

ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1

Εισαγωγή

$\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R} = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$

Για μια διατεταγμένη n -άδα $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $\vec{x}$, δηλαδή $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Ισότητα

Δύο διανύσματα $\vec{x}, \vec{y}$ είναι ίσα όταν:

$$\vec{x} = \vec{y} \Leftrightarrow x_i = y_i \quad , \quad \text{για } i = 1, \dots, n$$

Πράξεις

Έστω $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n), \vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ και $\lambda \in \mathbb{R}$.

- 1) $\vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$ (Πρόσθεση)
- 2) $\lambda \vec{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n)$ (Βαθμωτός Πολλαπλασιασμός)

Το $\vec{0} = (0, 0, \dots, 0)$ είναι το μηδενικό στοιχείο της πρόσθεσης και το $-\vec{x} = (-1)\vec{x} = (-x_1, -x_2, \dots, -x_n)$ το αντίθετο διάνυσμα του $\vec{x}$.
Άρα

$$\vec{x} - \vec{y} = \vec{x} + (-\vec{y}) = (x_1 - y_1, x_2 - y_2, \dots, x_n - y_n)$$

Κανονική Βάση του $\mathbb{R}^n$

Θεωρούμε τα διανύσματα

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 0, 0, \dots, 0) \\ e_2 &= (0, 1, 0, \dots, 0) \\ &\vdots \\ e_n &= (0, 0, 0, \dots, 1). \end{aligned}$$

Τα $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα και παράγουν το χώρο, δηλαδή

$\forall \vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ έχουμε $\vec{x} = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$.
Άρα $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ είναι κανονική βάση του $\mathbb{R}^n$.

Εσωτερικό Γινόμενο

Έστω $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n), \vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.
Το εσωτερικό γινόμενο των $\vec{x}, \vec{y}$ ορίζεται ως:

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \sum_{i=1}^n x_i y_i = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$$

Ιδιότητες Εσωτερικού Γινομένου

Έστω $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^n$ και $\lambda \in \mathbb{R}$. Τότε ισχύουν:

- 1) $\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{y} \cdot \vec{x}$
- 2) $\vec{x} \cdot (\vec{y} + \vec{z}) = \vec{x} \cdot \vec{y} + \vec{x} \cdot \vec{z}$
- 3) $(\lambda \vec{x}) \cdot \vec{y} = \lambda(\vec{x} \cdot \vec{y}) = \vec{x} \cdot (\lambda \vec{y})$
- 4) $\vec{0} \cdot \vec{x} = 0$.

Ευκλείδεια Νόρμα

Νόρμα στον $\mathbb{R}^n$ καλείται η απεικόνιση $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ η οποία ικανοποιεί τις εξής ιδιότητες:

- 1) $\|\vec{x}\| \geq 0 \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$ και $\|\vec{x}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$
- 2) $\|\lambda \vec{x}\| = |\lambda| \|\vec{x}\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$
- 3) $\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\| \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$.

Ευκλείδεια Νόρμα στον $\mathbb{R}^n$ καλείται η απεικόνιση $\|\cdot\|_2 : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ ώστε $\forall \vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\|\vec{x}\|_2(= \|\vec{x}\|) = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$$

και η οποία ικανοποιεί τις παραπάνω 4 ιδιότητες νόρμας.

Ανισότητα Cauchy – Schwarz

Για κάθε $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ ισχύει η ανισότητα *Cauchy – Schwarz*

$$|\vec{x} \cdot \vec{y}| \leq \|\vec{x}\| \|\vec{y}\|$$

Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $\vec{y} = \lambda \vec{x}$ ή $\vec{x} = \lambda \vec{y}$ (δηλαδή $\vec{x} \parallel \vec{y}$).

Απόδειξη: Αν $\vec{x} = \vec{y} = \vec{0}$ ισχύει. Έστω ένα $\lambda \in \mathbb{R}$ και $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$.

$$0 \leq \|\lambda \vec{x} + \vec{y}\|^2 = (\lambda \vec{x} + \vec{y}) \cdot (\lambda \vec{x} + \vec{y}) = \lambda \vec{x} \cdot \lambda \vec{x} + 2\lambda \vec{x} \cdot \vec{y} + \vec{y} \cdot \vec{y} = \lambda^2 \|\vec{x}\|^2 + 2\lambda \vec{x} \cdot \vec{y} + \|\vec{y}\|^2.$$

Πολυώνυμο 2ου βαθμού ως προς το $\lambda \in \mathbb{R}$. Άρα

$$\Delta \leq 0 \Rightarrow 4(\vec{x} \cdot \vec{y})^2 - 4\|\vec{x}\|^2 \|\vec{y}\|^2 \leq 0 \Rightarrow 4(\vec{x} \cdot \vec{y})^2 \leq 4\|\vec{x}\|^2 \|\vec{y}\|^2 \Rightarrow |\vec{x} \cdot \vec{y}| \leq \|\vec{x}\| \|\vec{y}\|.$$

Ευκλείδεια Απόσταση

Έστω $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$. Η Ευκλείδεια απόσταση μεταξύ των $\vec{x}$ και $\vec{y}$ ορίζεται ως:

$$d(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\|$$

Ιδιότητες Ευκλείδειας Απόστασης

Έστω $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^n$. Τότε ισχύουν:

- 1) $d(\vec{x}, \vec{y}) \geq 0$ και $d(\vec{x}, \vec{y}) = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{y}$
- 2) $d(\vec{x}, \vec{y}) = d(\vec{y}, \vec{x})$
- 3) $d(\vec{x}, \vec{y}) \leq d(\vec{x}, \vec{z}) + d(\vec{z}, \vec{y})$ (Τριγωνική Ανισότητα)

Γωνία δύο μη-μηδενικών διανυσμάτων

Έστω $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$. Για τη γωνία $\theta = \angle(\vec{x}, \vec{y})$ των $\vec{x}, \vec{y}$ ισχύει ο τύπος

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \|\vec{x}\| \|\vec{y}\| \cos \theta, \quad \theta \in [0, \pi].$$

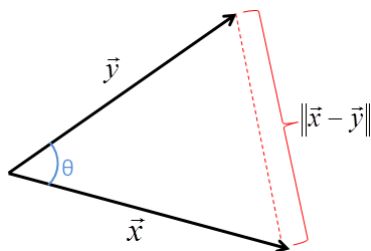
Απόδειξη: Από το νόμο των συνημιτόνων ισχύει ότι:

$$\|\vec{x} - \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 - 2\|\vec{x}\| \|\vec{y}\| \cos \theta.$$

Επιπλέον, από τον ορισμό της Ευκλείδειας νόρμας προκύπτει ότι:

$$\|\vec{x} - \vec{y}\|^2 = (\vec{x} - \vec{y}) \cdot (\vec{x} - \vec{y}) = \vec{x} \cdot \vec{x} + \vec{y} \cdot \vec{y} - 2\vec{x} \cdot \vec{y} = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 - 2\vec{x} \cdot \vec{y}.$$

Επομένως, από τις παραπάνω δύο σχέσεις έπεται η απόδειξη.



Σχήμα 1: Γωνία $\theta = \angle(\vec{x}, \vec{y})$

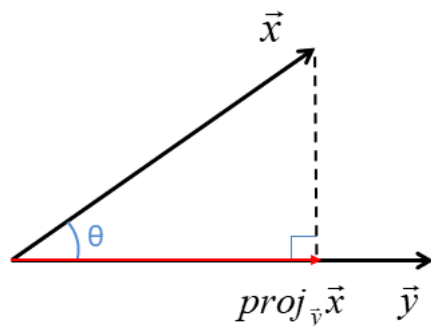
Κάθετα Διανύσματα

Έστω $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$. Τα $\vec{x}, \vec{y}$ καλούνται κάθετα όταν το εσωτερικό τους γινόμενο είναι μηδέν. Δηλαδή:

$$\vec{x} \perp \vec{y} \Leftrightarrow \vec{x} \cdot \vec{y} = 0$$

Απόδειξη: Η απόδειξη έπεται άμεσα από τη σχέση $\vec{x} \cdot \vec{y} = \|\vec{x}\| \|\vec{y}\| \cos \theta$, καθώς όταν τα $\vec{x}, \vec{y}$ είναι κάθετα ισχύει $\theta = 90^\circ$, δηλαδή $\cos \theta = 0$.

Προβολή Διανύσματος



Σχήμα 2: Προβολή του διανύσματος $\vec{x}$ στο $\vec{y}$

Έστω $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ με $\vec{y} \neq \vec{0}$. Η προβολή ενός διανύσματος $\vec{x}$ πάνω σε ένα μη-μηδενικό διάνυσμα $\vec{y}$ συμβολίζεται με $proj_{\vec{y}}(\vec{x})$ και δίνεται από τον τύπο:

$$proj_{\vec{y}}(\vec{x}) = \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{\|\vec{y}\|^2} \vec{y}$$

Επιπλέον, η αριθμητική συνιστώσα (προβολή) του $\vec{x}$ κατά την κατεύθυνση του $\vec{y}$ συμβολίζεται με $comp_{\vec{y}}(\vec{x})$ και δίνεται από:

$$comp_{\vec{y}}(\vec{x}) = \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{\|\vec{y}\|}$$

Εξωτερικό Γινόμενο

Έστω $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3), \vec{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$. Το εξωτερικό γινόμενο των $\vec{x}, \vec{y}$ ορίζεται ως:

$$\begin{aligned} \vec{x} \times \vec{y} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \\ &= \vec{i}(x_2 y_3 - x_3 y_2) - \vec{j}(x_1 y_3 - x_3 y_1) + \vec{k}(x_1 y_2 - x_2 y_1), \end{aligned}$$

όπου $\vec{i} = (1, 0, 0), \vec{j} = (0, 1, 0), \vec{k} = (0, 0, 1)$.

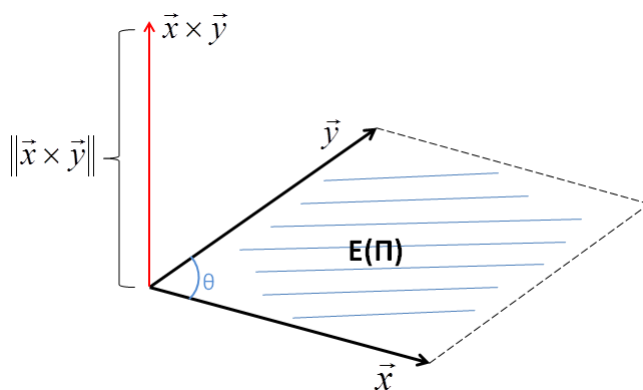
Ιδιότητες Εξωτερικού Γινομένου

Έστω $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$ και $\lambda \in \mathbb{R}$. Τότε ισχύουν:

- 1) $\vec{x} \times \vec{x} = \vec{0}$
- 2) $\vec{x} \times \vec{y} = -\vec{y} \times \vec{x}$
- 3) $\vec{x} \times (\lambda \vec{y}) = \lambda(\vec{x} \times \vec{y})$
- 4) $(\vec{x} \times \vec{y}) \perp \vec{x}$ και $(\vec{x} \times \vec{y}) \perp \vec{y}$
- 5) $\|\vec{x} \times \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 \|\vec{y}\|^2 - (\vec{x} \cdot \vec{y})^2$ (Ταυτότητα *Lagrange*)
- 6) $\|\vec{x} \times \vec{y}\| = \|\vec{x}\| \|\vec{y}\| \sin \theta$

Παρατήρηση: Η ιδιότητα 6 ερμηνεύεται ως εξής:

Έστω $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$. Η νόρμα του εξωτερικού τους γινομένου $\|\vec{x} \times \vec{y}\|$ ισούται με το εμβαδόν $E(\Pi)$ του παραλληλογράμμου $\Pi = \{\lambda \vec{x} + \mu \vec{y}, 0 \leq \lambda, \mu \leq 1\}$.



Σχήμα 3: $E(\Pi) = \|\vec{x} \times \vec{y}\| = \|\vec{x}\| \|\vec{y}\| \sin \theta$

Σημείωση:

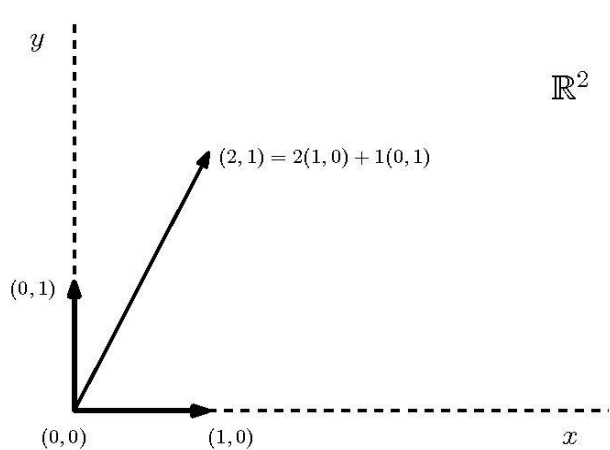
- 1) Για το εξωτερικό γινόμενο δεν ισχύει η προσεταιριστική ιδιότητα.
- 2) Το εσωτερικό γινόμενο είναι μια απεικόνιση $\cdot : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$.
Επομένως το $\vec{x} \cdot \vec{y}$ για $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ είναι ένας πραγματικός αριθμός.
Το εξωτερικό γινόμενο είναι μια απεικόνιση $\times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$.
Επομένως το $\vec{x} \times \vec{y}$ για $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$ είναι ένα διάνυσμα.

Μεικτό Γινόμενο

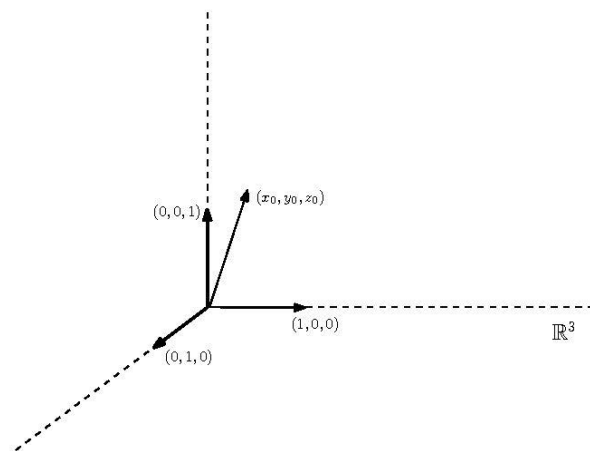
Έστω $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$, $\vec{z} = (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{R}^3$.

Το μεικτό γινόμενο των $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ ορίζεται ως:

$$\begin{aligned} \vec{x} \cdot (\vec{y} \times \vec{z}) &= (x_1, x_2, x_3) \cdot \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} \\ &= x_1 \begin{vmatrix} y_2 & y_3 \\ z_2 & z_3 \end{vmatrix} - x_2 \begin{vmatrix} y_1 & y_3 \\ z_1 & z_3 \end{vmatrix} + x_3 \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

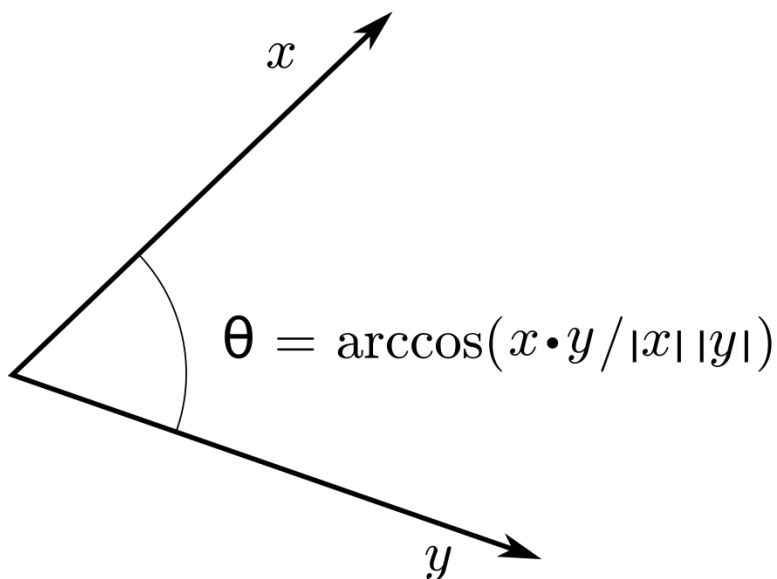


Ο διανυσματικός χώρος $\mathbb{R}^2$

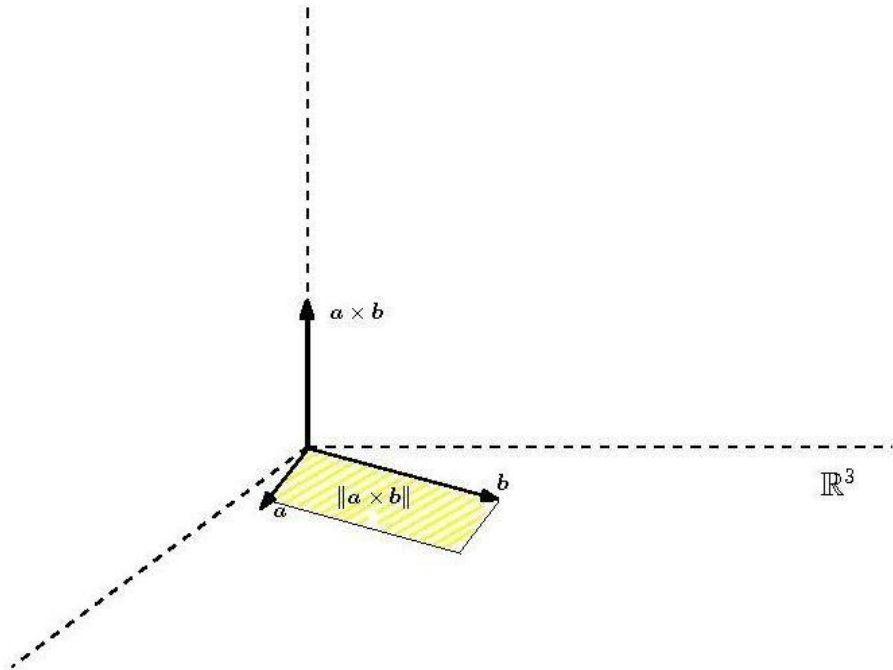


Ο διανυσματικός χώρος $\mathbb{R}^3$

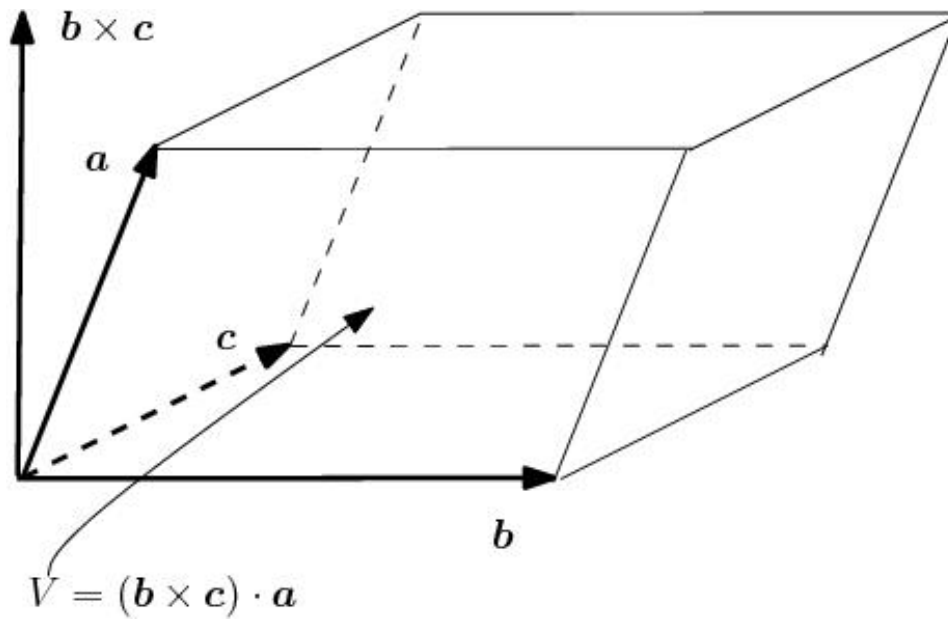
Εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^n$: Ορισμός, Ιδιότητες, Γωνία μεταξύ διανυσμάτων, Κάθετα διανύσματα, Διανυσματικές προβολές.



Εξωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^3$: Ορισμός, Ιδιότητες, Εμβαδόν παραλληλογράμμου.



Μεικτό γινόμενο στον $\mathbb{R}^3$: Ορισμός, Όγκος παραλληλεπιπέδου



ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Έστω τα $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^2$ με $\vec{x} = (3, 5)$ και $\vec{y} = (-4, 2)$. Να βρεθούν:
- 1) $\vec{x} + \vec{y}$, 2) $\vec{x} - \vec{y}$, 3) $\vec{y} - \vec{x}$, 4) $-\vec{x} + 2\vec{y}$
 5) $\|\vec{x}\|$, 6) $\|\vec{y}\|$, 7) $\vec{x} \cdot \vec{y}$, 8) $\|\vec{x} + \vec{y}\|$

ΛΥΣΗ

- 1) $\vec{x} + \vec{y} = (3, 5) + (-4, 2) = (3 - 4, 5 + 2) = (-1, 7)$
- 2) $\vec{x} - \vec{y} = (3, 5) - (-4, 2) = (3 - (-4), 5 - 2) = (7, 3)$
- 3) $\vec{y} - \vec{x} = (-4, 2) - (3, 5) = (-4 - 3, 2 - 5) = (-7, -3)$
- 4) $-\vec{x} + 2\vec{y} = -(3, 5) + 2(-4, 2) = (-3 - 8, -5 + 4) = (-11, -1)$
- 5) $\|\vec{x}\| = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}} = \sqrt{(3, 5) \cdot (3, 5)} = \sqrt{9 + 25} = \sqrt{34}$
- 6) $\|\vec{y}\| = \sqrt{\vec{y} \cdot \vec{y}} = \sqrt{(-4, 2) \cdot (-4, 2)} = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20}$
- 7) $\vec{x} \cdot \vec{y} = (3, 5) \cdot (-4, 2) = -12 + 10 = -2$
- 8) $\|\vec{x} + \vec{y}\| \stackrel{\text{ερώτημα 1}}{=} \|(-1, 7)\| = \sqrt{(-1, 7) \cdot (-1, 7)} = \sqrt{1 + 49} = \sqrt{50}$

2. Έστω τα $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^2$ με $\vec{x} = (-3, -2)$ και $\vec{y} = (2, 1)$. Να βρεθεί το $\cos\theta$ με $\theta = \angle(\vec{y} - \vec{x}, \vec{y})$

ΛΥΣΗ

$$\begin{aligned} (\vec{y} - \vec{x}) \cdot \vec{y} &= \|\vec{y} - \vec{x}\| \|\vec{y}\| \cos\theta \Rightarrow (5, 3) \cdot (2, 1) = \|(5, 3)\| \|(2, 1)\| \cos\theta \\ \Rightarrow 10 + 3 &= \sqrt{(5, 3) \cdot (5, 3)} \sqrt{(2, 1) \cdot (2, 1)} \cos\theta \Rightarrow 13 = \sqrt{34} \sqrt{5} \cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{13}{\sqrt{170}} \end{aligned}$$