

Ολοκληρώματα

1.1 Διπλό Ολοκλήρωμα

I. Πάνω σε ορθογώνιο

Έστω

$$f : R = [\alpha, \beta] \times [\gamma, \delta] \longrightarrow \mathbb{R}$$

μία φραγμένη συνάρτηση στο ορθογώνιο R . Ορίζουμε μία διαμέριση του ορθογωνίου R , ως εξής:

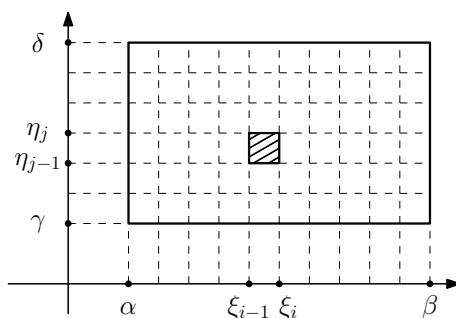
$$Px = \{\alpha, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}, \beta\}, \quad \text{με } \alpha = \xi_0 < \xi_1 < \dots < \xi_{n-1} < \xi_n = \beta$$

$$Py = \{\gamma, n_1, n_2, \dots, n_{m-1}, \delta\}, \quad \text{με } \gamma = n_0 < n_1 < \dots < n_{m-1} < n_m = \delta$$

διαμερίσεις των διαστημάτων $[\alpha, \beta]$, $[\gamma, \delta]$, αντίστοιχα, δηλαδή

$$[\alpha, \beta] = \bigcup_{i=1}^n [\xi_{i-1}, \xi_i], \quad [\gamma, \delta] = \bigcup_{j=1}^m [n_{j-1}, n_j]$$

Το σύνολο



$$\{R_{ij} : 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\},$$

όπου

$$R_{ij} = [\xi_{i-1}, \xi_i] \times [n_{j-1}, n_j]$$

είναι μία διαμέριση του ορθογωνίου R .

Έστω

$$A(R_{ij}) : \text{το εμβαδόν του } R_{ij} = (\xi_i - \xi_{i-1})(n_j - n_{j-1})$$

και

$$M_{ij} = \sup_{R_{ij}} f(x, y), \quad m_{ij} = \inf_{R_{ij}} f(x, y)$$

Αν P μία τυχούσα διαμέριση του R , ορίζουμε:

$$U(f, P) := \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m M_{ij} A(R_{ij}) \quad : \text{άνω άθροισμα}$$

$$L(f, P) := \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m m_{ij} A(R_{ij}) \quad : \text{κάτω άθροισμα}$$

Επίσης ορίζουμε (αποδεικνύεται ότι υπάρχουν)

$$\int_R^- f d(A) := \inf_P U(f, P) \quad : \text{άνω ολοκλήρωμα της } f \text{ στο } R.$$

$$\int_{-R} f d(A) := \sup_P L(f, P) \quad : \text{κάτω ολοκλήρωμα της } f \text{ στο } R.$$

Ορισμός

Η f θα λέγεται ολοκληρώσιμη στο ορθογώνιο R , όταν

$$\int_R^- f d(A) = \int_{-R} f d(A)$$

Ο αριθμός $\int_R^- f d(A) = \int_{-R} f d(A)$ λέγεται διπλό ολοκλήρωμα της f στο R και συμβολίζεται

$$\int \int_R f d(A) \text{ ή } \int \int_R f(x, y) dx dy$$

Ιδιότητες του διπλού ολοκληρώματος

Έχει τις ίδιες ιδιότητες με το (απλό) ορισμένο ολοκλήρωμα.

π.χ.

ι.

$$\begin{aligned} & \int \int_D (\lambda_1 f_1(x, y) + \lambda_2 f_2(x, y)) dx dy = \\ & = \lambda_1 \int \int_D f_1(x, y) dx dy + \lambda_2 \int \int_D f_2(x, y) dx dy \end{aligned}$$

ii.

$$\left| \int \int_D f(x, y) dx dy \right| \leq \int \int_D |f(x, y)| dx dy$$

Αν $D = \cup_{k=1}^{\ell} D_k$, D_k : κλ. ορθ., ανά δύο δεν έχουν κοινά εσωτερικά σημεία, τότε

$$\int \int_D f(x, y) dx dy = \sum_{k=1}^{\ell} \int \int_{D_k} f(x, y) dx dy$$

Διαδοχικά ολοκληρώματα

Ορίζονται ως

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} \int_{\gamma}^{\delta} f(x, y) dy dx &= \int_{\alpha}^{\beta} \left[\int_{\gamma}^{\delta} f(x, y) dy \right] dx \\ \int_{\gamma}^{\delta} \int_{\alpha}^{\beta} f(x, y) dx dy &= \int_{\gamma}^{\delta} \left[\int_{\alpha}^{\beta} f(x, y) dx \right] dy \end{aligned}$$

με την υπόθεση ότι υπάρχουν τα επιμέρους (απλά) ορισμένα ολοκληρώματα.

Θεώρημα 1.1.1. Έστω

$$f : D = [\alpha, \beta] \times [\gamma, \delta] \longrightarrow \mathbb{R} \text{ συνεχής}$$

τότε υπάρχουν: $\int \int_D f(x, y) dx dy$, $\int_{\alpha}^{\beta} \int_{\gamma}^{\delta} f(x, y) dy dx$, $\int_{\gamma}^{\delta} \int_{\alpha}^{\beta} f(x, y) dx dy$ και είναι ίσα.

II. Σε φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$

Έστω

$$f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

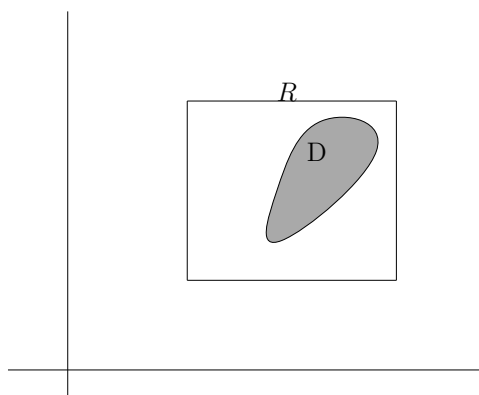
φραγμένη συνάρτηση, ορισμένη στο φραγμένο σύνολο $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Έστω R κλειστό ορθογώνιο του $\mathbb{R}^2$ τέτοιο ώστε $D \subseteq R$ (το R υπάρχει, αφού D φραγμένο). Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$\bar{f} : R \longrightarrow \mathbb{R}$$

όπου

$$\bar{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & (x, y) \in D \\ 0, & (x, y) \in R - D \end{cases}$$

δηλαδή η $\bar{f}$ είναι μία επέκταση της f στο R , προφανώς φραγμένη.

**Ορισμός**

Η συνάρτηση f λέγεται ολοκληρώσιμη στο D όταν η $\bar{f}$ είναι ολοκληρώσιμη στο R και ορίζουμε

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_R \bar{f}(x, y) dx dy$$

Αποδεικνύεται ότι το ολοκλήρωμα $\iint_D f(x, y) dx dy$ είναι ανεξάρτητο από το ορθογώνιο R .

Θεώρημα 1.1.2. Αν η $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής, τότε είναι ολοκληρώσιμη στο R .

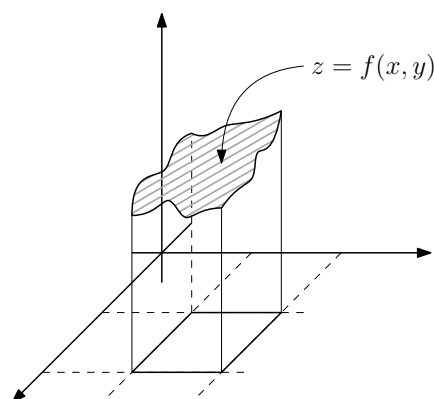
Το διπλό ολοκλήρωμα παριστάνει γεωμετρικά τα εξής:

$$(i) \iint_R dx dy = \text{εμβαδόν του } R$$

$$(ii) \iint_R f(x, y) dx dy = \text{όγκος του στερεού } \Sigma(f, R), \text{ όπου } \Sigma(f, R) \text{ είναι το στερεό:}$$

Παραδείγματα

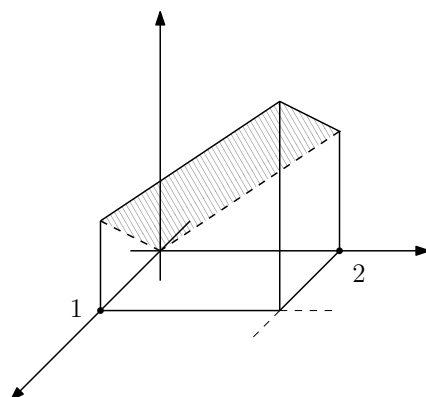
$$1) D = [0, 1] \times [2, 3], f(x, y) = x^2 y + y \cos(\pi x)$$



$$\begin{aligned}
 \iint_D f(x, y) dx dy &= \int_0^1 \int_2^3 (x^2 y + y^3 \cos(\pi x)) dx dy = \\
 &= \int_0^1 \left[x^2 \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{4} \cos(\pi x) \right]_2^3 dx = \\
 &= \int_0^1 \left(\frac{5}{2} x^2 + \frac{65}{4} \cos(\pi x) \right) dx = \\
 &= \left[\frac{5}{6} x^3 - \frac{65}{4\pi} \cos(\pi x) \right]_0^1 = \\
 &= \frac{5}{6}
 \end{aligned}$$

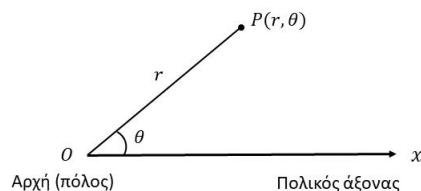
2) Να βρεθεί ο όγκος του στερεού $\Sigma(f, R)$, όπου $D = [0, 1] \times [0, 2]$, $f(x, y) = x + y$

$$\begin{aligned}
 V &= \iint_D f(x, y) dx dy = \int_0^1 \int_0^2 (x + y) dy dx = \int_0^1 \left[xy + \frac{y^2}{2} \right]_0^2 dx = \\
 &= \int_0^1 (2x + 2) dx = [x^2 + 2x]_0^1 = 3.
 \end{aligned}$$



Πολικές Συντεταγμένες

Έστω O ο πόλος. Με αφετηρία το O σχεδιάζουμε τον πολικό άξονα, κατά αντιστοιχία με τον θετικό ημιάξονα x στις Καρτεσιανές συντεταγμένες. Ένα τυχαίο σημείο P του επιπέδου μπορεί να περιγραφεί από ένα ζεύγος πολικών συντεταγμένων (r, θ) , όπου το r δείχνει την κατευθυνόμενη απόσταση του P από το O και το θ δείχνει την κατευθυνόμενη γωνία του $\overrightarrow{OP}$ με τον πολικό άξονα ($\theta > 0$ όταν διαγράφεται αριστερόστροφα και $\theta < 0$ όταν διαγράφεται δεξιόστροφα).



Συσχετισμός πολικών και καρτεσιανών συντεταγμένων

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad x^2 + y^2 = r^2, \quad \frac{y}{x} = \tan \theta$$