Επιφάνειες στον $\mathbb{R}^3$.

- Γεωμετρική περιγραφή.
- Αναλυτική περιγραφή.

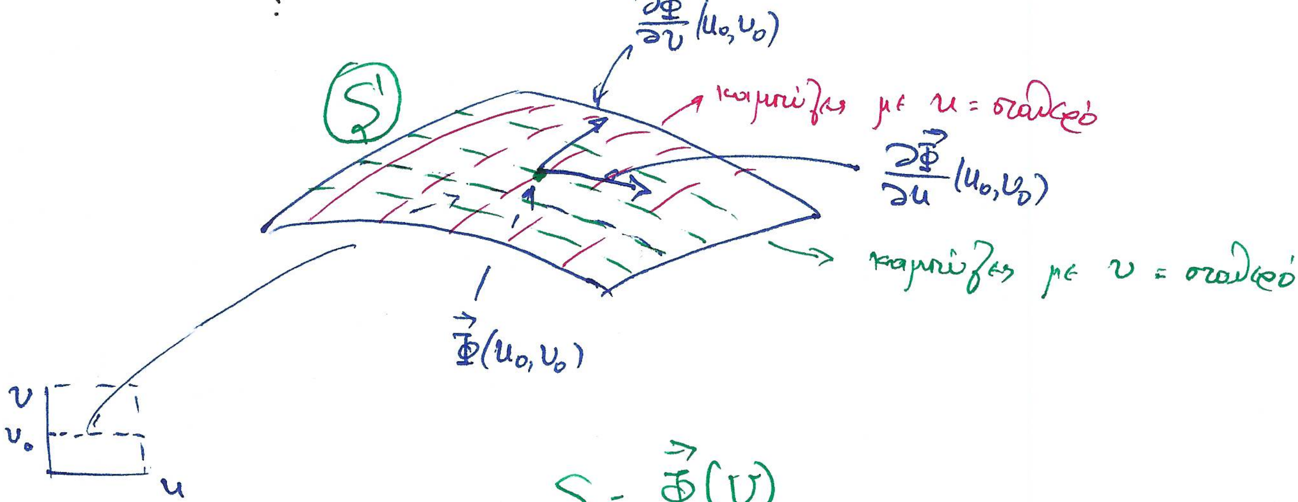
(i). $z = f(x,y)$: Γράφημα συναρτήσεως δύο μεταβλητών.

(ii). $F(x,y,z) = 0$: Πεπλεγμένη μορφή.

(iii). $\vec{\Phi}(u,v)$: $(x(u,v),\, y(u,v),\, z(u,v))$: Παραμετρική μορφή.

$$\vec{\Phi} : \mathbb{R}^2 \supset U \longrightarrow \mathbb{R}^3 .$$

$\vec{\Phi}$: $\left.\begin{array}{l}\text{διαφορίσιμη} \\ C^1 \\ \vdots\end{array}\right\} \rightsquigarrow$ επιφάνεια : $\left\{\begin{array}{l}\text{διαφορίσιμη} \\ C^1 \\ \vdots\end{array}\right.$



$$S = \vec{\Phi}(U)$$

$\vec{\Phi}(u,v)$: διαφορίσιμη στο $\vec{r}_0 = \vec{\Phi}(u_0,v_0)$.

$\vec{\Phi}(u,v_0) = \vec{\sigma}_1(u)$: καμπύλη επί της επιφανείας

$\vec{\Phi}(u_0,v) = \vec{\sigma}_2(v)$: -//-

$\vec{T}_u = \frac{d\vec{\sigma}_1}{du}(u_0,v_0) = \frac{\partial\vec{\Phi}}{\partial u}(u_0,v_0)$: εφαπτόμενο διάνυσμα

$\vec{T}_v = \frac{d\vec{\sigma}_2}{dv}(u_0,v_0) = \frac{\partial\vec{\Phi}}{\partial v}(u_0,v_0)$: -//-

$$\boxed{\text{Λεία επιφάνεια όταν: } \vec{T}_u \times \vec{T}_v \neq 0 \text{ σε κάθε σημείο.}}$$

- $\vec{T}_u, \vec{T}_v$ ορίζουν το εφαπτόμενο επίπεδο -//-.

Έστω τυχαία καμπύλη επί της επιφανείας η οποία διέρχεται από το $\vec{r}_0 = \vec{\Phi}(u_0,v_0)$:

$\vec{\sigma}(t) = \vec{\Phi}(u(t),v(t))$, $\quad u(t_0)=u_0$, $v(t_0)=v_0$.

$$\frac{d\vec{\sigma}}{dt}(t_0) = \frac{d\vec{\Phi}}{dt}(u(t_0),v(t_0)) = \frac{\partial\vec{\Phi}}{\partial u}(u_0,v_0)\frac{du}{dt}(t_0) + \frac{\partial\vec{\Phi}}{\partial v}(u_0,v_0)\frac{dv}{dt}(t_0)$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{\sigma}}{dt}(t_0) = \frac{du}{dt}(t_0)\vec{T}_u + \frac{dv}{dt}(t_0)\vec{T}_v$$

$\llcorner$ = γραμμικός συνδυασμός των $\vec{T}_u, \vec{T}_v$.

- Όλες οι γραμμές οι οποίες εφάπτονται των καμπυλών επί της επιφανείας οι οποίες διέρχονται από το $\vec{r}_0$ ευρίσκονται στο επίπεδο:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + k\vec{T}_u(u_0,v_0) + \lambda\vec{T}_v(u_0,v_0)$$

το οποίο είναι το επίπεδο που εφάπτεται στην επιφάνεια στο σημείο $\vec{r}_0$.

• Διαφορετικές μορφές καθορισμού του εφαπτομένου επιπέδου.

(i). Πεπλεγμένη μορφή της επιφάνειας.

$$F(x,y,z)=0$$

Δηλαδή η επιφάνεια είναι το σύνολο των σημείων στα οποία η συνάρτηση $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, έχει σταθερή (μηδενική τιμή).

$\vec{\nabla} F$: κάθετο στην επιφάνεια, δηλαδή κάθετο σε οποιοδήποτε εφαπτόμενο διάνυσμα σε καμπύλη επί της επιφάνειας.

Εφαπτόμενο επίπεδο :

$$(\vec{r}-\vec{r}_0)\cdot\vec{\nabla}\Phi(\vec{r}_0)=0.$$

Με παραμετρική έκφραση :

(ii). $$\vec{r}-\vec{r}_0 = \kappa\frac{\partial\vec{\Phi}}{\partial u}(u_0,v_0)+\lambda\frac{\partial\vec{\Phi}}{\partial v}(u_0,v_0).$$
$$= \kappa\,\vec{T}_u(u_0,v_0)+\lambda\,\vec{T}_v(u_0,v_0)$$

(iii). $\vec{T}_u(u_0,v_0)\times\vec{T}_v(u_0,v_0) \perp$ στην επιφάνεια

Εφαπτόμενο επίπεδο :

$$(\vec{r}-\vec{r}_0)\cdot\left(\vec{T}_u(u_0,v_0)\times\vec{T}_v(u_0,v_0)\right)=0$$

Και οι τρείς μορφές προφανώς οδηγούν στο ίδιο εφαπτόμενο επίπεδο.

(ii) $\rightarrow$ (iii) $\qquad \vec{\Phi}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$

(ii).
$$x - x_0 = \kappa \frac{\partial x(u,v)}{\partial u} + \lambda \frac{\partial x(u,v)}{\partial v}$$

$$y - y_0 = \kappa \frac{\partial y(u,v)}{\partial u} + \lambda \frac{\partial y(u,v)}{\partial v}$$

$$z - z_0 = \kappa \frac{\partial z(u,v)}{\partial u} + \lambda \frac{\partial z(u,v)}{\partial v}$$

Λύση των κ, λ από τις δύο πρώτες εξισώσεις:

$$\frac{1}{\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}} \left[(x-x_0)\frac{\partial y}{\partial v} - (y-y_0)\frac{\partial x}{\partial v} \right] = \kappa$$

$$\frac{1}{\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}} \left[(y-y_0)\frac{\partial x}{\partial u} - (x-x_0)\frac{\partial y}{\partial u} \right] = \lambda$$

Αντικαθιστώντας τα κ, λ στην τρίτη εξίσωση οδηγούμαστε στην (iii).

$$(x-x_0)\left[\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u}\right] + (y-y_0)\left[\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}\right] +$$
$$(z-z_0)\left[\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right] = 0.$$

(i) → (iii).

$$F(x, y, z) = 0$$

Εάν $\left.\begin{array}{l} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{array}\right\}$ παραμετρική έκφραση $\Rightarrow$

$$G(u,v) = F(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) = 0 \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial G}{\partial u} = \dfrac{\partial F}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial u} + \dfrac{\partial F}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial u} + \dfrac{\partial F}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial u} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial G}{\partial v} = \dfrac{\partial F}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial v} + \dfrac{\partial F}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial v} + \dfrac{\partial F}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial v} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

επιλύουμε το σύστημα ως προς π.χ. $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$

και αντικαθιστούμε στην:

$$(\vec{r} - \vec{r}_0)\cdot\vec{\nabla}F = 0$$

η $\frac{\partial F}{\partial z}$ απλοποιείται και καταλήγουμε στην (iii).

Παραδείγματα.

1. Σφαίρα.

Ακτίνας a με κέντρο την αρχή των αξόνων.

$$x^2+y^2+z^2=a^2 \quad \Rightarrow \quad F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-a^2=0.$$

$$\begin{aligned} x &= a\cos\varphi\sin\theta \\ y &= a\sin\varphi\sin\theta \\ z &= a\cos\theta \end{aligned} \quad , \qquad 0\le\varphi\le2\pi, \quad 0\le\theta\le\pi.$$

$$\vec{\Phi}(\theta,\varphi)=\left(a\cos\varphi\sin\theta,\ a\sin\varphi\sin\theta,\ a\cos\theta\right)$$

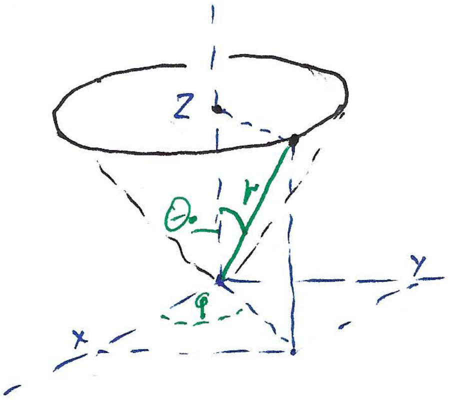
$$\vec{T}_\theta = a\left(\cos\varphi\cos\theta,\ \sin\varphi\cos\theta,\ -\sin\theta\right) = a\hat{T}_\theta$$

$$\vec{T}_\varphi = a\left(-\sin\varphi\sin\theta,\ \cos\varphi\sin\theta,\ 0\right) = a\sin\theta\,\hat{T}_\varphi$$

$\hat{T}_\theta, \hat{T}_\varphi$: μοναδιαία

$$\hat{T}_\theta\times\hat{T}_\varphi = \left(\cos\varphi\sin\theta,\ \sin\varphi\sin\theta,\ \cos\theta\right)=\hat{r} \qquad (\vec{r}=r\hat{r}).$$

2. Κώνος.



$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\varphi\sin\theta_0 \\ y &= r\sin\varphi\sin\theta_0 \\ z &= r\cos\theta_0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \vec{\Phi}(r,\varphi) = r\left(\cos\varphi\sin\theta_0, \sin\varphi\sin\theta_0, \cos\theta_0\right)$$

$$\left.\begin{aligned} &x^2+y^2 = r^2\sin^2\theta_0 \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} = r\sin\theta_0 \quad , \quad 0\le\theta\le\pi/2 \\ &z = r\cos\theta_0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

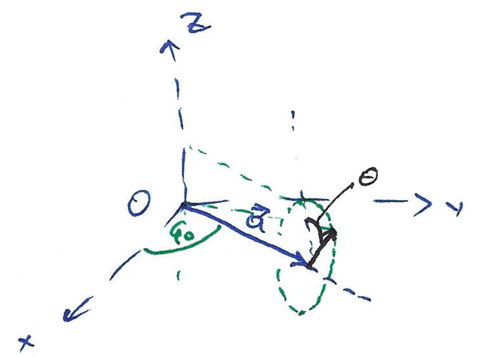
$$\boxed{z = k\sqrt{x^2+y^2} \quad , \quad k = \cot\theta_0}$$

$$\vec{T}_r = \left(\cos\varphi\sin\theta_0 , \sin\varphi\sin\theta_0, \cos\theta_0\right) = \hat{r}(\varphi,\theta_0)$$

$$\vec{T}_\varphi = r\left(-\sin\varphi\sin\theta_0, \cos\varphi\sin\theta_0, 0\right) = r\sin\theta_0 \,\hat{T}_\varphi$$

Στο σημείο $r=0$, η επιφάνεια δεν είναι λεία.

3. Τόρος.



Κύκλος κέντρου $\vec{a}$ και ακτίνας b $(b < a = \|\vec{a}\|)$ στο επίπεδο που ορίζουν το διάνυσμα $\vec{a}$ και ο άξονας των z:

$$\left(\vec{a} = (a\cos\varphi_0,\ a\sin\varphi_0,\ 0)\right)$$

$$x = (a + b\sin\theta)\cos\varphi_0$$

$$y = (a + b\sin\theta)\sin\varphi_0$$

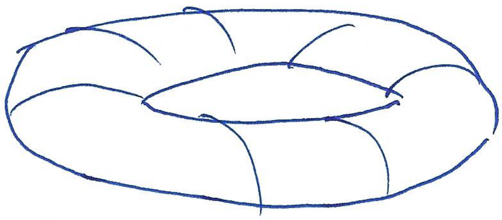
$$z = b\cos\theta$$

$$\vec{r} = \vec{a} + \vec{b} \qquad 0 \le \theta \le 2\pi$$

$$\vec{b} = b(\cos\varphi_0\sin\theta,\ \sin\varphi_0\sin\theta,\ \cos\theta)$$

Περιστρέφοντας το κέντρο του κύκλου περί τον άξονα z: $\varphi_0 \to \varphi$, $0 \le \varphi \le 2\pi$

$$\vec{\Phi}(\theta,\varphi) = \left((a+b\sin\theta)\cos\varphi,\ (a+b\sin\theta)\sin\varphi,\ b\cos\theta\right)$$



→ τόρος.

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{x^2+y^2} = a + b\sin\theta \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} - a &= b\sin\theta \\ z &= b\cos\theta \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{πεπλεγμένη μορφή:}$$

$$\left(\sqrt{x^2+y^2} - a\right)^2 + z^2 - b^2 = 0 \qquad (F(x,y,z) = 0).$$

1. Γράφημα συνάρτησης.

$$z = f(x,y) \rightarrow \begin{cases} f(x,y) - z = 0 = F(x,y,z) \\ \vec{\Phi}(x,y) = \left(x,\ y,\ f(x,y)\right) \end{cases}$$

$$\vec{T}_x = \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

$$\vec{T}_y = \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$\vec{T}_x \times \vec{T}_y = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & \frac{\partial f}{\partial x} \\ 0 & 1 & \frac{\partial f}{\partial y} \end{vmatrix} = -\hat{i}\frac{\partial f}{\partial x} - \hat{j}\frac{\partial f}{\partial y} + \hat{k}$$

$$\vec{T}_x \times \vec{T}_y = -\hat{i}\frac{\partial f}{\partial x} - \hat{j}\frac{\partial f}{\partial y} + \hat{k} \neq 0$$ (πάντοτε λεία περιγραφή)

Εφαπτόμενο επίπεδο:

$$(\vec{r} - \vec{r}_0)\cdot(\vec{T}_x \times \vec{T}_y) = 0 \Rightarrow -(x-x_0)\frac{\partial f}{\partial x} - (y-y_0)\frac{\partial f}{\partial y} + (z-z_0) = 0$$

$$\vec{\nabla} F = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, -1\right)$$

$$(\vec{r} - \vec{r}_0)\cdot\vec{\nabla} f = 0 \Rightarrow (x-x_0)\frac{\partial f}{\partial x} + (y-y_0)\frac{\partial f}{\partial y} - (z-z_0) = 0$$

Ίδια εξίσωση ως ανεμένετο.