarrow f(\vec{r}) < f(\vec{r}_0).$$

Σε κάθε περίπτωση το $\vec{r}_0$ καλείται τοπικό ακρότατο.

1. $\vec{r}_0$ τοπικό ακρότατο $\Rightarrow Df(\vec{r}_0) = 0 \quad \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{r}_0) = 0 \right)$.

Η $g(t) = f(\vec{r}_0 + t\vec{h})$ έχει τοπικό ακρότατο στο $t=0 \Rightarrow$

$$\frac{dg}{dt}(0) = 0 \Rightarrow Df(\vec{r}_0)\cdot \vec{h} = 0$$

Επειδή αυτό ισχύει για κάθε $\vec{h} \Rightarrow Df(\vec{r}_0) = 0$.

$$Df(\vec{r}_0)\cdot \vec{h} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{r}_0) h_i \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{r}_0) = 0.$$

$\vec{r}_0 : \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{r}_0) = 0$ κρίσιμο σημείο.

$$\vec{r}_0 \text{ κρίσιμο} \rightarrow \begin{cases} \text{τοπικό μέγιστο} \\ \text{τοπικό ελάχιστο} \\ \text{"σαγματικό"} \end{cases}$$

$$\boxed{\text{Αναζητούμε τα ακρότατα μεταξύ των κρίσιμων σημείων.}}$$

Θεωρούμε το ανάπτυγμα Taylor, δεύτερης τάξης:

$$f(\vec{r}_0+\vec{h}) = f(\vec{r}_0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{r}_0) h_i + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{r}_0) h_i h_j + R_2(\vec{r}_0, \vec{h})$$

Εαν $\vec{r}_0$ κρίσιμο $\Rightarrow$

$$f(\vec{r}_0+\vec{h}) = f(\vec{r}_0) + \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{r}_0) h_i h_j}_{Hf(\vec{r}_0)(\vec{h})} + R_2(\vec{r}_0, \vec{h})$$

Εσσιανή (Hessian) της f στο σημείο $\vec{r}_0$.

- $Hf(\vec{r}_0)(\vec{h}) > 0$ για κάθε $\vec{h}$ $\Rightarrow$ $\vec{r}_0$ τοπικό ελάχιστο.
- $Hf(\vec{r}_0)(\vec{h}) < 0$ για κάθε $\vec{h}$ $\Rightarrow$ $\vec{r}_0$ τοπικό μέγιστο.

Τα ανωτέρω είναι προφανή αρκεί να δειχθεί ότι:

$Hf(\vec{r}_0)(\vec{h}) > 0 \Rightarrow Hf(\vec{r}_0)(\vec{h}) + R_2(\vec{r}_0, \vec{h}) > 0$

για κάποια περιοχή του $\vec{r}_0$

και αντίστοιχα

$Hf(\vec{r}_0)(\vec{h}) < 0 \Rightarrow Hf(\vec{r}_0)(\vec{h}) + R_2(\vec{r}_0, \vec{h}) < 0$

για κάποια περιοχή του $\vec{r}_0$.

$$H: \quad Hf(\vec{r}_0)(\vec{h}) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{r}_0)\, h_i h_j$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, h_i h_j$$

Είναι συνεχής συνάρτηση (τετραγωνική) του $\vec{h}$.

$$Hf(\vec{r}_0)(\vec{h}) = \|\vec{h}\|^2 \underbrace{\left[\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{h_i}{\|\vec{h}\|}\frac{h_j}{\|\vec{h}\|}\right]}_{\text{Συνεχής συνάρτηση στην μοναδιαία σφαίρα}}$$

$$= \|\vec{h}\|^2\, Hf(\vec{r}_0)(\hat{h})$$

↳ μοναδιαίο

Εάν $Hf(\vec{r}_0)(\vec{h}) > 0 \Rightarrow Hf(\vec{r}_0)(\hat{h}) > 0 \Rightarrow Hf(\vec{r}_0)(\hat{h}) > M$

(Συνεχής συνάρτηση σε συμπαγές σύνολο παίρνει ελάχιστη τιμή).

Άρα $Hf(\vec{r}_0)(\vec{h}) > M\|\vec{h}\|^2$.

Γνωρίζουμε από το Θεώρημα Taylor ότι $\dfrac{R_2(\vec{r}_0,\vec{h})}{\|\vec{h}\|^2} \to 0$.

Επομένως για κάθε $M > 0$, υπάρχει $\delta > 0$:

$$\|\vec{h}\| < \delta \Rightarrow \frac{R_2(\vec{r}_0,\vec{h})}{\|\vec{h}\|^2} < M \Rightarrow R_2(\vec{r}_0,\vec{h}) < M\|\vec{h}\|^2.$$

Άρα: $\|\vec{h}\| < \delta$ (ακτίνα σφαίρας με κέντρο το $\vec{r}_0$) $\Rightarrow$

$$Hf(\vec{r}_0)(\vec{h}) + R_2(\vec{r}_0,\vec{h}) > 0$$

$\Rightarrow$ $\vec{r}_0$ τοπικό ελάχιστο.

Ομοίως αποδεικνύεται και για $Hf(\vec{r}_0)(\vec{h}) < 0$.

- Εάν η $Hf(\vec{r}_0)(\vec{h})$ αλλάζει πρόσημο, υπάρχουν κατευθύνσεις στις οποίες η συνάρτηση αυξάνει μετά το $\vec{r}_0$ και κατευθύνσεις στις οποίες η συνάρτηση μειώνεται

$$\Downarrow$$

σαγματικό σημείο.

- Εάν η $Hf(\vec{r}_0)(\vec{h})$ δεν αλλάζει πρόσημο αλλά υπάρχει $\vec{h}$: $Hf(\vec{r}_0)(\vec{h})=0$ $\Rightarrow$ σε αυτή την κατεύθυνση παραμένει (τοπικά) σταθερή αλλά στις κάθετες εμφανίζει τοπικό ακρότατο.

Περίπτωση εκφυλισμού η οποία χρήζει περαιτέρω μελέτης.

$n=2.$

$f(x,y)$,

(x_0,y_0) : κρίσιμο σημείο $\rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=0.$

$$Hf(\vec{r}_0)(\vec{h})=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{r}_0)\,h_i h_j=\frac{1}{2}\vec{h}^T \, \mathbb{H} \, \vec{h}$$

Εσσιανός πίνακας

$$\mathbb{H}=\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\vec{r}_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\vec{r}_0)\\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\vec{r}_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\vec{r}_0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$$

$a_{12}=a_{21}$

Θεωρούμε την τετραγωνική έκφραση:

$$a_{11}h_1^2+2a_{12}h_1h_2+a_{22}h_2^2$$

Πότε έχουμε ακρότατο;

- Έστω $a_{11}\neq 0$

$$a_{11}\left[h_1^2+2a_{12}\frac{1}{a_{11}}h_1h_2+\frac{a_{22}}{a_{11}}h_2^2\right]=$$

$$a_{11}\left[\left(h_{11}+\frac{a_{12}}{a_{11}}h_2\right)^2+\left(\frac{a_{22}}{a_{11}}-\frac{a_{12}^2}{a_{11}^2}\right)h_2^2\right]=$$

$$a_{11}\left[\left(h_{11}+\frac{a_{12}}{a_{11}}h_2\right)^2+\frac{1}{a_{11}^2}\left(a_{11}a_{22}-a_{12}^2\right)h_2^2\right]$$

Για να διατηρεί πρόσημο

(i). $h_2 = 0 \Rightarrow$ η έκφραση θα έχει το πρόσημο του a_{11}

(ii). $h_{11} = -\frac{a_{12}}{a_{11}} h_2 \Rightarrow$ η έκφραση θα έχει το πρόσημο του

γινομένου $\frac{1}{a_{11}}(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)$

Επομένως $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$

Και κατά συνέπεια:

$a_{11} > 0 \rightarrow$ θετικά ορισμένο (τοπικό ελάχιστο),

$a_{11} < 0 \rightarrow$ αρνητικά ορισμένο (τοπικό μέγιστο).

* $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0 \Rightarrow$ $a_{11}, a_{22} \neq 0$ και ομόσημα.

Εάν $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 < 0$

τότε η έκφραση αλλάζει πρόσημο:

$h_2 = 0 \Rightarrow$ ομόσημο του a_{11}

$h_{11} = -\frac{a_{12}}{a_{11}} h_{12}^2 \Rightarrow$ ετερόσημο του a_{11}

$\Bigg\} \Rightarrow$ σαγματικό σημείο.

$a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0 \rightarrow$ χρειάζεται περαιτέρω μελέτη.

Τα ανωτέρω αποτελέσματα εξάγονται απλούστερα θεωρώντας την έκφραση ως τριώνυμο ως προς h_1 ή h_2.

π.χ. όταν η διακρίνουσα $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$ το τριώνυμο διατηρεί το πρόσημο του a_{11}.

Για $n > 2$.

$$\mathbb{H} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad a_{ij} = a_{ji} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{r}_0).$$

Θεωρούμε τους πίνακες "πάνω στη διαγώνιο":

$$\mathbb{H}_1 = a_{11}, \quad \mathbb{H}_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \ldots, \mathbb{H}_k = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix}, \ldots$$

$$\mathbb{H}_n = \mathbb{H}.$$

(i). $\det \mathbb{H}_i > 0 \rightarrow$ τοπικό ελάχιστο

(ii). $\det \mathbb{H}_i = (-1)^i \, |\det \mathbb{H}_i| \rightarrow$ τοπικό μέγιστο.

(εναλλασσόμενα πρόσημα ξεκινώντας με $a_{11} < 0$)

Διαφορετικά: $\det(\mathbb{H} - \lambda \mathbb{I}) = 0 \rightarrow n$ πραγματικές ρίζες λ_i

$\lambda_i > 0, \ \forall i \rightarrow$ τοπικό ελάχιστο

$\lambda_i < 0, \ \forall i \rightarrow$ τοπικό μέγιστο

λ_i και > 0, < 0 σαγματικά σημεία

Εκφυλισμός εάν κάποια $\lambda_i = 0$ και μεγάλη για τα υπόλοιπα.

Ακρότατα υπό συνθήκες.

1. Έστω $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Αναζητούμε ακρότατο της f επί της επιφανείας M η οποία ορίζεται από την σχέση

$$g(\vec{r}) = 0.$$

$$\vec{r} \in M \Rightarrow g(\vec{r}) = 0.$$

Έστω $\{\vec{\sigma}(t)\}$ το σύνολο καμπυλών επί της M οι οποίες διέρχονται από ένα σημείο $\vec{r}_0 \in M$: $\vec{\sigma}(0) = \vec{r}_0$.

Εάν το $\vec{r}_0$ είναι ακρότατο της f επί της M, τότε: η συνάρτηση

$$F(t) = f(\vec{\sigma}(t))$$

θα έχει ακρότατο στο σημείο $t = 0$.

Επομένως:

$$\frac{dF}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} f \cdot \underbrace{\frac{d\vec{\sigma}}{dt}} = 0$$

διάνυσμα εφαπτόμενο στην M στο σημείο $\vec{r}_0$.

Άρα τα ακρότατα θα αναζητηθούν στα σημεία για τα οποία ισχύει:

$$\vec{\nabla} f \cdot \vec{V} = 0$$

↳ εφαπτόμενο διάνυσμα

Το εφαπτόμενο επίπεδο της M ορίζεται από την σχέση:

$$\vec{\nabla} g \cdot \vec{v} = 0$$

$$(\vec{\nabla} g \neq 0)$$

Εφ' όσον $\vec{\nabla} f$, $\vec{\nabla} g$ είναι κάθετα στο ίδιο επίπεδο και $n=3$ $\Big\} \Rightarrow$

τα διανύσματα είναι γραμμικώς εξαρτημένα $\Rightarrow$

$$\vec{\nabla} f + \lambda \vec{\nabla} g = 0.$$

Ισοδύναμα:

Θεωρούμε την συνάρτηση

$$G(\vec{r}, \lambda) = f(\vec{r}) + \lambda g(\vec{r})$$

και προσδιορίζουμε τα κρίσιμα σημεία επί της M από τις σχέσεις:

$$\frac{\partial G}{\partial x_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x_i} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x_i} = 0$$

$$\frac{\partial G}{\partial \lambda} = 0 \quad \Rightarrow \quad g(\vec{r}) = 0$$ (καθορίζει την επιφάνεια).

λ: πολλαπλασιαστής Lagrange.

2. $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ και αναζητούμε ακρότατο επί επιφανείας η οποία καθορίζεται από τις σχέσεις:

$$g_1(\vec{r}) = 0, \ \dots, \ g_m(\vec{r}) = 0.$$

- Θεωρούμε ότι οι ανωτέρω σχέσεις είναι ανεξάρτητες, δηλαδή ο πίνακας $\left[\frac{\partial g_i}{\partial x_j}\right]$, ο οποίος είναι $m \times n$ $(m<n)$ τουλάχιστον μία ορίζουσα ενός $m \times m$ υποπίνακα μη μηδενική (διαφορετικά θα περιορισούμε σε λιγότερες σχέσεις οι οποίες ικανοποιούν την συνθήκη αυτή).

- Σύμφωνα με την προηγούμενη ανάλυση θα αναζητήσουμε τα κρίσιμα σημεία εκεί που ικανοποιούνται ταυτόχρονα οι σχέσεις:

$$\vec{\nabla} f(\vec{r}_0) \cdot \vec{v} = 0$$

$$\vec{\nabla} g_1(\vec{r}_0) \cdot \vec{v} = 0$$

$$\vdots$$

$$\vec{\nabla} g_m(\vec{r}_0) \cdot \vec{v} = 0 \quad (*)$$

Αποδεικνύεται πάλι ότι υπάρχουν $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$:

$$\vec{\nabla} f + \lambda_1 \vec{\nabla} g_1 + \dots + \lambda_m \vec{\nabla} g_m = 0.$$

- Ισοδύναμα θεωρούμε την

$$G(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m) = f + \lambda_1 g_1 + \dots + \lambda_m g_m$$

(λ_i: πολλαπλασιαστές Lagrange)

και αναζητούμε κρίσιμα σημεία ως προς όλες τις μεταβλητές.

* "Απόδειξη."

Για απλότητα θα θεωρήσουμε $m=2$.

$\vec{\nabla} f(\vec{r}_0) = (a_1, a_2, \dots, a_n)$

$\vec{\nabla} g_1(\vec{r}_0) = (b_1, b_2, \dots, b_n)$

$\vec{\nabla} g_2(\vec{r}_0) = (c_1, c_2, \dots, c_n)$

$$\left.\begin{array}{l} a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0 \\ b_1x_1 + \dots + b_nx_n = 0 \\ c_1x_1 + \dots + c_nx_n = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{υπάρχουν } \lambda_1, \lambda_2 : \left\{\begin{array}{l} a_1 + \lambda_1 b_1 + \lambda_2 \quad = 0 \\ a_2 + \lambda_1 b_2 + \lambda_2 c_2 = 0 \\ \vdots \\ a_n + \lambda_1 b_n + \lambda_2 c_n = 0 \end{array}\right.$$

(i). $$\left.\begin{array}{l} a_1 + \lambda_1 b_1 + \lambda_2 c_1 = 0 \\ a_2 + \lambda_1 b_2 + \lambda_2 c_2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{προσδιορίζουμε τα } \lambda_1, \lambda_2$$

Θα δείξουμε ότι με αυτά τα λ_1, λ_2 ικανοποιούνται και οι άλλες εξισώσεις.

π.χ. Θα δείξουμε ότι $a_n + \lambda_1 b_n + \lambda_2 c_n = 0$

(ii). Επιλέγουμε $x_n = -1$, $x_3 = \dots = x_{n-1} = 0$

$$\left.\begin{array}{l} a_1x_1 + a_2x_2 = a_n \\ b_1x_1 + b_2x_2 = b_n \\ c_1x_1 + c_2x_2 = c_n \end{array}\right\} \Rightarrow \text{προσδιορίζουμε τα } x_1, x_2$$

$$a_n + \lambda_1 b_n + \lambda_2 c_n =$$

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \lambda_1(b_1x_1 + b_2x_2) + \lambda_2(c_1x_1 + c_2x_2) =$$

$$(a_1 + \lambda_1 b_1 + \lambda_2 c_1)x_1 + (a_2 + \lambda_1 b_2 + \lambda_2 c_2)x_2 = 0.$$

Κριτήρια για ακρότατα στην περίπτωση μιας συνθήκης.

$f(\vec{r})$

$M: \quad g(\vec{r}) = 0$

$$G(\vec{r},\lambda) = f + \lambda g$$

Σχηματίζουμε την περιφραγμένη Εσσιανή:

$$\overline{\mathbb{H}} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g}{\partial x_n} \\ \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial^2 G}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 G}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 G}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial g}{\partial x_n} & \frac{\partial^2 G}{\partial x_1 \partial x_n} & \cdots & \cdots & \frac{\partial^2 G}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

- $\det \overline{\mathbb{H}}_i < 0 \,, \qquad i \geq 3 \quad \Rightarrow$ τοπικό ελάχιστο

- $\det \overline{\mathbb{H}}_i = (-1)^{i-1} \left| \det \overline{\mathbb{H}}_i \right| \quad \Rightarrow$ τοπικό μέγιστο.

  εναλλάξ πρόσημα
  με θετικό το πρώτο $(i=3)$

Μία απλή αιτιολόγηση

στην περίπτωση δύο μεταβλητών: $f(x,y)$

και αναζητάμε ακρότατο επί γραμμής η οποία είναι

γράφημα: $\quad y = \sigma(x) \quad \Rightarrow \quad g(x,y) = y - \sigma(x).$

$f(x,y)$ επί της γραμμής γίνεται συνάρτηση μίας μεταβλητής:

$$\varphi(x) = f(x, \sigma(x)).$$

• Κρίσιμο σημείο: $\quad \dfrac{d\varphi}{dx} = 0 \Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{d\sigma}{dx} = 0$

• $$\frac{d^2\varphi}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{d\sigma}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{d^2\sigma}{dx^2}$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\frac{d\sigma}{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\frac{d\sigma}{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{d\sigma}{dx}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{d^2\sigma}{dx^2}$$

$$g(x,y) = 0 \quad \Rightarrow \quad g(x, \sigma(x)) = 0 \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y}\frac{d\sigma}{dx} = 0$$

και: $$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}\frac{d\sigma}{dx} + \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}\frac{d\sigma}{dx} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}\left(\frac{d\sigma}{dx}\right)^2 + \frac{\partial g}{\partial y}\frac{d^2\sigma}{dx^2} = 0$$

$$\frac{d\sigma}{dx} = -\frac{\frac{\partial g}{\partial x}}{\frac{\partial g}{\partial y}}$$

$$\frac{d^2\sigma}{dx^2} = -\frac{1}{\frac{\partial g}{\partial y}}\left[\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}\frac{\frac{\partial g}{\partial x}}{\frac{\partial g}{\partial y}} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}\frac{\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2}{\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2}\right]$$

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = \frac{1}{\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2} \left\{ \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial g}{\partial y}} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \right] \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2 \right.$$

$$-2 \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial g}{\partial y}} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} \right] \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)$$

$$\left. + \left[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial g}{\partial y}} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \right] \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 \right\}$$

Στα κρίσιμα σημεία έχουμε ότι:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x} = 0 \qquad \left(G(x,y) = f + \lambda g \right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial g}{\partial y} = 0$$

Επομένως:

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = \frac{1}{\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2} \left\{ \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2 - 2 \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y} \frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 \right\}$$

$$= - \frac{1}{\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2} \det \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

$$\left(\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial^2 G}{\partial \lambda \partial x}, \ \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial^2 G}{\partial \lambda \partial y} \quad 0 = \frac{\partial^2 G}{\partial \lambda^2} \right)$$

Ασκήσεις.

1. $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x^4$.

2. $f(x,y,z) = x^3 + xz^2 + 3x^2 + y^2 + 2z^2$.

3. $f(x,y) = \frac{1}{xy}$, να ευρεθεί η ελάχιστη απόσταση από την αρχή των αξόνων.

4. $f(x,y) = -\frac{\mu^2}{2}(x^2+y^2) + \frac{\lambda^2}{4}(x^2+y^2)$.

(1, 2, 4 να μελετηθούν ως προς τα κρίσιμα σημεία τους και το είδος αυτών).

5. Να ευρεθεί ο μέγιστος όγκος παραλληλεπιπέδου που εγγράφεται σε σφαίρα ακτίνας a.

6. Να ευρεθούν οι ακρότατες τιμές της $f = x^2 + y^2$ επί της καμπύλης $ax^2 + 2bxy + cy^2 = 1$, $(\alpha, \alpha c - b > 0)$.

7. Να ευρεθεί η μέγιστη τιμή του z στην τομή των $x + y + z = 1$ και $x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$.

8. Να ευρεθεί ο μέγιστος όγκος παραλληλεπιπέδου με επιφάνεια S.

9. Να ευρεθούν τα ακρότατα της $f(x,y)=x^2-y^2$ επί του κύκλου $x^2+y^2=a^2$.

10. Να ευρεθούν τα ακρότατα της $f(x,y)=(x-y)^n$ $(n\geq 1)$ επί του κύκλου $x^2+y^2=1$.