

Διανυσματική Ανάλυση

Κλίση-Απόκλιση-Στροβιλισμός

Έστω $f : D \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ μία βαθμωτή συνάρτηση και $\vec{f} : D \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ μία διανυσματική συνάρτηση. Εισάγουμε τον διαφορικό τελεστή :

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x_1} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial x_2} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial x_3} \vec{k} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right)$$

Οι δράσεις του παραπάνω τελεστή πάνω σε μία διαφορίσιμη βαθμωτή ή σε μία διαφορίσιμη διανυσματική συνάρτηση είναι οι εξής :

i) Έστω $f : D \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ μία διαφορίσιμη βαθμωτή συνάρτηση, όπου $f(\vec{x}) \equiv f(x_1, x_2, x_3)$. Η **κλίση** (ανάδελτα, *gradient*) της f συμβολίζεται με ∇f ή $grad f$ και είναι μία διανυσματική συνάρτηση που δίνεται από τον τύπο :

$$grad f \equiv \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x_1} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial x_3} \vec{k} \equiv \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3} \right)$$

ii) Έστω $f : D \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ μία διαφορίσιμη διανυσματική συνάρτηση, όπου $\vec{f}(\vec{x}) \equiv (f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}), f_3(\vec{x}))$. Η **απόκλιση** (*divergence*) της $\vec{f}$ συμβολίζεται με $\nabla \cdot f$ ή $div f$ και είναι μία βαθμωτή συνάρτηση που δίνεται από τον τύπο :

$$div \vec{f} \equiv \nabla \cdot \vec{f} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3}$$

Μία συνάρτηση που έχει απόκλιση μηδέν ονομάζεται **ασυμπίεστη**.

iii) Έστω $f : D \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ μία διαφορίσιμη διανυσματική συνάρτηση, όπου $\vec{f}(\vec{x}) \equiv (f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}), f_3(\vec{x}))$. Ο **στροβιλισμός** (*curl* ή περιστροφή ή *rotation*) της $\vec{f}$ συμβολίζεται με $\nabla \times f$ ή $curl f$ ή $rot f$ και είναι μία διανυσματική συνάρτηση που δίνεται από τον τύπο:

$$\begin{aligned} curl \vec{f} \equiv \nabla \times \vec{f} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \right) \vec{i} - \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right) \vec{k} \\ &= \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}, -\frac{\partial f_3}{\partial x_1} + \frac{\partial f_1}{\partial x_3}, \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right) \end{aligned}$$

Μία συνάρτηση που έχει στροβιλισμό μηδέν ονομάζεται **αστρόβιλη**.

Λαπλασιανή

Ορίζουμε τον τελεστή *Laplace* : $\Delta \equiv \nabla^2 \equiv \nabla \cdot \nabla$

a) Έστω $f : D \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ μία δυό φορές διαφορίσιμη βαθμωτή συνάρτηση. Η **Λαπλασιανή** της f συμβολίζεται με Δf ή $\nabla^2 f$ και είναι μία βαθμωτή συνάρτηση που δίνεται από τον τύπο :

$$\Delta f \equiv \nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}$$

b) Έστω $\vec{f} = (f_1, f_2, f_3) : D \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ μία δυό φορές διαφορίσιμη διανυσματική συνάρτηση. Η **Λαπλασιανή** της $\vec{f}$ συμβολίζεται με $\Delta \vec{f}$ ή $\nabla^2 \vec{f}$ και είναι μία διανυσματική συνάρτηση που δίνεται από τον τύπο :

$$\Delta \vec{f} \equiv \nabla^2 \vec{f} = \Delta f_1 \vec{i} + \Delta f_2 \vec{j} + \Delta f_3 \vec{k} = (\Delta f_1, \Delta f_2, \Delta f_3),$$

όπου κάθε συντεταγμένη της δίνεται από τον τύπο a).

Μία συνάρτηση που έχει Λαπλασιανή μηδέν ονομάζεται **αρμονική**.

Θεώρημα A

Έστω $f, g : D \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ δύο διαφορίσιμα βαθμωτά πεδία και $\vec{F}, \vec{G} : D \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ δύο διαφορίσιμα διανυσματικά πεδία. Ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις :

$$\begin{aligned}\nabla(f+g) &= \nabla f + \nabla g \\ \nabla(\lambda f) &= \lambda \nabla f, \quad (\lambda \in \mathbb{R}) \\ \nabla(fg) &= g \nabla f + f \nabla g \\ \nabla\left(\frac{f}{g}\right) &= \frac{g \nabla f - f \nabla g}{g^2} \\ \nabla \cdot (\vec{F} + \vec{G}) &= \nabla \cdot \vec{F} + \nabla \cdot \vec{G} \\ \nabla \cdot (f \vec{F}) &= f(\nabla \cdot \vec{F}) + \vec{F} \cdot \nabla f \\ \nabla \times (\vec{F} + \vec{G}) &= \nabla \times \vec{F} + \nabla \times \vec{G} \\ \nabla \times (f \vec{F}) &= f(\nabla \times \vec{F}) + \nabla f \times \vec{F}\end{aligned}$$

Θεώρημα B

Έστω $f, g : D \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ δύο διαφορίσιμα βαθμωτά πεδία και $\vec{F} : D \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ένα διαφορίσιμο διανυσματικό πεδίο. Ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις :

$$\begin{aligned}\nabla \times (\nabla f) &= \vec{0} \\ \nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) &= 0 \\ \nabla \times (\nabla \times \vec{F}) &= \nabla(\nabla \cdot \vec{F}) - \Delta \vec{F} \\ \Delta(fg) &= g \Delta f + f \Delta g + 2(\nabla f \cdot \nabla g)\end{aligned}$$

Σχόλιο: Στα παρακάτω θα αντικατασταθεί ο συμβολισμός (x_1, x_2, x_3) με (x, y, z) και ο συμβολισμός (f_1, f_2, f_3) με (P, Q, R) για να συμπίπτει με τη βιβλιογραφία.

Συντηρητικό διανυσματικό πεδίο

Ένα διανυσματικό πεδίο $\vec{F} = (P, Q, R) : D \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ονομάζεται **συντηρητικό** όταν υπάρχει ένα διαφορίσιμο βαθμωτό πεδίο $\phi : D \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ έτσι ώστε να ισχύει :

$$\vec{F} = \nabla \phi$$

δηλαδή

$$P = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad R = \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

Το βαθμωτό πεδίο ϕ ονομάζεται **δυναμικό** του διανυσματικού πεδίου $\vec{F}$.

Θεώρημα 1

Έστω μία συνεχώς διαφορίσιμη διανυσματική συνάρτηση $\vec{F} = (P, Q, R) : D \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, όπου το D είναι ένα ανοικτό και απλά συνεκτικό χωρίο. Τότε αν ισχύει

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$$

το διανυσματικό πεδίο $\vec{F}$ είναι συντηρητικό.

Στην περίπτωση διανυσματικού πεδίου στο $\mathbb{R}^2$ το παραπάνω Θεώρημα 1 γράφεται ως εξής:

Έστω μία συνεχώς διαφορίσιμη διανυσματική συνάρτηση $\vec{F} = (P, Q) : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, όπου το D είναι ένα ανοικτό και απλά συνεκτικό χωρίο. Τότε αν ισχύει

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

το διανυσματικό πεδίο $\vec{F}$ είναι συντηρητικό.

Θεώρημα 2

Κάθε συντηρητικό διανυσματικό πεδίο $\vec{F} = (P, Q, R) : D \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ είναι αστρόβιλο δηλαδή $\text{curl } \vec{F} = \vec{0}$. (Το αντίστροφο δεν ισχύει, δηλαδή ένα αστρόβιλο πεδίο δεν είναι πάντα συντηρητικό).

ΑΣΚΗΣΗ 1 : Να βρεθεί η απόκλιση και ο στροβιλισμός της διανυσματικής συνάρτησης $\vec{F}(x, y, z) = (x, xy, x^2z^2)$.

ΛΥΣΗ:

$$\text{div } \vec{F} = \frac{\partial(x)}{\partial x} + \frac{\partial(xy)}{\partial y} + \frac{\partial(x^2z^2)}{\partial z} = 1 + x + 2x^2z$$

$$\begin{aligned} \text{curl } \vec{F} &= \left(\frac{\partial(x^2z^2)}{\partial y} - \frac{\partial(xy)}{\partial z} \right) \vec{i} - \left(\frac{\partial(x^2z^2)}{\partial x} - \frac{\partial(x)}{\partial z} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial(xy)}{\partial x} - \frac{\partial(x)}{\partial y} \right) \vec{k} \\ &= 0 \vec{i} - 2xz^2 \vec{j} + y \vec{k} = (0, -2xz^2, y) \end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΗ 2 : Να βρεθεί η απόκλιση και ο στροβιλισμός της διανυσματικής συνάρτησης $\vec{f}(x, y, z) = (\sin(x+y), 2e^z, e^{xz})$.

ΛΥΣΗ:

$$\text{div } \vec{f} = \frac{\partial(\sin(x+y))}{\partial x} + \frac{\partial(2e^z)}{\partial y} + \frac{\partial(e^{xz})}{\partial z} = \cos(x+y) + xe^{xz}$$

$$\text{curl } \vec{f} = (0 - 2e^z) \vec{i} - (ze^{xz} - 0) \vec{j} + (0 - \cos(x+y)) \vec{k} = (-2e^z, -ze^{xz}, -\cos(x+y))$$

ΑΣΚΗΣΗ 3 : Να εξεταστεί αν η συνάρτηση $f(x, y, z) = xe^y \sin z$ είναι αρμονική.

ΛΥΣΗ: Θα βρούμε τη Λαπλασιανή για να δούμε αν είναι ίση με μηδέν ή όχι.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= e^y \sin z \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial(e^y \sin z)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= xe^y \sin z \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial(xe^y \sin z)}{\partial y} = xe^y \sin z \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= xe^y \cos z \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial(xe^y \cos z)}{\partial y} = -xe^y \sin z \end{aligned}$$

Άρα

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = xe^y \sin z - xe^y \sin z = 0.$$

Επομένως η συνάρτηση f είναι αρμονική.

ΑΣΚΗΣΗ 4 : Να εξεταστεί αν η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x, y, z) = e^x \sin y + xy^2 - z^2$ είναι αρμονική.

ΛΥΣΗ:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= e^x \sin y + y^2 \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = e^x \sin y \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= e^x \cos y + 2xy \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -e^x \sin y + 2x \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= -2z \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = -2\end{aligned}$$

Άρα

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = e^x \sin y - e^x \sin y + 2x - 2 = 2x - 2$$

Επομένως η συνάρτηση f δεν είναι αρμονική (αφού η Λαπλασιανή της δεν είναι μηδέν για όλα τα (x, y, z) του πεδίου ορισμού της).

ΑΣΚΗΣΗ 5 : Να εξεταστεί αν το διανυσματικό πεδίο $\vec{F}(x, y, z) = (y, x + e^z, ye^z)$ είναι αστρόβιλο.

ΛΥΣΗ: Θα βρούμε το στροβιλισμό του $\vec{F}$ για να δούμε αν είναι μηδέν ή όχι.

$$\begin{aligned}\operatorname{curl} \vec{F} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & x + e^z & ye^z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial(ye^z)}{\partial y} - \frac{\partial(x + e^z)}{\partial z} \right) \vec{i} - \left(\frac{\partial(ye^z)}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial z} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial(x + e^z)}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial y} \right) \vec{k} \\ &= 0 \vec{i} - 0 \vec{j} + 0 \vec{k} = (0, 0, 0)\end{aligned}$$

Επομένως το διανυσματικό πεδίο $\vec{F}$ είναι αστρόβιλο.

ΑΣΚΗΣΗ 6 : Να εξεταστεί αν το διανυσματικό πεδίο $\vec{F}(x, y, z) = (xe^{xy}, e^z - ye^{xy}, \sin y)$ είναι ασυμπίεστο.

ΛΥΣΗ: Θα βρούμε την απόκλιση του $\vec{F}$ για να δούμε αν είναι μηδέν ή όχι.

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial(xe^{xy})}{\partial x} + \frac{\partial(e^z - ye^{xy})}{\partial y} + \frac{\partial \sin y}{\partial z} = (e^{xy} + xye^{xy}) + (0 - (e^{xy} + xye^{xy})) + 0 = 0$$

Επομένως το διανυσματικό πεδίο $\vec{F}$ είναι ασυμπίεστο.

ΑΣΚΗΣΗ 7 : Να εξεταστεί αν το διανυσματικό πεδίο $\vec{F}(x, y) = (2xe^{xy} + x^2ye^{xy}, x^3e^{xy} + 2y)$ είναι συντηρητικό.

ΛΥΣΗ: Έχουμε $P = 2xe^{xy} + x^2ye^{xy}$ και $Q = x^3e^{xy} + 2y$.

Θα υπολογίσουμε τις ποσότητες $\frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}$ για να δούμε αν είναι ίσες.

$$\begin{aligned}\frac{\partial P}{\partial y} &= \frac{\partial(2xe^{xy} + x^2ye^{xy})}{\partial y} = 2x^2e^{xy} + x^2e^{xy} + x^3ye^{xy} = 3x^2e^{xy} + x^3ye^{xy} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} &= \frac{\partial(x^3e^{xy} + 2y)}{\partial x} = 3x^2e^{xy} + x^3e^{xy}\end{aligned}$$

Επομένως ισχύει ότι $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ και άρα από το Θεώρημα 1 το διανυσματικό πεδίο $\vec{F}$ είναι συντηρητικό.

ΑΣΚΗΣΗ 8 : Να εξεταστεί αν το διανυσματικό πεδίο $\vec{F}(x, y) = (x^2 - yx, y^2 - xy)$ είναι συντηρητικό.

ΛΥΣΗ: Έχουμε $\vec{F} = (P, Q) = (x^2 - yx, y^2 - xy)$, δηλαδή $P = x^2 - yx$ και $Q = y^2 - xy$. Θα υπολογίσουμε τις μερικές παραγώγους $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$.

$$\begin{aligned}\frac{\partial P}{\partial y} &= \frac{\partial(x^2 - yx)}{\partial y} = -x \\ \frac{\partial Q}{\partial x} &= \frac{\partial(y^2 - xy)}{\partial x} = -y\end{aligned}$$

Άρα $\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$ και επομένως από το Θεώρημα 1 το διανυσματικό πεδίο $\vec{F}$ δεν είναι συντηρητικό.