

Θέλημα Taylor.

Για αναπαράσταση μιας μεταβλητής

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$$

Εάν f είναι διαφορίσιμη μέχρι τάξη k :

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + h \frac{df}{dx}(x_0) + \dots + \frac{h^k}{k!} \frac{d^k f}{dx^k}(x_0) + R_k(x_0, h)$$

όπου

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{R_k(x_0, h)}{h^k} \rightarrow 0.$$

Εάν επι πλέον n f έχει συνεχή παράγωγο τάξης $k+1$

$$R_k(x_0, h) = \int_{x_0}^{x_0+h} \frac{1}{k!} (x-t)^k \frac{d^{k+1} f}{dt^{k+1}}(t) dt$$

Έστω:

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(\vec{x}) \in \mathbb{R}, \quad \vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$$

• f διαφορίσιμη στο σημείο $\vec{x}_0 \Rightarrow$

$$f(\vec{x}_0 + \vec{h}) = f(\vec{x}_0) + \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}_0) + R_1(\vec{h}, \vec{x}_0)$$

όπου:

$$\frac{R_1(\vec{h}, \vec{x}_0)}{\|\vec{h}\|} \rightarrow 0 \quad \text{όταν} \quad \vec{h} \rightarrow 0.$$

Η ανωτέρω πρόταση αποτελεί ουσιαστικά τον ορισμό της διαφορίσιμότητας.

Εάν f διαφορίσιμη στο $\vec{x}_0$ και ορίσουμε:

$$R_1(\vec{x}_0, \vec{h}) = f(\vec{x}_0 + \vec{h}) - f(\vec{x}_0) - \underbrace{Df(\vec{x}_0) \cdot \frac{\vec{x} - \vec{x}_0}{\vec{h}}}_{\sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}_0) h_i} \Rightarrow$$

$$\frac{|R_1(\vec{x}_0, \vec{h})|}{\|\vec{h}\|} = \frac{|f(\vec{x}_0 + \vec{h}) - f(\vec{x}_0) - Df(\vec{x}_0) \cdot \vec{h}|}{\|\vec{h}\|} \xrightarrow{\|\vec{h}\| \rightarrow 0} 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{ορισμός του} \\ \text{διαφορίσιμου} \\ \text{της συνάρτησης} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \frac{|R_1(\vec{x}_0, \vec{h})|}{\|\vec{h}\|} \xrightarrow{\|\vec{h}\| \rightarrow 0} 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{R_1(\vec{x}_0, \vec{h})}{\|\vec{h}\|} \rightarrow 0, \text{ όταν } \vec{h} \rightarrow 0.}$$

• Εάν n έχει συνεχείς δεύτερες μερικές παραγώγους:

$$R_1(\vec{x}_0, \vec{h}) = \sum_{i,j=1}^n \int_0^1 (1-t) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{x}_0 + t\vec{h}) h_i h_j dt.$$

$$\frac{d}{dt} f(\vec{x}_0 + t\vec{h}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}_0 + t\vec{h}) h_i \quad \left(= \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} \right)$$

$$\Rightarrow f(\vec{x}_0 + t\vec{h}) - f(\vec{x}_0) = \int_0^1 \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}_0 + t\vec{h}) h_i dt$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{d}{dt} (t-1) \right] \left[\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}_0 + t\vec{h}) h_i \right] dt$$

ορίζω με κατά παραγωγή ολοκλήρωση: $\left(\int_0^1 \frac{dg}{dt} u dt = gu \Big|_0^1 - \int_0^1 g \frac{du}{dt} dt \right)$

$$= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}_0) h_i + \int_0^1 (1-t) \frac{d}{dt} \left[\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}_0 + t\vec{h}) h_i \right] dt \Rightarrow$$

$$f(\vec{x}_0 + t\vec{h}) = f(\vec{x}_0) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}_0) h_i + R_1(\vec{x}_0, \vec{h})$$

$$R_1(\vec{x}_0, \vec{h}) = \int_0^1 (1-t) \left[\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{x}_0 + t\vec{h}) h_i h_j \right] dt$$

• Εάν η f έχει τριτες μερικες παραγώγους συνεχεις:

$$P_1(\vec{x}_0, \vec{h}) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{x}_0) h_i h_j + P_2(\vec{x}_0, \vec{h})$$

με:

$$P_2(\vec{x}_0, \vec{h}) = \sum_{i,j,k=1}^n \int_0^1 \frac{(1-t)^2}{2} \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(\vec{x}_0 + t\vec{h}) h_i h_j h_k dt$$

και

$$\frac{P_2(\vec{x}_0, \vec{h})}{\|\vec{h}\|^2} \rightarrow 0, \text{ όταν } \|\vec{h}\| \rightarrow 0.$$

$$P_1(\vec{x}_0, \vec{h}) = \int_0^1 (1-t) \left[\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{x}_0 + t\vec{h}) h_i h_j \right] dt$$

$$= -\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{d}{dt} [(1-t)^2] \left[\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{x}_0 + t\vec{h}) h_i h_j \right] dt \quad (\text{και με καθε παραγώγους ολοκληρώνω})$$

$$= \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{x}_0) h_i h_j + \underbrace{\frac{1}{2} \int_0^1 (1-t)^2 \left[\sum_{i,j,k=1}^n \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(\vec{x}_0 + t\vec{h}) h_i h_j h_k \right] dt}_{P_2(\vec{x}_0, \vec{h})}$$

$$P_2(\vec{x}_0, \vec{h})$$

(5)

Εφ' όσον οι $\frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(\vec{x}_0 + t\vec{h})$ είναι συνεχείς

στη συμπαγή σφαίρα ακτίνας $\|\vec{h}\|$ και κέντρου $\vec{x}_0$, θα παίρνουν μέγιστη και ελάχιστη τιμή.

$$\text{Εάν } \max \left| \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(\vec{x}_0 + t\vec{h}) \right| = M$$

τότε

$$\begin{aligned} |R_2(\vec{x}_0, \vec{h})| &\leq \frac{1}{2} \int_0^1 (1-t)^2 \left| \sum_{i,j,k=1}^n \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(\vec{x}_0 + t\vec{h}) \right| \|\vec{h}\|^3 dt \\ &\leq \frac{1}{2} \|\vec{h}\|^3 (\overset{M'}{n^3 M}) \int_0^1 (1-t)^2 dt \\ &= \frac{1}{6} \|\vec{h}\|^3 (\overset{M'}{n^3 M}) \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{|R_2(\vec{x}_0, \vec{h})|}{\|\vec{h}\|^2} &\leq \frac{1}{6} \|\vec{h}\| M' \rightarrow 0 \\ &\leq \|\vec{h}\| M'' \quad \text{όταν } \|\vec{h}\| \rightarrow 0. \end{aligned}$$

* Στο ίδιο αποτέλεσμα καταφέρουμε εφαρμόζοντας το Θεώρημα Taylor να την αναπτύξουμε:

$$g(t) = f(\vec{x}_0 + t\vec{h}).$$

$$\frac{dg}{dt}(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}_0 + t\vec{h}) h_i$$

$$\frac{d^2g}{dt^2}(t) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{x}_0 + t\vec{h}) h_i h_j$$

⋮

$$\frac{d^n g}{dt^n}(t) = \sum_{i_1, \dots, i_n=1}^n \frac{\partial^n f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_n}}(\vec{x}_0 + t\vec{h}) h_{i_1} \dots h_{i_n}$$

(Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Taylor για $t=1$).

- Εάν η f έχει τέταρτες μερικές παραγώγους συνεχείς:

$$R_2(\vec{x}_0, \vec{h}) = \frac{1}{3!} \sum_{i,j,k=1}^n \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} h_i h_j h_k + R_3(\vec{x}_0, \vec{h})$$

$$R_3(\vec{x}_0, \vec{h}) = \sum_{i,j,k,l=1}^n \int_0^1 \frac{(1-t)^3}{3!} \frac{\partial^4 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k \partial x_l} (\vec{x}_0 + t\vec{h}) h_i h_j h_k h_l dt$$

και

$$\frac{R_3(\vec{x}_0, \vec{h})}{\|\vec{h}\|^3} \rightarrow 0, \text{ εάν } \|\vec{h}\| \rightarrow 0.$$

$$R_2(\vec{x}_0, \vec{h}) = \sum_{i,j,k=1}^n \int_0^1 \frac{(1-t)^2}{2} \frac{\partial^3 f(\vec{x}_0 + t\vec{h})}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} h_i h_j h_k dt$$

$$= - \sum_{i,j,k=1}^n \int_0^1 \left(\frac{(1-t)^3}{3!} \right)' \frac{\partial^3 f(\vec{x}_0 + t\vec{h})}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} h_i h_j h_k dt \quad (\text{κατά παραγώγους ολοκλήρωση})$$

$$= \frac{1}{3!} \sum_{i,j,k=1}^n \frac{\partial^3 f(\vec{x}_0)}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} h_i h_j h_k + \sum_{i,j,k=1}^n \int_0^1 \frac{(1-t)^3}{3!} \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial^3 f(\vec{x}_0 + t\vec{h})}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} h_i h_j h_k \right] dt$$

$$= \frac{1}{3!} \sum_{i,j,k=1}^n \frac{\partial^3 f(\vec{x}_0)}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} h_i h_j h_k + \underbrace{\sum_{i,j,k=1}^n \int_0^1 \frac{(1-t)^3}{3!} \frac{\partial^4 f(\vec{x}_0 + t\vec{h})}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k \partial x_l} h_i h_j h_k h_l dt}_{R_3(\vec{x}_0, \vec{h})}$$

Παράβλεψε μια συνέχηση:

$$|R_3(\vec{x}_0, \vec{h})| \leq M \|\vec{h}\|^4 \Rightarrow \lim_{\|\vec{h}\| \rightarrow 0} \frac{|R_3(\vec{x}_0, \vec{h})|}{\|\vec{h}\|^3} = 0.$$

(7).

Είναι προφανές ότι με επαγωγή προκύπτει το Θεώρημα Taylor για k -τάξη:

$$f(\vec{x}_0 + \vec{h}) = f(\vec{x}_0) + \dots + \frac{1}{k!} \sum_{i_1, \dots, i_k} \frac{\partial^k f(\vec{x}_0)}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}} h_{i_1} h_{i_2} \dots h_{i_k} + R_k(\vec{x}_0, \vec{h})$$

$$\text{με } R_k(\vec{x}_0, \vec{h}) = \frac{1}{k!} \sum_{i_1, \dots, i_{k+1}} \int_0^1 (1-t)^k \frac{\partial^{k+1} f(\vec{x}_0)}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_{k+1}}} h_{i_1} \dots h_{i_{k+1}} dt$$

$$\text{και } \frac{|R_k(\vec{x}_0, \vec{h})|}{\|\vec{h}\|^k} \rightarrow 0 \text{ όταν } \|\vec{h}\| \rightarrow 0.$$

• Με το Θεώρημα μέσης τιμής:

$$R_2(\vec{x}_0, \vec{h}) = \frac{1}{3!} \sum_{i,j,k} \frac{\partial^3 f(\vec{z}_{ijk})}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} h_i h_j h_k$$

με $\vec{z}_{ijk}$ το ενδιάμεσο σημείο μεταξύ $\vec{x}_0$ και $\vec{x}_0 + \vec{h}$.

$$* \int_a^b f(t) g(t) dt = f(c) \int_a^b g(t) dt$$

(εάν $f(t), g(t)$ συνεχείς και $g(t)$ διατηρεί πρόσημο στο $[a, b]$)

$$\text{με } a \leq c \leq b.$$

Πράγματι: $f(t)$ συνεχής στο $[a, b] \Rightarrow$ παίρνει ελάχιστη τιμή m και μέγιστη M . Επιπλέον εάν π.χ. $g(t) > 0$:

$$m \int_a^b g(t) dt < \int_a^b f(t) g(t) dt < M \int_a^b g(t) dt \Rightarrow m \leq \frac{\int_a^b f(t) g(t) dt}{\int_a^b g(t) dt} < M$$

(Η περίπτωση $g(t) = 0$ είναι τετριμμένη). Εφ' όσον f συνεχής $\Rightarrow$ παίρνει όλες τις ενδιάμεσες τιμές $\Rightarrow$ το αποτέλεσμα.

(8).

Παράδειγμα.

Να αναπτυχθεί η $f(\vec{r}) = \frac{1}{\|\vec{r} - \vec{a}\|}$ μέχρι δεύτερης τάξης

γύρω στο σημείο $\vec{r} = 0$.

$$\vec{r} = (x, y, z)$$

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$$

$$f(\vec{r}) = [(x-a_x)^2 + (y-a_y)^2 + (z-a_z)^2]^{-1/2}$$

$$\cdot \frac{\partial f}{\partial x} = -(x-a_x) [(x-a_x)^2 + (y-a_y)^2 + (z-a_z)^2]^{-3/2} = -(x-a_x) \|\vec{r} - \vec{a}\|^{-3}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -(y-a_y) [(x-a_x)^2 + (y-a_y)^2 + (z-a_z)^2]^{-3/2} = -(y-a_y) \|\vec{r} - \vec{a}\|^{-3}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = -(z-a_z) [(x-a_x)^2 + (y-a_y)^2 + (z-a_z)^2]^{-3/2} = -(z-a_z) \|\vec{r} - \vec{a}\|^{-3}$$

$$\cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 3(x-a_x)^2 \|\vec{r} - \vec{a}\|^{-5} - \|\vec{r} - \vec{a}\|^{-3}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 3(x-a_x)(y-a_y) \|\vec{r} - \vec{a}\|^{-5}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = 3(x-a_x)(z-a_z) \|\vec{r} - \vec{a}\|^{-5}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 3(y-a_y)^2 \|\vec{r} - \vec{a}\|^{-5} - \|\vec{r} - \vec{a}\|^{-3}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = 3(y-a_y)(z-a_z) \|\vec{r} - \vec{a}\|^{-5}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 3(z-a_z)^2 \|\vec{r} - \vec{a}\|^{-5}$$

(9)

$$f(\vec{r}) = f(\vec{0}) + \frac{\partial f}{\partial x}(\vec{0})x + \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{0})y + \frac{\partial f}{\partial z}(\vec{0})z$$

$$+ \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\vec{0})x^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\vec{0})y^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(\vec{0})z^2 \right.$$

$$\left. + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\vec{0})xy + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(\vec{0})xz + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(\vec{0})yz \right] + \dots$$

$$= f(\vec{0}) + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{0})x_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{0})x_i x_j + \dots$$

$$f(\vec{0}) = \frac{1}{\|\vec{a}\|} = \frac{1}{a} \quad (a = \|\vec{a}\|)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{0}) = a_i \frac{1}{a^3}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{0}) = \frac{3a_i a_j}{a^5} - \delta_{ij} \frac{1}{a^3} = \frac{1}{a^5} (3a_i a_j - \delta_{ij} a^2)$$

$$(a^2 = \|\vec{a}\|^2 = \vec{a} \cdot \vec{a})$$

$$f(\vec{r}) = \frac{1}{a} + \sum_{i=1}^3 \frac{a_i x_i}{a^3} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \frac{1}{a^5} (3a_i a_j - \delta_{ij} a^2) (x_i x_j) + \dots$$

$$f(\vec{r}) = \frac{1}{\|\vec{r} - \vec{a}\|} = \frac{1}{\|\vec{a}\|} + \frac{\vec{r} \cdot \vec{a}}{\|\vec{a}\|^3} + \frac{3(\vec{a} \cdot \vec{r})^2 - \|\vec{a}\|^2 \|\vec{r}\|^2}{\|\vec{a}\|^5} + \dots$$