(14.17) $$\nabla \times (f\boldsymbol{F}) = f(\nabla \times \boldsymbol{F}) + \nabla f \times \boldsymbol{F}$$

(14.18) $$\nabla(\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{G}) = (\boldsymbol{F} \cdot \nabla)\boldsymbol{G} + (\boldsymbol{G} \cdot \nabla)\boldsymbol{F} + \boldsymbol{F} \times (\nabla \times \boldsymbol{G}) + \boldsymbol{G} \times (\nabla \times \boldsymbol{F})$$

(14.19) $$\nabla \cdot (\boldsymbol{F} \times \boldsymbol{G}) = \boldsymbol{G} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{F}) - \boldsymbol{F} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{G})$$

(14.20) $$\nabla \times (\boldsymbol{F} \times \boldsymbol{G}) = (\nabla \cdot \boldsymbol{G})\boldsymbol{F} - (\nabla \cdot \boldsymbol{F})\boldsymbol{G} + (\boldsymbol{G} \cdot \nabla)\boldsymbol{F} - (\boldsymbol{F} \cdot \nabla)\boldsymbol{G}.$$ □

Ο τελεστής Laplace

Έστω $f\colon U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ένα 2 φορές διαφορίσιμο αριθμητικό πεδίο και $\boldsymbol{F}\colon U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ένα 2 φορές διαφορίσιμο διανυσματικό πεδίο του $\mathbb{R}^3$ στο ανοικτό υποσύνολο U του $\mathbb{R}^3$. Το αριθμητικό πεδίο

(14.21) $$\nabla^2 f := \nabla \cdot \nabla f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

και το διανυσματικό πεδίο

(14.22) $$\nabla^2 \boldsymbol{F} := \nabla^2 P\boldsymbol{i} + \nabla^2 Q\boldsymbol{j} + \nabla^2 R\boldsymbol{k}$$

του $\mathbb{R}^3$ στο U, όπου τα αριθμητικά πεδία $\nabla^2 P$, $\nabla^2 Q$ και $\nabla^2 R$ ορίζονται από τον τύπο (14.21), ονομάζονται αντιστοίχως το *αριθμητικό πεδίο Laplace* (ή η *Λαπλασιανή*) του αριθμητικού πεδίου f και το *διανυσματικό πεδίο Laplace* (ή η *διανυσματική Λαπλασιανή*) του διανυσματικού πεδίου $\boldsymbol{F}$. Ο διαφορικός τελεστής ∇^2 ονομάζεται τελεστής Laplace (ή Λαπλασιανή). Ο τελεστής Laplace χρησιμοποιείται κατά ουσιαστικό τρόπο στη διατύπωση και τη μελέτη σημαντικών φυσικών νόμων.

Παράδειγμα 14.5

Υπολογίστε τη Λαπλασιανή $\nabla^2 f$ του αριθμητικού πεδίου $f(x, y, z) = xy^2z^3 + ze^{xy}$.

Λύση. Υπολογίζουμε

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = y^2 z e^{xy}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2xz^3 + x^2 z e^{xy} \quad \text{και} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 6xy^2 z$$

και από τον τύπο (14.21) ευρίσκουμε

$$\nabla^2 f = (\nabla^2 f)(x, y, z) = (x^2 + y^2) z e^{xy} + 2xz^3 + 6xy^2 z.$$ □

Παράδειγμα 14.6

Υπολογίστε τη διανυσματική Λαπλασιανή $\nabla^2 \boldsymbol{F}$ του διανυσματικού πεδίου $\boldsymbol{F}(x, y, z) = (x^2y, y^2z^3, xyz^4)$.

Λύση. Εφαρμόζοντας τον τύπο (14.21), υπολογίζουμε

$$\nabla^2(x^2y) = 2y, \quad \nabla^2(y^2z^3) = 2z^3 + 6y^2z \quad \text{και} \quad \nabla^2(xyz^4) = 12xyz^2$$

και από τον τύπο (14.22) ευρίσκουμε

$$\nabla^2 \boldsymbol{F} = (\nabla^2 \boldsymbol{F})(x, y, z) = 2y\boldsymbol{i} + (2z^3 + 6y^2z)\boldsymbol{j} + 12xyz^2\boldsymbol{k}.$$ □

Η (διαφορική) εξίσωση

(14.23)
$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

ονομάζεται *εξίσωση Laplace* (σε καρτεσιανές συντεταγμένες) και εμφανίζεται σε αρκετούς κλάδους των φυσικών επιστημών και της τεχνολογίας. Οι λύσεις $u = f(x, y, z)$ της εξίσωσης Laplace ονομάζονται *αρμονικές συναρτήσεις*.

Παράδειγμα 14.7

Η συνάρτηση $u = \ln(x^2 + y^2)$ είναι αρμονική στο σύνολο $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Λύση. Υπολογίζουμε

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2x}{x^2 + y^2}\right)$$

$$= \frac{2(x^2 + y^2) - 2x \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{-2x^2 + 2y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2y}{x^2 + y^2}\right) = \frac{2x^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

και παρατηρούμε ότι ισχύει

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

που σημαίνει ότι η u είναι αρμονική. □

Θεώρημα 14.2

Έστω $f, g : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ C^2 αριθμητικά πεδιά και $\boldsymbol{F}, \boldsymbol{G} : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ C^2 διανυσματικά πεδία του $\mathbb{R}^3$ στο ανοικτό υποσύνολο U του $\mathbb{R}^3$. Τότε ισχύουν:

(14.24) $$\nabla \times (\nabla f) = \mathbf{0}$$

(14.25) $$\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{F}) = 0$$

(14.26) $$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{F}) = \nabla (\nabla \cdot \boldsymbol{F}) - \nabla^2 \boldsymbol{F}$$

(14.27) $$\nabla^2 (fg) = g \nabla^2 f + f \nabla^2 g + 2(\nabla f \cdot \nabla g)$$

(14.28) $$\boxed{\nabla \cdot (\nabla f \times \nabla g) = 0}$$

(14.29) $$\nabla \cdot (f \nabla g - g \nabla f) = f \nabla^2 g - g \nabla^2 f.$$

Απόδειξη. Αποδεικνύουμε ενδεικτικά τις (14.24), (14.25) και (14.28):

Από τους τύπους (14.4) και (8.34) έχουμε

$$\nabla \times (\nabla f) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} \right) \boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \right) \boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right) \boldsymbol{k} = \mathbf{0}$$

Εξ άλλου, από τους τύπους (14.4), (14.3) και (8.34) ευρίσκουμε

$$\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{F}) = \left(\frac{\partial^2 R}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial z} \right) + \left(\frac{\partial^2 P}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 R}{\partial y \partial x} \right) + \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 P}{\partial z \partial y} \right) = 0$$

Τέλος, από τις (14.19) και (14.24) λαμβάνουμε

$$\nabla \cdot (\nabla f \times \nabla g) = \nabla g \cdot (\nabla \times (\nabla f)) - \nabla f \cdot (\nabla \times (\nabla g)) = 0.$$ □

Πρόταση 14.3

Για το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$, το αριθμητικό πεδίο $\|\boldsymbol{r}\| = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ και για κάθε ακέραιο k ισχύουν:

(14.30) $$\nabla (\|\boldsymbol{r}\|^k) = k \|\boldsymbol{r}\|^{k-2} \boldsymbol{r}$$

(14.31) $$curl (\|\boldsymbol{r}\|^k \boldsymbol{r}) = \mathbf{0}$$

(14.32) $$\nabla^2 (\|\boldsymbol{r}\|^k) = k(k+1) \|\boldsymbol{r}\|^{k-2}.$$

Απόδειξη.

$$\nabla(\|\mathbf{r}\|^k) = \nabla((x^2+y^2+z^2)^{k/2}) = \frac{k}{2}(x^2+y^2+z^2)^{(k-2)/2}(2x, 2y, 2z)$$

$$= k\|\mathbf{r}\|^{k-2}\mathbf{r}.$$

$$curl(\|\mathbf{r}\|^k\mathbf{r}) = curl((x^2+y^2+z^2)^{k/2}(x, y, z))$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x(x^2+y^2+z^2)^{k/2} & y(x^2+y^2+z^2)^{k/2} & z(x^2+y^2+z^2)^{k/2} \end{vmatrix}$$

$$= \left(kyz(x^2+y^2+z^2)^{(k-2)/k} - kyz(x^2+y^2+z^2)^{(k-2)/k}\right)\mathbf{i}$$

$$+ \left(kxz(x^2+y^2+z^2)^{(k-2)/k} - kxz(x^2+y^2+z^2)^{(k-2)/k}\right)\mathbf{j}$$

$$+ \left(kxy(x^2+y^2+z^2)^{(k-2)/k} - kxy(x^2+y^2+z^2)^{(k-2)/k}\right)\mathbf{k}$$

$$= 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k} = \mathbf{0}.$$

Εξ άλλου, υπολογίζουμε

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\|\mathbf{r}\|^k = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(x^2+y^2+z^2)^{k/2}$$

$$= [k(x^2+y^2+z^2) + k(k-2)x^2](x^2+y^2+z^2)^{(k/2)-2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\|\mathbf{r}\|^k = [k(x^2+y^2+z^2) + k(k-2)y^2](x^2+y^2+z^2)^{(k/2)-2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\|\mathbf{r}\|^k = [k(x^2+y^2+z^2) + k(k-2)z^2](x^2+y^2+z^2)^{(k/2)-2}$$

και προσθέτοντας ευρίσκουμε

$$\nabla^2(\|\mathbf{r}\|^k) = k(k+1)(x^2+y^2+z^2)^{(k/2)-1} = k(k+1)\|\mathbf{r}\|^{k-2}.$$ □

Συντηρητικό διανυσματικό πεδίο

Ένα *διανυσματικό πεδίο* $\boldsymbol{F}=(P, Q, R)\colon U\subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ του $\mathbb{R}^3$ στο ανοικτό σύνολο U ονομάζεται ***συντηρητικό*** (conservative), όταν υπάρχει ένα διαφορίσιμο αριθμητικό πεδίο $\varphi\colon U\subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ έτσι, ώστε να ισχύει

$$\boldsymbol{F} = \nabla\varphi, \quad \text{δηλαδή} \quad P = \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial\varphi}{\partial y} \quad \text{και} \quad R = \frac{\partial\varphi}{\partial z}.$$

Στην προκειμένη περίπτωση, το *αριθμητικό πεδίο* φ ονομάζεται ένα **δυναμικό** (potential) του *διανυσματικού πεδίου* $\boldsymbol{F}$, ενώ το *αριθμητικό πεδίο* $V=-\varphi$ (για το οποίο ισχύει $\boldsymbol{F}=-\nabla V$) ονομάζεται ***δυναμική ενέργεια** (potential energy)* (ή δυναμική συνάρτηση) του $\boldsymbol{F}$.

Για την εύρεση των δυναμικών φ ενός συντηρητικού διανυσματικού πεδίου $\boldsymbol{F}$ ακολουθείται (εν γένει) η διαδικασία, η οποία περιγράφεται στα Παραδείγματα 12.30, 12.31 και 12.32.

Παράδειγμα 14.8

Το βαρυτικό πεδίο δυνάμεων $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = -(Mmg)\,\dfrac{\boldsymbol{r}}{\|\boldsymbol{r}\|^3}$, το οποίο παράγεται από μία μάζα M (τοποθετημένη στην αρχή $O(0, 0, 0)$, η οποία έλκει μία («μικρή») μάζα m, τοποθετημένη στο σημείο $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ (νόμος Newton της παγκόσμιας έλξης), είναι συντηρητικό (με (ένα) δυναμικό το $\varphi = (Mmg)\,\dfrac{1}{\|\boldsymbol{r}\|}$).

Λύση. Για το αριθμητικό πεδίο $\varphi = (Mmg)\,\dfrac{1}{\|\boldsymbol{r}\|}$ από τον τύπο (14.30) έχουμε

$$\nabla\varphi = (Mmg)\,\nabla\left(\frac{1}{\|\boldsymbol{r}\|}\right) = (-Mmg)\,\frac{\boldsymbol{r}}{\|\boldsymbol{r}\|^3} = \boldsymbol{F},$$

που σημαίνει ότι το διανυσματικό πεδίο $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ είναι συντηρητικό. □

Παράδειγμα 14.9

Το διανυσματικό πεδίο $\boldsymbol{F}(x, y) = \left(\dfrac{-y}{x^2+y^2}, \dfrac{x}{x^2+y^2}\right)$ του $\mathbb{R}^2$ στο $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ δεν είναι συντηρητικό.

Λύση. Για την κλειστή C^1 παραμετρική καμπύλη $\Gamma = \Gamma(\boldsymbol{r})$ του $\mathbb{R}^2$, η οποία ορίζεται από την παραμέτρηση $\boldsymbol{r}(t) = (\sigma\upsilon\nu t, \eta\mu t)$, $t\in[0, 2\pi]$ (περιφέρεια κύκλου (θετικά προσανατολισμένη)), υπολογίζουμε

$$\int_{\Gamma} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_0^{2\pi} (-\eta\mu t,\, \sigma\upsilon\nu t) \cdot (-\eta\mu t,\, \sigma\upsilon\nu t)\, dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi.$$

Έτσι, εφαρμόζοντας το Θεώρημα 12.30, συμπεραίνουμε ότι το διανυσματικό πεδίο $\boldsymbol{F}$ δεν είναι συντηρητικό. □

Παράδειγμα 14.10

Το βαρυτικό δυναμικό $\varphi = Mmg \dfrac{1}{\|\boldsymbol{r}\|}$ (βλ. Παράδειγμα 14.8) είναι αρμονική συνάρτηση.

Λύση. Εφαρμόστε τον τύπο (14.32) (για $k = -1$). □

Θεώρημα 14.4

Έστω U ένα ανοικτό και πολυγωνικά συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{F}: U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ένα συνεχές και συντηρητικό διανυσματικό πεδίο του $\mathbb{R}^3$, $\varphi: U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ένα δυναμικό του $\boldsymbol{F}$ και $\psi: U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ένα διαφορίσιμο αριθμητικό πεδίο του $\mathbb{R}^3$ στο U. Τότε, οι ακόλουθοι ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι:

1. Το αριθμητικό πεδίο ψ είναι ένα δυναμικό του διανυσματικού πεδίου $\boldsymbol{F}$.

2. Υπάρχει σταθερά C με $\psi - \varphi = C$.

Απόδειξη. *1. συνεπάγεται 2.* Έστω $\boldsymbol{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ ένα σταθεροποιημένο σημείο του U και $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ τυχόν σημείο του U. Από την υπόθεση ότι το U είναι πολυγωνικά συνεκτικό υπάρχει πολυγωνική καμπύλη $\Pi = \Pi(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_k, \boldsymbol{r}_0) \subseteq U$ με κορυφές τα σημεία $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_k$ και $\boldsymbol{r}_0$. Θεωρούμε τώρα το διαφορίσιμο αριθμητικό πεδίο $f = \psi - \varphi: U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, για το οποίο ισχύει $Df(x, y, z) = 0$ για κάθε $(x, y, z) \in U$ (αφού $\boldsymbol{\nabla} f(x, y, z) = \boldsymbol{\nabla}\psi(x, y, z) - \boldsymbol{\nabla}\varphi(x, y, z) = 0$ (από την υπόθεση)) και εφαρμόζοντας το ΘΜΤΔΛ (Θεώρημα 9.34), συμπεραίνουμε ότι ισχύει

$$f(x, y, z) = f(\boldsymbol{r}_1) = f(\boldsymbol{r}_2) = \cdots = f(\boldsymbol{r}_k) = f(\boldsymbol{r}_0) = f(x_0, y_0, z_0) \equiv C$$

για κάθε $(x, y, z) \in U$ και επομένως έχουμε

$$\psi(x, y, z) = \varphi(x, y, z) + f(x, y, z) = \varphi(x, y, z) + C$$

για κάθε $(x, y, z) \in U$, δηλαδή ισχύει $\psi - \varphi = C$. □

2. συνεπάγεται 1. Προφανής.

$y, z)\, dy + R(x, y, z)\, dz$,

dx, dy και dz ορίζονται από την

ιαφορική μορφή (πρώτης τάξης) στο U. Εξ άλ-

φορική μορφή $Pdx + Qdy + Rdz$ ονομάζεται *ακριβής* (exact), όταν υπάρχει ένα διαφορίσιμο αριθμητικό πεδίο $f : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ (του $\mathbb{R}^3$ στο U) έτσι, ώστε να ισχύει

$$Df = Pdx + Qdy + Rdz, \tag{14.35}$$

όπου Df είναι το ολικό διαφορικό της f, το οποίο ορίζεται από τον τύπο (8.61).

Τώρα, από τον ορισμό του συντηρητικού διανυσματικού πεδίου και τους τύπους (8.61) και (14.35) προκύπτει η ακόλουθη

Πρόταση 14.6

Ένα διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F} = (P, Q, R) : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *του* $\mathbb{R}^3$ *στο ανοικτό υποσύνολο* U *του* $\mathbb{R}^3$ *είναι συντηρητικό τότε και μόνον τότε, όταν η διαφορική μορφή* $Pdx + Qdy + Rdz$ *είναι ακριβής.* □

Ασυμπίεστο διανυσματικό πεδίο

Ένα διαφορίσιμο *διανυσματικό πεδίο* $\mathbf{F} = (P, Q, R) : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ του $\mathbb{R}^3$ στο ανοικτό σύνολο U ονομάζεται ***ασυμπίεστο*** (incompressible), όταν ισχύει $div\mathbf{F} = 0$.

Παράδειγμα 14.11

Το διανυσματικό πεδίο $F(x, y, z) = (x^2 + ye^z, -y^2 ze^x, -2xz + yz^2 e^x)$ είναι ασυμπίεστο.

Λύση. Από τον τύπο (14.8) ευρίσκουμε

$$\begin{aligned} div\mathbf{F} &= \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + ye^z) + \frac{\partial}{\partial y}(-y^2 ze^x) + \frac{\partial}{\partial z}(-2xz + yz^2 e^x) \\ &= 2x - 2yze^x - 2x + 2yze^x = 0. \end{aligned}$$

□

Αστρόβιλο διανυσματικό πεδίο

Ένα διαφορίσιμο *διανυσματικό πεδίο* $\mathbf{F} = (P, Q, R) : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ του $\mathbb{R}^3$ στο ανοικτό σύνολο U ονομάζεται ***αστρόβιλο*** (irrotational), όταν το $curl\mathbf{F} = \mathbf{0}$, δηλαδή όταν ισχύουν

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}. \tag{14.36}$$

Παράδειγμα 14.12

Το διανυσματικό πεδίο $\boldsymbol{F}(x, y, z) = (e^y + z^2,\ xe^y + \eta\mu z,\ 2xz + y\sigma\upsilon\nu z)$ του $\mathbb{R}^3$ στο $\mathbb{R}^3$ είναι αστρόβιλο.

Λύση. Από τον τύπο (14.9) ευρίσκουμε

$$curl\,\boldsymbol{F}(x, y, z) = (\sigma\upsilon\nu z - \sigma\upsilon\nu z)\,\boldsymbol{i} + (2z - 2z)\,\boldsymbol{j} + (e^y - e^y)\,\boldsymbol{k} = \boldsymbol{0}. \qquad \square$$

Θεώρημα 14.7

Κάθε συντηρητικό C^1 διανυσματικό πεδίο $\boldsymbol{F} = (P, Q, R): U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ του $\mathbb{R}^3$ στο ανοικτό σύνολο U είναι αστρόβιλο, ενώ δεν ισχύει (πάντοτε) ο αντίστροφος ισχυρισμός.

Απόδειξη. Έστω $\varphi: U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ένα δυναμικό του $\boldsymbol{F}$. Τότε, από τη σχέση

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) = \boldsymbol{\nabla}\varphi = \boldsymbol{F} = (P, Q, R)$$

και το Θεώρημα (8.13) έχουμε

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

Κατά τον ίδιο τρόπο αποδεικνύονται και οι σχέσεις $\dfrac{\partial R}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial z}$ και $\dfrac{\partial P}{\partial z} = \dfrac{\partial R}{\partial x}$.

Εξ άλλου, όσον αφορά στον αντίστροφο ισχυρισμό, το διανυσματικό πεδίο $\boldsymbol{F}$ του Παραδείγματος 14.9 δεν είναι συντηρητικό, αλλά ισχύει $curl\,\boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$.

$\square$

Παράδειγμα 14.13

Το διανυσματικό πεδίο $\boldsymbol{F}(x, y, z) = (xy,\ ze^x,\ -x + y\eta\mu z)$ δεν είναι συντηρητικό.

Λύση. Από τον τύπο (14.9) ευρίσκουμε

$$curl\,\boldsymbol{F}(x, y, z) = (\eta\mu z - e^x)\,\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + (ze^x - x)\,\boldsymbol{k} \neq \boldsymbol{0}$$

και εφαρμόζουμε το Θεώρημα 14.7.

$\square$

$$= \left| \int_u^v [f_x(x+\tau h, t) - f_x(x, t)]\, dt \right|$$

$$\leq \left| \int_u^v |f_x(x+\tau h, t) - f_x(x, t)|\, dt \right|$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2|v-u|}\, |v-u| = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

που σημαίνει ότι

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \int_u^v \frac{\partial}{\partial x} f(x, t) dt. \qquad \square$$

Πόρισμα 14.9

Έστω I_1, I_2 και I_3 διαστήματα του $\mathbb{R}$, $I = I_1 \times I_2 \times I_3$ το αντίστοιχο ορθογώνιο του $\mathbb{R}^3$, $f : I \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ένα συνεχές αριθμητικό πεδίο του $\mathbb{R}^3$ στο I με συνεχή μερική παράγωγο $f_x : I \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ και β ένα σταθεροποιημένο σημείο του I_2. Τότε, ισχύει

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_\beta^y f(x, t, z)\, dt = \int_\beta^y \frac{\partial}{\partial x} f(x, t, z)\, dt \tag{14.38}$$

για κάθε $(x, y, z) \in I$. (Βεβαίως ισχύει και ο αντίστοιχος τύπος για τη μερική παραγώγιση $\dfrac{\partial}{\partial z}$). $\square$

Θεώρημα 14.10

Έστω $R^\circ = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times (a_3, b_3)$ ένα ανοικτό ορθογώνιο του $\mathbb{R}^3$ (όπου $a_i, b_i \in \overline{\mathbb{R}}$ με $a_i < b_i$ $(i = 1, 2, 3)$) και $\mathbf{F} = (P, Q, R) : R^\circ \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ένα αστρόβιλο C^1 διανυσματικό πεδίο του $\mathbb{R}^3$ στο R°. Τότε, το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F}$ είναι συντηρητικό και το αριθμητικό πεδίο $\varphi : R^\circ \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(x, y, z) = \int_a^x P(t, \beta, \gamma)\, dt + \int_\beta^y Q(x, t, \gamma)\, dt + \int_\gamma^z R(x, y, t)\, dt, \tag{14.39}$$

(όπου (a, β, γ) ένα (τυχόν σταθεροποιημένο) σημείο του R°) είναι ένα δυναμικό του διανυσματικού πεδίου $\mathbf{F}$.

Απόδειξη. Εφαρμόζοντας το πρώτο και δεύτερο θεμελιώδες θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού (βλ. [30] Θεωρήματα 13.45 και 13.49), τον τύπο (14.38) και τις (14.36), ευρίσκουμε

$$\frac{\partial \varphi(x,y,z)}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\int_{\gamma}^{z} R(x,y,t)\,dt = R(x,y,z)$$

$$\frac{\partial \varphi(x,y,z)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\int_{\beta}^{y} Q(x,t,\gamma)\,dt + \frac{\partial}{\partial y}\int_{\gamma}^{z} R(x,y,t)\,dt$$

$$= Q(x,y,\gamma) + \int_{\gamma}^{z} \frac{\partial}{\partial y} R(x,y,t)\,dt = Q(x,y,\gamma) + \int_{\gamma}^{z} \frac{\partial}{\partial z} Q(x,y,t)\,dt$$

$$= Q(x,y,\gamma) + Q(x,y,z) - Q(x,y,\gamma) = Q(x,y,z)$$

$$\frac{\partial \varphi(x,y,z)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\int_{a}^{x} P(t,\beta,\gamma)dt + \frac{\partial}{\partial x}\int_{\beta}^{y} Q(x,t,\gamma)dt + \frac{\partial}{\partial x}\int_{\gamma}^{z} R(x,y,t)dt$$

$$= P(x,\beta,\gamma) + \int_{\beta}^{y} \frac{\partial}{\partial x} Q(x,t,\gamma)\,dt + \int_{\gamma}^{z} \frac{\partial}{\partial x} R(x,y,t)\,dt$$

$$= P(x,\beta,\gamma) + \int_{\beta}^{y} \frac{\partial}{\partial y} P(x,t,\gamma)\,dt + \int_{\gamma}^{z} \frac{\partial}{\partial z} P(x,y,t)\,dt$$

$$= P(x,\beta,\gamma) + P(x,y,\gamma) - P(x,\beta,\gamma) + P(x,y,z) - P(x,y,\gamma) = P(x,y,z)$$

και επομένως ισχύει $\nabla\varphi = \boldsymbol{F}$. □

Παράδειγμα 14.14

Αποδείξτε ότι το διανυσματικό πεδίο

$$\boldsymbol{F}(x,y) = (e^{y} + y\,\sigma\upsilon\nu x,\ xe^{y} + \eta\mu x)$$

του $\mathbb{R}^2$ είναι συντηρητικό και βρείτε ένα δυναμικό φ αυτού.

Λύση. Από τις

$$\frac{\partial}{\partial x}(xe^{y} + \eta\mu x) = e^{y} + \sigma\upsilon\nu x = \frac{\partial}{\partial y}(e^{y} + y\,\sigma\upsilon\nu x)$$

και το Θεώρημα 14.10 έχουμε ότι το $\boldsymbol{F}$ είναι συντηρητικό και έτσι εφαρμόζοντας τον τύπο (14.39), ευρίσκουμε

$$\varphi(x,y) = \int_{0}^{x} dt + \int_{0}^{y} (xe^{t} + \eta\mu x)\,dt = x + [xe^{t} + t\,\eta\mu x]_{t=0}^{y} = xe^{y} + y\,\eta\mu x.$$