

Παράδειγμα 8.18

$$\text{Η συνάρτηση } f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

δεν είναι διαφορίσιμη στο $(0, 0)$.

Λύση. Υπολογίζουμε τις μερικές παραγώγους

$$f_x(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h^3}{h^2}}{h} = 1$$

$$f_y(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0$$

Έτσι, η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 0)$ με ανάδελτα $\nabla f(0, 0) = (1, 0)$. Όμως, δεν υπάρχει (στο $\overline{\mathbb{R}}$) το

$$\begin{aligned} & \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{|f(x, y) - f(0, 0) - \nabla f(0, 0) \cdot (x, y)|}{\|(x, y) - (0, 0)\|} \\ &= \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{\left| \frac{x^3}{x^2 + y^2} - (1, 0) \cdot (x, y) \right|}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{|x| y^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, \end{aligned}$$

διότι για τη συνάρτηση $\varphi(x, y) = \frac{|x| y^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$ ισχύουν

$$\varphi(x, 0) = 0 \rightarrow 0 \quad \text{και} \quad \varphi(x, x) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \rightarrow \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

(καθώς το $(x, y) \rightarrow (0, 0)$), και επομένως από το Θεώρημα 8.20 έχουμε ότι η συνάρτηση f δεν είναι διαφορίσιμη στο σημείο $(0, 0)$. $\square$

Παράδειγμα 8.19

Η συνάρτηση $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ δεν είναι διαφορίσιμη στο $(0, 0)$.

Λύση. Ευρίσκουμε τις μερικές παραγώγους

$$f_x(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = 1$$

$$f_y(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{h} = -1$$

Έτσι, η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 0)$ με $\nabla f(0, 0) = (1, -1)$. Όμως, δεν υπάρχει (στο $\mathbb{R}$) το

$$\begin{aligned} & \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(x, y) - f(0, 0) - \nabla f(0, 0) \cdot (x, y)}{\|(x, y) - (0, 0)\|} \\ &= \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{\frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} - (1, -1) \cdot (x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^2 y - x y^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, \end{aligned}$$

διότι για τη συνάρτηση $\varphi(x, y) = \frac{x^2 y - x y^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$ ισχύουν

$$\varphi(x, x) = 0 \rightarrow 0 \quad \text{και} \quad \varphi(-|x|, |x|) = \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}$$

(καθώς το $(x, y) \rightarrow (0, 0)$, οπότε και το $x \rightarrow 0$). Επομένως, από το Θεώρημα 8.20, η συνάρτηση f δεν είναι διαφορίσιμη στο $(0, 0)$. $\square$

Πρόταση 8.22

Έστω $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ μία πραγματική συνάρτηση, η οποία είναι διαφορίσιμη στο σημείο a .

Παράδειγμα 8.20

Η συνάρτηση $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ δεν είναι διαφορίσιμη στο σημείο $(0, 0)$.

Λύση. Από τό Παράδειγμα 7.18, η συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο $(0, 0)$ και επομένως από το Πόρισμα 8.23 έχουμε ότι η f δεν είναι διαφορίσιμη στο $(0, 0)$. $\square$

Έστω $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ μία πραγματική συνάρτηση n μεταβλητών, η οποία είναι διαφορίσιμη σε ένα σημείο $\mathbf{a}$ του U . Τότε, από την (8.50) έχουμε

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} |f(\mathbf{x}) - (f(\mathbf{a}) + Df(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a}))| = 0$$

Παράδειγμα 8.21

$$\text{Η συνάρτηση } f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \eta\mu \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

είναι διαφορίσιμη στο σημείο $(0, 0)$, αλλά δεν είναι C^1 συνάρτηση στο $(0, 0)$.

Λύση. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^2$ με μερικές παραγώγους

$$f_x(x, y) = \begin{cases} 2x \eta\mu \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \sigma\upsilon\nu \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$f_y(x, y) = \begin{cases} 2y \eta\mu \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \sigma\upsilon\nu \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Εξ άλλου, παρατηρούμε ότι ισχύει

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(x, y) - f(0, 0) - \nabla f(0, 0) \cdot (x, y)}{\|(x, y) - (0, 0)\|}$$

$$= \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(x, y) - (0, 0) \cdot (x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{(x^2 + y^2) \eta\mu \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$= \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \sqrt{x^2 + y^2} \eta\mu \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0,$$

διότι

$$\left| \sqrt{x^2 + y^2} \eta\mu \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| \leq \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow 0$$

(καθώς $(x, y) \rightarrow (0, 0)$). Έτσι, σύμφωνα με το Θεώρημα 8.20, η συνάρτηση f είναι διαφορίσιμη στο $(0, 0)$.

Όμως, η συνάρτηση f_x (και λόγω συμμετρίας και η συνάρτηση f_y) δεν είναι συνεχής στο $(0, 0)$, διότι δεν υπάρχει (στο $\overline{\mathbb{R}}$) το

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \sigma\upsilon\nu \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

αφού για τη συνάρτηση

$$\varphi(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \sigma\upsilon\nu \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

και τις ακολουθίες

$$\left(0, \frac{1}{n\pi}\right) \rightarrow (0, 0) \quad \text{και} \quad \left(\frac{1}{2\sqrt{2}n\pi}, \frac{1}{2\sqrt{2}n\pi}\right) \rightarrow (0, 0)$$

έχουμε

$$\varphi\left(0, \frac{1}{n\pi}\right) = 0 \quad \text{και} \quad \varphi\left(\frac{1}{2\sqrt{2}n\pi}, \frac{1}{2\sqrt{2}n\pi}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 2n\pi = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

και επομένως η f δεν είναι C^1 συνάρτηση. $\square$

Στο ακόλουθο θεώρημα καταγράφεται η συσχέτιση των εννοιών διαφορίσιμη συνάρτηση και C^1 συνάρτηση.

Θεώρημα 8.25

Έστω $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ μία πραγματική συνάρτηση η μεταβλητών, η οποία είναι C^1 συνάρτηση σε ένα σημείο $\mathbf{a}$ του ανοικτού συνόλου U . Τότε, η συνάρτηση f είναι διαφορίσιμη στο σημείο $\mathbf{a}$, ενώ δεν ισχύει (πάντοτε) ο αντίστροφος ισχυρισμός (Παράδειγμα 8.21).

Απόδειξη. Για λόγους σαφήνειας και απλότητας, αποδεικνύουμε το θεώρημα για $n = 2$ (με $\mathbf{a} = (a, b)$ και $\mathbf{x} = (x, y)$). Έτσι, έστω ένα $\varepsilon > 0$. Από τη συνέχεια των μερικών παραγώγων f_x και f_y στο σημείο (a, b) , υπάρχει $\delta > 0$ έτσι, ώστε να ισχύουν

$$(a) \quad |f_x(x, y) - f_x(a, b)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{και} \quad |f_y(x, y) - f_y(a, b)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

για κάθε $(x, y) \in U$ με $\|(x, y) - (a, b)\| < \delta$. Σταθεροποιούμε τώρα ένα $(x, y) \in U$ με $\|(x, y) - (a, b)\| < \delta$, γράφουμε

$$(b) \quad f(x, y) - f(a, b) = (f(x, y) - f(a, y)) + (f(a, y) - f(a, b))$$

και συμβολίζουμε με $I_{a,x}$ και $I_{b,y}$ τα κλειστά διαστήματα με άκρα τα a, x και b, y αντιστοίχως. Από το (κλασικό) θεώρημα μέσης τιμής του Διαφορικού Λογισμού (βλ. [30] Θεώρημα 10.34) για τη συνάρτηση

$$\sigma(t) = f(t, y), \quad t \in I_{a,x}$$

KΑΤΕΥΘΥΝΟΜΕΝΗ ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ

Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοιχτό, $\vec{x}_0 \in A$ σταθερό, $\vec{\alpha} \in \mathbb{R}^n$ με $\|\vec{\alpha}\|=1$ και $f: A \rightarrow \mathbb{R}^m$. Από A ανοιχτό $\Rightarrow \exists \varepsilon > 0$:

$$S(\vec{x}_0, \varepsilon) \subseteq A \Rightarrow \forall t \in I = (-\varepsilon, \varepsilon): \vec{x}_0 + t\vec{\alpha} \in S(\vec{x}_0, \varepsilon) \subseteq A.$$

Θέτουμε $g(t) := \vec{x}_0 + t\vec{\alpha}$, $t \in I$. Η g είναι διαφορίσιμη με $g'(t) = \vec{\alpha}$, $\forall t \in I$. Αν η $f \circ g: I \rightarrow \mathbb{R}^m$ είναι διαφορίσιμη στο 0, η $(f \circ g)'(0)$ λέγεται κατευθυνόμενη παράγωγος της f στο $\vec{x}_0$ προς την κατεύθυνση του $\vec{\alpha}$, και συμβολίζεται με $(D_{\vec{\alpha}} f)(\vec{x}_0)$.

Προσοχή στη διαφορά στο συμβολισμό!

$$(D_{\vec{\alpha}} f)(\vec{x}_0), \quad (Df)_{\vec{x}_0}(\vec{\alpha})$$

$\uparrow$ κατεύθυνση $\nwarrow$ επίπεδο επίρριξης.

Παρατηρήσεις (1) Αν f διαφορίσιμη, τότε $f \circ g$ διαφορ. και

$$(f \circ g)'(t) = (\nabla_{g(t)} f) \cdot g'(t) = (\nabla_{g(t)} f) \cdot \vec{\alpha}.$$

Ιδιαίτερως:

$$(D_{\vec{\alpha}} f)(\vec{x}_0) = (f \circ g)'(0) = (\nabla_{\vec{x}_0} f) \cdot (\vec{\alpha}) = (Df)_{\vec{x}_0}(\vec{\alpha}).$$

(2) Αν $\vec{\alpha} = e_i$, η κατευθυνόμενη παράγωγος συμπίπτει με την μερική παράγωγο ως προς την i -μεταβλητή:

$$(D_{e_i} f)(\vec{x}_0) = (\nabla_{\vec{x}_0} f) \cdot e_i = (Df)_{\vec{x}_0}(e_i) = \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_{\vec{x}_0}.$$

(3) f διαφορίσιμη $\Rightarrow$ υπάρχει κατευθυνόμενη παράγωγος προς οποιαδήποτε κατεύθυνση.

(4) Το αντίστροφο δεν ισχύει. Μπορεί να υπάρχουν όλες οι κατευθ. παράγωγοι, χωρίς η f να είναι διαφορίσιμη, ούτε συνεχής.

Άσκηση $f(x,y,z) = xye^{x^2+y^2+z^2}$. Να υπολογιστεί η

$D_{\vec{a}} f(0,1,1)$ στην κατεύθυνση $\vec{a} = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$.

Απάντ. Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} \nabla_{(0,1,1)} f &= \left(\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(0,1,1)}, \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(0,1,1)}, \frac{\partial f}{\partial z} \Big|_{(0,1,1)} \right) = \\ &= \left(yze^{x^2+y^2+z^2} + x^2 xye^{x^2+y^2+z^2}, xze^{x^2+y^2+z^2} + 2xyze^{x^2+y^2+z^2}, \right. \\ &\quad \left. xye^{x^2+y^2+z^2} + 2xyz^2e^{x^2+y^2+z^2} \right) \Big|_{(0,1,1)} = \\ &= (e^2, 0, 0). \end{aligned}$$

Άρα

$$(D_{\vec{a}} f)(0,1,1) = \left(\nabla_{(0,1,1)} f \right) \cdot \vec{a} = (e^2, 0, 0) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} e^2.$$

Παρατήρηση Έστω $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$. Αν $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^3$ σταθ.

και $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$, η $(D_{\vec{a}} f)(\vec{x}_0) = (\nabla_{\vec{x}_0} f) \cdot \vec{a}$ είναι εσωτ.

γινόμενο των διανυσμάτων $\nabla_{\vec{x}_0} f$ και $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$. Απο

τις ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου (σελ. 8)

$$(D_{\vec{\alpha}} f)(\vec{x}_0) = \|\nabla_{\vec{x}_0} f\| \cdot \underbrace{\|\vec{\alpha}\|}_{\leq 1} \cdot \cos \theta, \text{ άρα } (D_{\vec{\alpha}} f)(\vec{x}_0) \text{ γίνεται}$$

μέγιστη για $\cos \theta = 1$, δηλ. $\theta = 0^\circ$, και ελάχιστη για

$\cos \theta = -1$, δηλ. $\theta = 180^\circ$. Επομένως έχουμε μέγιστη

τιμή για $\vec{\alpha} = \frac{\nabla_{\vec{x}_0} f}{\|\nabla_{\vec{x}_0} f\|}$ και ελάχιστη για $\vec{\alpha} = -\frac{\nabla_{\vec{x}_0} f}{\|\nabla_{\vec{x}_0} f\|}$.

Άσκηση Έστω $f(x, y, z) = x + y^2 + z^3$. Για ποιές κατευθύνσεις η κατευθυνόμενη παράγωγος της f στο $(0, 0, 0)$ παίρνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή; Το ίδιο για $\vec{x}_0 = (1, 1, 1)$.

Απάντ. $\nabla_{(x, y, z)} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) = (1, 2y, 3z)$, άρα

$\nabla_{(0, 0, 0)} f = (1, 0, 0)$, επομένως: η $D_{\vec{\alpha}} f(0, 0, 0)$ γίνεται

μέγιστη για $\vec{\alpha} = \frac{(1, 0, 0)}{\|(1, 0, 0)\|} = (1, 0, 0)$ και

ελάχιστη για $\vec{\alpha} = -\frac{(1, 0, 0)}{\|(1, 0, 0)\|} = (-1, 0, 0)$.

$\nabla_{(1, 1, 1)} f = (1, 2, 3)$, επομένως μέγιστη $(D_{\vec{\alpha}} f)(1, 1, 1)$

για $\vec{\alpha} = \frac{(1, 2, 3)}{\|(1, 2, 3)\|} = \frac{1}{\sqrt{14}} \cdot (1, 2, 3)$ και ελάχιστη

για $\vec{\alpha} = -\frac{1}{\sqrt{14}} (1, 2, 3)$.

0.4 Διαφόριση συναρτήσεων

Ορισμός

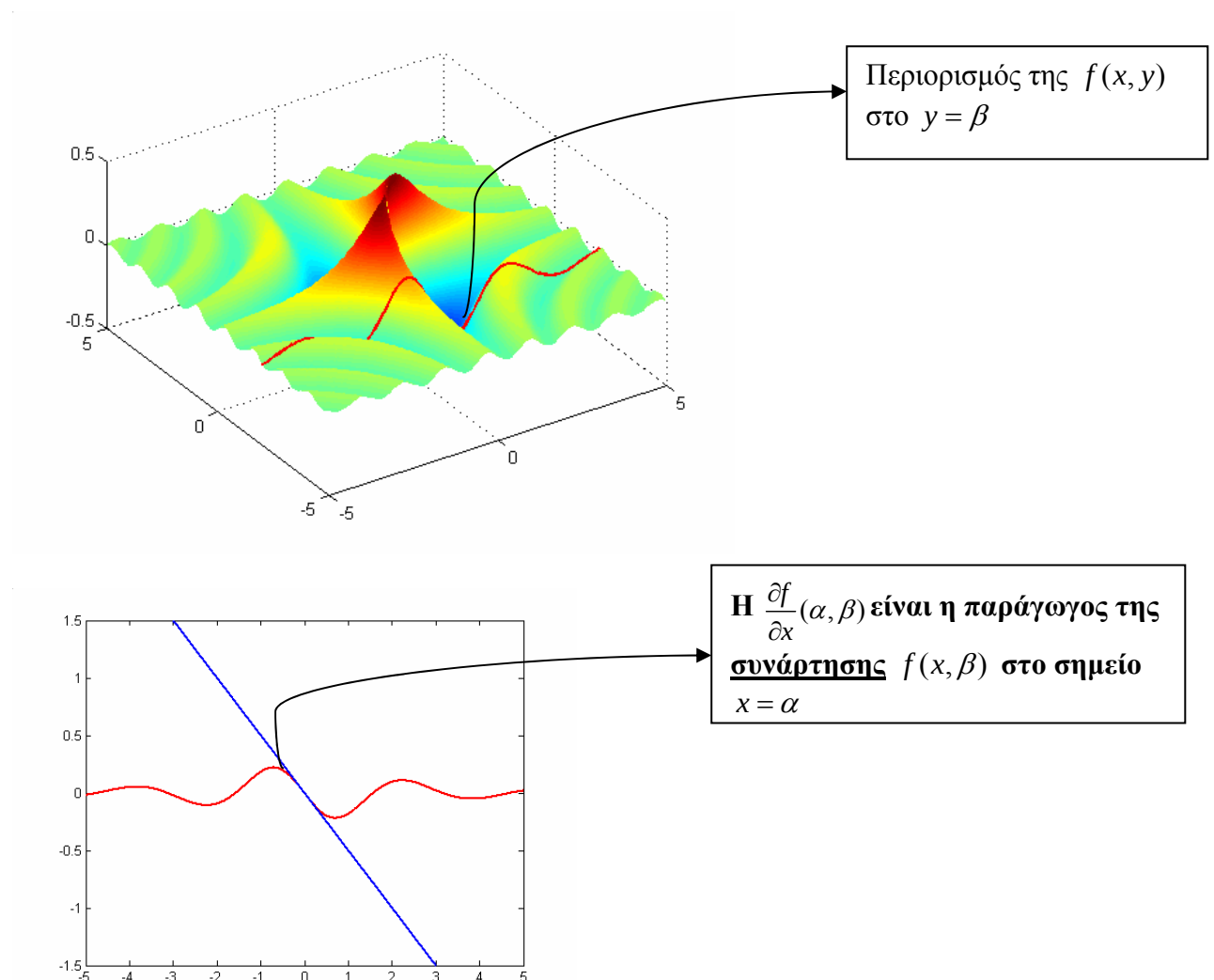
Έστω $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ μια πραγματική συνάρτηση δύο μεταβλητών με A ανοικτό και $(\alpha, \beta) \in A$. Τότε οι μερικές παράγωγοι της συνάρτησης f ως προς τις μεταβλητές x και y στο σημείο (α, β) ορίζονται από τους τύπους

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\alpha, \beta) = f_x(\alpha, \beta) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\alpha + h, \beta) - f(\alpha, \beta)}{h}$$

και

$$\frac{\partial f}{\partial y}(\alpha, \beta) = f_y(\alpha, \beta) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\alpha, \beta + h) - f(\alpha, \beta)}{h}$$

υπό την προϋπόθεση ότι υπάρχουν (στο $\mathbb{R}$) τα αναφερόμενα όρια .



Άσκηση 4.1

Υπολογίστε τις πρώτες μερικές παραγώγους της συνάρτησης

- i. $f(x, y) = x^3 y^5 - 2x^2 y + x^4$
- ii. $f(x, y) = e^{xy} \eta \mu \chi \sigma \upsilon \nu y + x^{yz}$
- iii. $f(x, y, z) = z \eta \mu \frac{y}{x+z} + \sigma \upsilon \nu(x+z^2)$
- iv. $f(x, y, z) = (x^2 + y^3) \ln(1+z^2) + \tau \omicron \xi \epsilon \phi(x+z)$

Άσκηση 4.2

Εξετάστε αν υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι $f_x(0,0)$, $f_y(0,0)$ και αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $(0,0)$.

- i. $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & , (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$
- ii. $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x}{x^2 + y^2} \eta \mu y & , (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$
- iii. $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 - y^4}{x - y^4} & , x - y^4 \neq 0 \\ 0 & , x - y^4 = 0 \end{cases}$
- iv. $f(x, y) = \begin{cases} \frac{\eta \mu(x^2 y^2)}{x^2 + y^2} & , (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

Λύση

- i. Παρατήρηση 8.6, σελ. 339¹
- ii. $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$. Η f δεν είναι συνεχής στο $(0,0)$, διότι δεν υπάρχει το

$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$, αφού για $x = 0$ είναι

$$\lim_{(0,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x}{x^2 + y^2} \eta \mu y = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0}{y^2} \eta \mu y = \lim_{y \rightarrow 0} 0 = 0 \text{ και για } y = x$$

$$\lim_{(x,x) \rightarrow (0,0)} \frac{x}{x^2 + y^2} \eta \mu y = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2x^2} \eta \mu x = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x}{x} = \frac{1}{2}$$

¹ Οι σελίδες αναφέρονται στο Διδακτικό Βιβλίο

iii. $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$. Η f δεν είναι συνεχής στο $(0,0)$, διότι δεν υπάρχει το

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y), \text{ αφού για } y=0 \quad \lim_{(x,0) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 - y^4}{x - y^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0 \text{ και για}$$

$$x=0 \quad \lim_{(0,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 - y^4}{x - y^4} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-y^4}{-y^4} = \lim_{y \rightarrow 0} 1 = 1$$

iv. $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$. Η f είναι συνεχής στο $(0,0)$, αφού είναι

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\eta\mu(x^2 y^2)}{x^2 + y^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\eta\mu(x^2 y^2)}{x^2 y^2} \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2} = 1 \cdot 0 = 0 = f(0,0)$$

Άσκηση 4.3

Υπολογίστε όλες τις δευτερές μερικές παραγώγους της συνάρτησης

i. $f(x, y, z) = ze^{xy} + \sigma\upsilon\nu(x + y^3)$

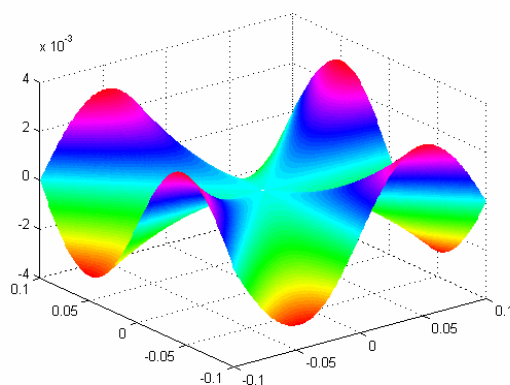
ii. $f(x, y, z) = x^{y+z} + \tau\omicron\xi\epsilon\phi(x + y^2 + z^3)$

Άσκηση 4.4

Υπολογίστε τις μερικές παραγώγους f_x , f_y , f_{xy} , f_{yx} της συνάρτησης

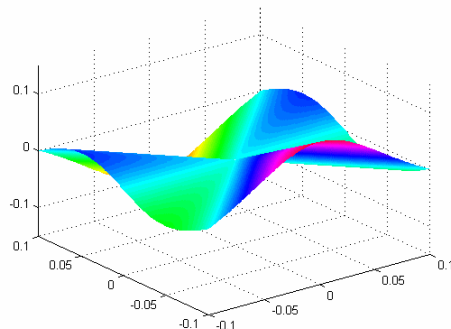
$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & , (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Αποδείξτε ότι $f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0)$ και ότι οι f_{xy} , f_{yx} είναι ασυνεχείς στο $(0,0)$.



$$\text{Η γραφική παράσταση της } f_x(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 y + 4x^2 y^3 - y^5}{(x^2 + y^2)^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases} \text{ και της}$$

$f_x(0, y) = -y$ φαίνονται στο παρακάτω σχήμα



Λύση

$f_{xy}(0,0) = -1$, $f_{yx}(0,0) = 1$. Παράδειγμα 8.14, σελ. 348-349. Οι f_{xy} , f_{yx} είναι ασυνεχείς στο $(0,0)$. Πράγματι

α' τρόπος: Εάν η f_{xy} ήταν συνεχής στο $(0,0)$, τότε θα ήταν και η f_{yx} (λόγω της μορφής της συνάρτησης). Οπότε από το Θεώρημα 8.13, Clairaut, σελ. 350, θα έπρεπε $f_{xy}(0,0) = f_{yx}(0,0)$. Άτοπο, άρα οι f_{xy} , f_{yx} δεν είναι συνεχείς στο $(0,0)$

β' τρόπος: Υπολογίστε τις $f_{xy}(x,y)$, $f_{yx}(x,y)$ για $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ και αποδείξτε την ασυνέχεια αυτών στο $(0,0)$.

Διαφορισιμότητα συναρτήσεων

Έστω $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ μια πραγματική συνάρτηση δύο μεταβλητών με A ανοικτό και $(\alpha, \beta) \in A$.

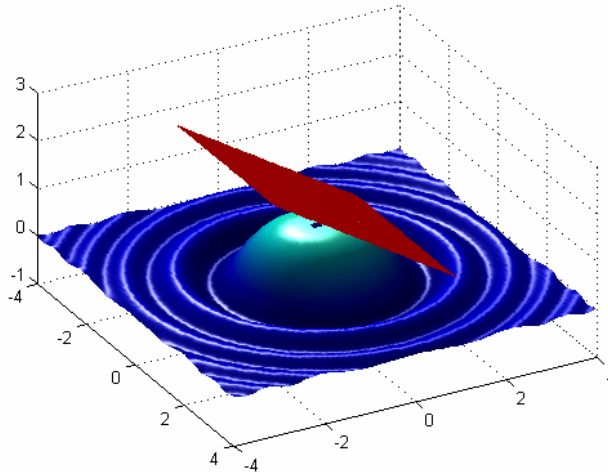
- i. Η f είναι **διαφορίσιμη** στο (α, β) αν και μόνον αν υπάρχει γραμμικός μετασχηματισμός $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, έτσι ώστε να ισχύει

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (\alpha,\beta)} \frac{f(x,y) - f(\alpha,\beta) - T(x-\alpha, y-\beta)}{\sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2}} = 0$$

- ii. Εάν η f είναι διαφορίσιμη στο (α, β) ο γραμμικός μετασχηματισμός $Df(\alpha, \beta) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, με $Df(\alpha, \beta)(x, y) = f_x(\alpha, \beta)x + f_y(\alpha, \beta)y$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ είναι το διαφορικό της f στο (α, β) .

(Ορισμός 8.14 σελ. 354, Θεώρημα 8.16 σελ 356-357, Ορισμός 8.17 σελ. 357, Θεώρημα 8.20 σελ. 359).

Στην γραφική παράσταση που ακολουθεί, το επίπεδο που φαίνεται είναι το **εφαπτόμενο επίπεδο**. Το **διαφορικό** είναι ο γραμμικός μετασχηματισμός που περιγράφει το παράλληλο σε αυτό επίπεδο που περνά από την **αρχή των αξόνων**.



Άσκηση 4.5

Υπολογίστε την κλίση (∇ - ανάδελτα) (για τις i,ii), τον πίνακα Jacobi (για τις iii,iv) και το διαφορικό της δοσμένης συνάρτησης στο αναφερόμενο σημείο.

- i. $f(x, y) = x^2y + y\eta\mu x$ στο $(1, 0)$
- ii. $f(x, y, z) = x \cdot \text{τοξεφ} \frac{y}{x}$ στο $(1, 2, -2)$
- iii. $\vec{f}(x, y) = (x^2y + 1, x + y, x^3)$ στο $(-2, 1)$
- iv. $\vec{f}(x, y, z) = (xe^{xz}, y^5)$ στο $(1, 2, 0)$

Λύση

Εφαρμόστε το Θεώρημα 8.25 σελ. 367, Θεώρημα 9.19 σελ. 4.22.

Άσκηση 4.6

Υπολογίστε το διαφορικό της $f(x, y) = xe^{y^2} + y\sigma\upsilon\nu x$ στο σημείο $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$

- i. Αποδείξτε ότι $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|xe^{y^2} + y\sigma\upsilon\nu x - x - y|}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$
- ii. Υπολογίστε τους αριθμούς A, B, Γ ώστε να ισχύει $\lim_{(x,y) \rightarrow (\pi, 1)} \frac{|xe^{y^2} + y\sigma\upsilon\nu x - Ax - By - \Gamma|}{\sqrt{(x-\pi)^2 + (y-1)^2}} = 0$

Λύση

Οι μερικές παράγωγοι $f_x(x, y) = e^{y^2} - y\eta\mu x$, $f_y(x, y) = 2xye^y + \sigma\upsilon\nu x$ είναι συνεχείς στο $\mathbb{R}^2$, άρα (Θεώρημα 8.25 σελ. 367) η f είναι διαφορίσιμη στο $\mathbb{R}^2$ με

$$f(x_0, y_0) = (e^{y_0^2} - y_0\eta\mu x_0)x + (2x_0y_0e^{y_0} + \sigma\upsilon\nu x_0)y, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{και}$$

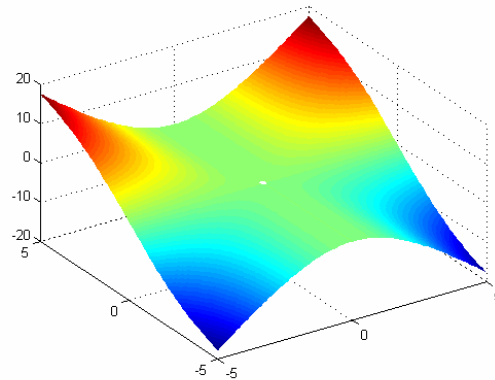
$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{|f(x,y) - f(x_0,y_0) - Df(x_0,y_0)(x-x_0, y-y_0)|}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} = 0 \quad (*) \quad (\text{Βλέπε και Θεώρημα 8.20 σελ. 359}).$$

- i. Προκύπτει από την (*) αν θέσουμε $(x_0, y_0) = (0, 0)$
- ii. Προκύπτει από την (*) αν θέσουμε $(x_0, y_0) = (\pi, 1)$ και αναρωτηθούμε πόσοι γραμμικοί μετασχηματισμοί την ικανοποιούν.

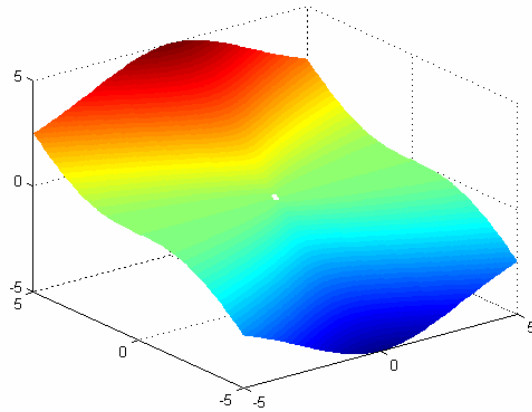
Άσκηση 4.7

Υπολογίστε το διαφορικό της δοσμένης συνάρτησης f στο αναφερόμενο σημείο

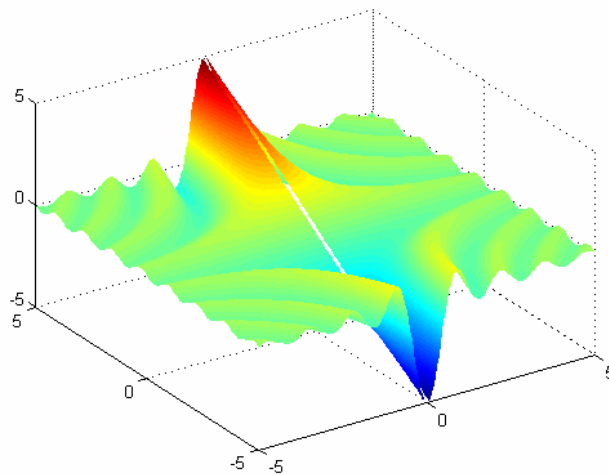
$$\text{i.} \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad \text{στο } (0, 0)$$



$$\text{ii.} \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^3}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad \text{στο } (0, 0)$$

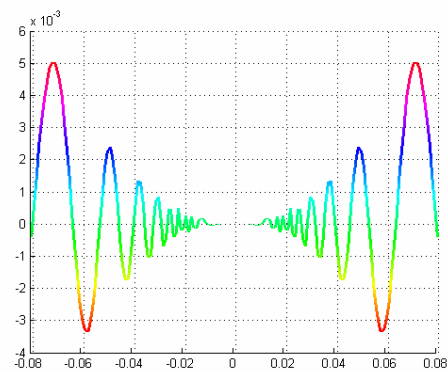
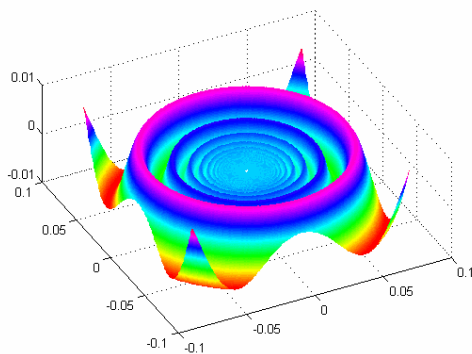


iii.
$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\eta\mu xy}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \text{ στο } (0, y_0)$$

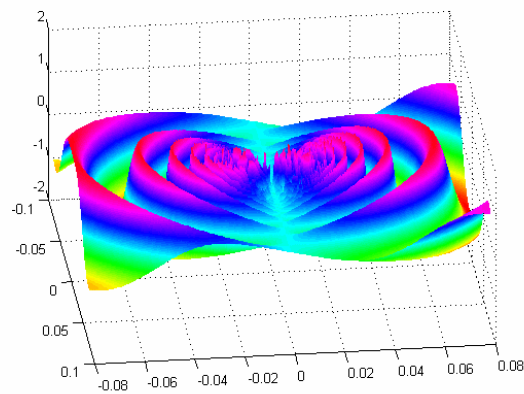


iv.
$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2)\eta\mu \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \text{ στο } (0, 0)$$

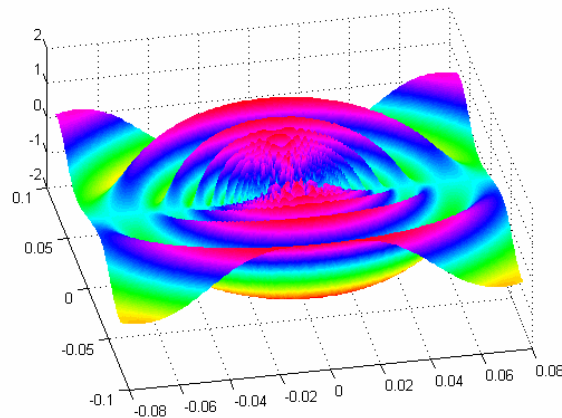
Η γραφική παράσταση της $f(x, y)$ και της $f(x, 0)$ φαίνονται στα παρακάτω σχήματα



Η γραφική παράσταση της f_x στην iv) φαίνεται στο παρακάτω σχήμα



Η γραφική παράσταση της f_y στην iv) φαίνεται στο παρακάτω σχήμα



Λύση

- i. Παράδειγμα 8.17 σελ. 360
- ii. Παράδειγμα 8.18 σελ. 361 (Ανάλογο)
- iii. Η f είναι ασυνεχής στο $(0, y_0)$, $y_0 \neq 0$ (γιατί;), άρα δεν είναι διαφορίσιμη στο $(0, y_0)$, $y_0 \neq 0$.

Η f είναι συνεχής στο $(0, 0)$ και $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$ (γιατί;). Έχουμε

$$\frac{f(x, y) - f(0, 0) - \nabla f(0, 0)(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{\eta\mu xy}{x\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Όμως το $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{\eta\mu xy}{x\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x^2}{x|x|} \frac{1}{\sqrt{2}}$ δεν υπάρχει άρα (Θεώρημα 8.20

σελ. 359) η f δεν είναι διαφορίσιμη στο $(0, 0)$.

- iv. Η f είναι διαφορίσιμη στο σημείο $(0, 0)$, αλλά οι μερικές παράγωγοι δεν είναι συνεχείς στο $(0, 0)$ (παράδειγμα 8.21 σελ. 365 – 367, διδακτικό βιβλίο).

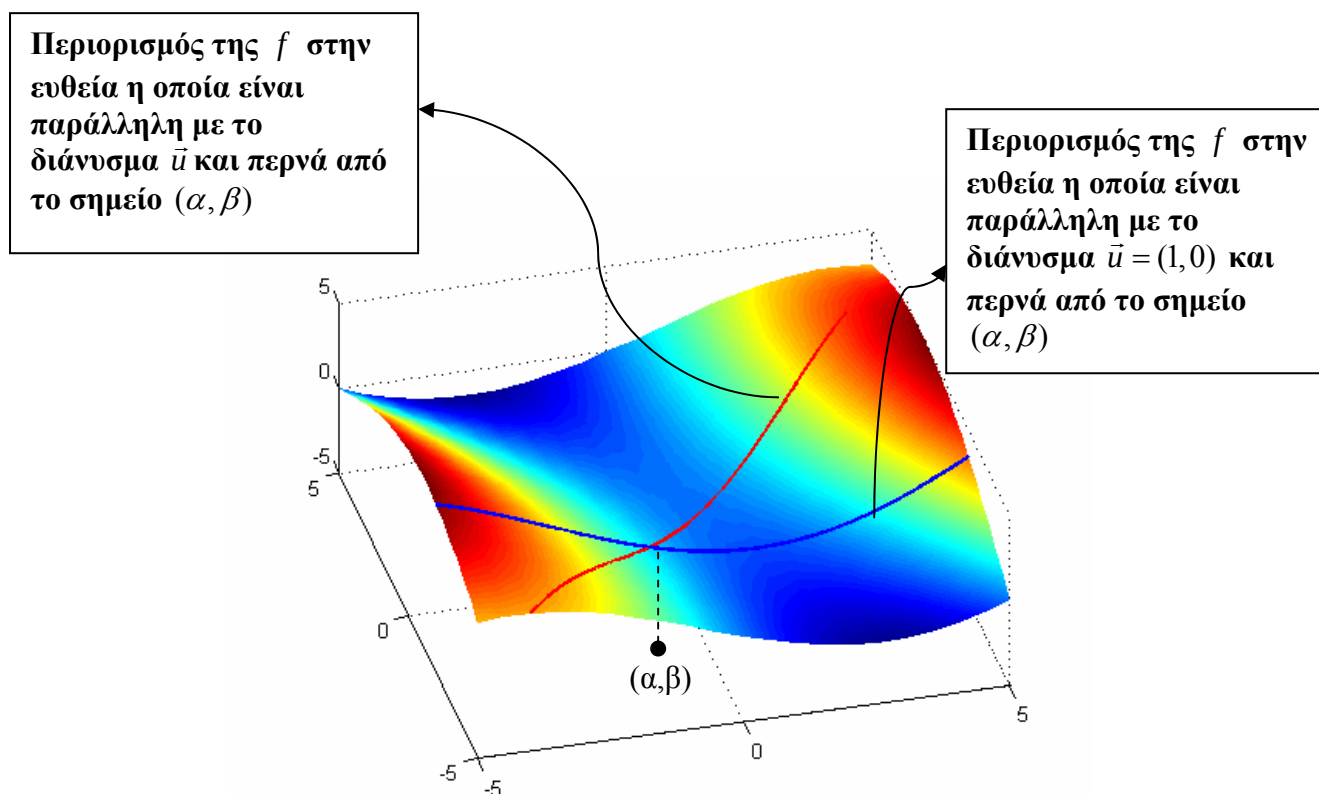
Ορισμός

Έστω $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ μια πραγματική συνάρτηση δύο μεταβλητών με A ανοικτό και $(\alpha, \beta) \in A$ και $\vec{u} = (u_1, u_2)$ μια κατεύθυνση του $\mathbb{R}^2$ (δηλαδή ότι $\|\vec{u}\| = 1$). Τότε κατευθυνόμενη παράγωγος της συνάρτησης f στο σημείο $\vec{a}$ ως προς την κατεύθυνση $\vec{u}$ είναι ο πραγματικός αριθμός $f_{\vec{u}}(\vec{a})$, ο οποίος ορίζεται από τον τύπο

$$f_{\vec{u}}(\vec{a}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\alpha + u_1 h, \beta + u_2 h) - f(\alpha, \beta)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\vec{a} + h\vec{u}) - f(\vec{a})}{h}$$

Αν επιπλέον η πραγματική συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι διαφορίσιμη στο $\vec{a} = (\alpha, \beta) \in A$ τότε υπάρχει η κατευθυνόμενη παράγωγος $f_{\vec{u}}(\vec{a})$ και ισχύει ο τύπος

$$f_{\vec{u}}(\vec{a}) = Df(\vec{a})(\vec{u}) = \nabla f(\vec{a}) \cdot \vec{u}, \|\vec{u}\| = 1$$



Άρα η κατευθυνόμενη παράγωγος είναι η παράγωγος της (κόκκινης) συνάρτησης σε κάποιο σημείο (ενώ η μερική παράγωγος ως προς x είναι η παράγωγος της μπλε συνάρτησης σε κάποιο σημείο).

Άσκηση 4.8

Να υπολογιστεί η κατευθυνόμενη παράγωγος της $f(x, y, z) = 2ye^x + e^{-y} + e^z \eta \mu y$ στο σημείο $(0, \frac{\pi}{2}, 0)$ ως προς την κατεύθυνση $\vec{u} = (1, 1, 1)$.

Λύση

Ανάλογα με το παράδειγμα 8.39 σελ. 394

Άσκηση 4.9

Υπολογίστε την κατευθυνόμενη παράγωγο της $f(x, y, z) = e^x \sin(\pi yz)$ στο σημείο $(0, 1, \frac{1}{2})$ σε κατεύθυνση παράλληλη με την ευθεία που τέμνονται τα επίπεδα $x + y + z - 1 = 0$ και $x - 2y + 3z - 1 = 0$.

Λύση

Ένα παράλληλο διάνυσμα προς την ευθεία είναι το $\vec{a} = (5, -2, -3)$ (παράδειγμα 3.9 σελ 99-100). Συνεχίζουμε όπως στην άσκηση 4.8.

Άσκηση 4.10

Έστω η θερμοκρασία (σε $^{\circ}C$) σε κάθε σημείο $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ (x, y, z σε μέτρα) δίνεται από την συνάρτηση $T(x, y, z) = 75 - 2x^2 + y^2 - z^2$

- Υπολογίστε την κατευθυνόμενη παράγωγο της T στο σημείο $P = (2, -1, 1)$ ως προς την κατεύθυνση του $\vec{u} = (4, -3, 12)$
- Βρείτε το μοναδιαίο διάνυσμα που δείχνει την κατεύθυνση ως προς την οποία η T ελαττώνεται γρηγορότερα στο P και τον ρυθμό μεταβολής κατά την κατεύθυνση αυτή.

Λύση

- Ανάλογα με το παράδειγμα 8.41 σελ 396.

Άσκηση 4.11

Υποθέτουμε ότι για τις συναρτήσεις των ασκήσεων ισχύουν οι προϋποθέσεις των θεωρημάτων που θα χρησιμοποιηθούν

i.

- Αν $u = f(x, y)$ και θέσουμε $x = e^s \sin t$ και $y = e^s \eta \mu t$, αποδείξτε ότι ισχύει

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = e^{-2s} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 \right].$$

- Αν $z = f(x - y)$, αποδείξτε ότι ισχύει $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

- i) Εάν $z = f(x^2 + y^2)$ αποδείξτε ότι $x \frac{\partial z}{\partial y} - y \frac{\partial z}{\partial x} = 0$.

- ii) Εάν $z = f(e^{xy})$ βρείτε τη σχέση μεταξύ των $\frac{\partial z}{\partial x}$ και $\frac{\partial z}{\partial y}$.
4. Εάν $z = f(x, y)$, όπου $x = s + 2t$, $y = s - 2t$, υπολογίστε την τιμή του $k \in \mathbb{R}$ (αν υπάρχει) ώστε να ισχύει $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + k\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \frac{\partial z}{\partial s} \frac{\partial z}{\partial t}$.
5. Εάν $z = f(u, v)$ όπου $u = \alpha x + y$, $v = x + \beta y$
- i) Υπολογίστε την $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ συναρτήσει των $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$ και $\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}$.
- ii) Εάν $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - 3\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} - 5\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = 0$, υπολογίστε τις τιμές των α, β ώστε η εξίσωση αυτή να μας δίνει την $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$.
6. Θεωρούμε τις διαφορίσιμες συναρτήσεις $f = f(x, y, z) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ και $g = g(x, z) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ και θέτουμε $w = f(x, y, z)$ και $y = g(x, z)$. Υπολογίστε τις μερικές παραγώγους : $\frac{\partial w}{\partial x}$ και $\frac{\partial w}{\partial z}$.

Άσκηση 4.12

1. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ και $x = r \sin \theta$, $y = r \cos \theta$, $r > 0$. Αποδείξτε ότι:

i)
$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)^2$$

ii)
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}$$

Λύση

- i) (Παράδειγμα 9.13 σελ 438.).

Άσκηση 4.13

Έστω $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ και $x = r \sin \theta \cos \phi$, $y = r \sin \theta \sin \phi$ και $z = r \cos \theta$. Αποδείξτε ότι :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{z}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \cos \theta} \frac{\partial f}{\partial \theta}.$$

Άσκηση 4.14

Αποδείξτε ότι η $f(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{t^{n/2}} e^{-\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{4t}}$, $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$

ικανοποιεί την εξίσωση της θερμότητας $\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}$.

Άσκηση 4.15

Αποδείξτε ότι η $u(x, t) = \frac{1}{2} [f(x+t) - f(x-t)] + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} g(s) ds$, $x \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$

ικανοποιεί την απλούστερη μορφή της κυματικής εξίσωσης $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$,

$u(x, 0) = f(x)$ και $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x)$.

Άσκηση 4.16

Έστω U ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$, με την ιδιότητα $\{t\vec{x} : t \in (0, +\infty) \text{ και } \vec{x} \in U\} \subseteq U$ και $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ μια διαφορίσιμη συνάρτηση ομογενής, βαθμού ομογένειας α ($f(t\vec{x}) = t^\alpha f(\vec{x})$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{x} \neq \vec{0}$, $t > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$). Αποδείξτε ότι $\vec{x} \cdot \nabla f(\vec{x}) = \alpha f(\vec{x})$ για κάθε $\vec{x} \in U$ (Euler).

Λύση

Θεώρημα 9.32, Euler σελ. 436.

Άσκηση 4.17

Έστω $u(x, y) = x^2 f\left(\frac{x}{y}\right)$. Αποδείξτε ότι $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 2u$.

Λύση

Χρησιμοποιούμε την 4.16

Άσκηση 4.18

Έστω η βαρυτική συνάρτηση $V(x, y, z) = -\frac{GMm}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, $(x, y, z) \in U \equiv$

$\equiv \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ (Νόμος Newton της Παγκόσμιας Έλξης). Αποδείξτε ότι

$$x \frac{\partial V}{\partial x} + y \frac{\partial V}{\partial y} + z \frac{\partial V}{\partial z} = -V.$$

Λύση

Παράδειγμα 9.10 σελ. 437

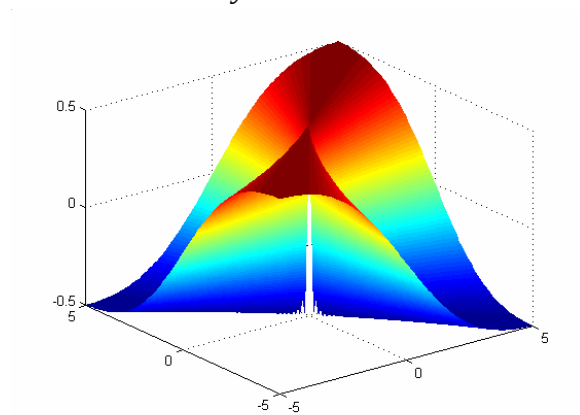
0.3 Όρια, Συνέχεια συναρτήσεων

Μπορείτε να «σχεδιάσετε» τις γραφικές παραστάσεις και να τις περιεργαστείτε πληκτρολογώντας στο Matlab το κομμάτι κώδικα που βρίσκεται μετά τις ασκήσεις.

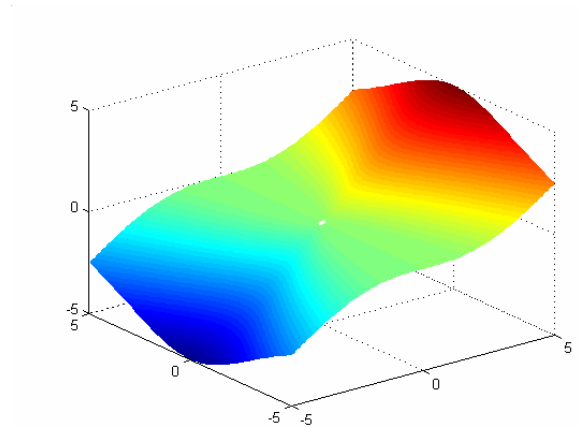
Άσκηση 3.1

Υπολογίστε το όριο (αν υπάρχει) ή αποδείξτε ότι το όριο δεν υπάρχει

i. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$

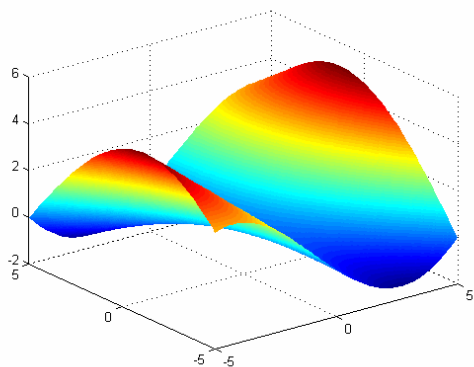


ii. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3}{x^2 + y^2}$

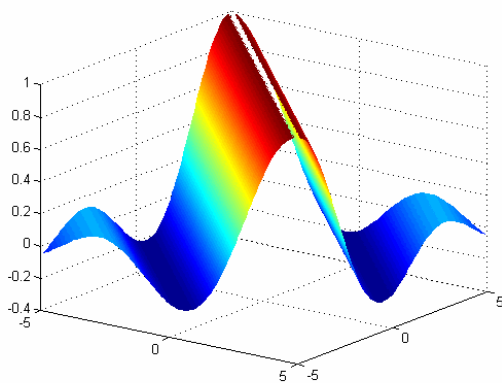


iii. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + xy + y^2}{x^2 - y^2}$

iv. $\lim_{(x,y) \rightarrow (\pi, \pi)} x \cdot \eta\mu\left(\frac{x+y}{4}\right)$



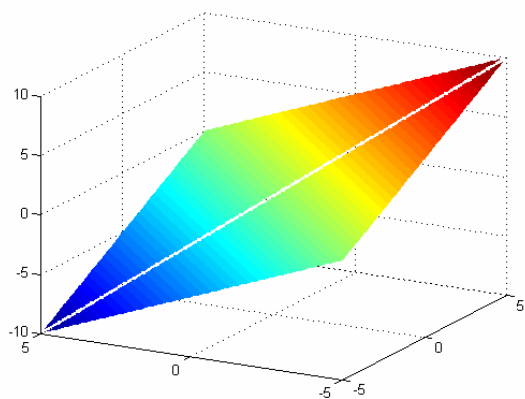
v.
$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\eta\mu(x+y)}{x+y}$$



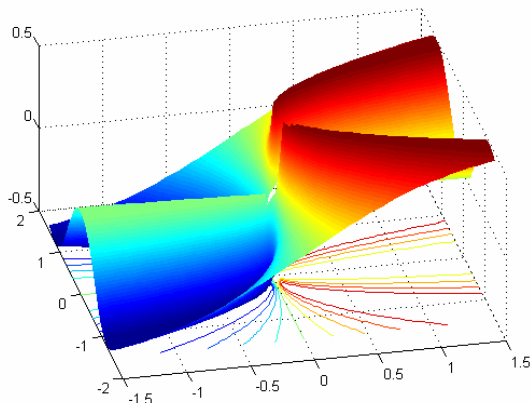
vi.
$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x}{x^2 + y^2}$$

vii.
$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2 - 1}$$

viii.
$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x + y}$$



ix.
$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$$



x. $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{x^2 - y^2 - z^2}{x^2 + y^2 + z^2}$

xi. $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{x^2 y^2 z^2}{x^2 + y^2 + |z|}$

xii. $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} (1 + x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{\eta \mu(x^2 + y^2 + z^2)}}$

Λύση

i. Παράδειγμα 7.7, σελ. 264, Διδακτικό βιβλίο

ix. Παράδειγμα 7.8, σελ. 265, Διδακτικό βιβλίο

xii. Θέτουμε $t = x^2 + y^2 + z^2$

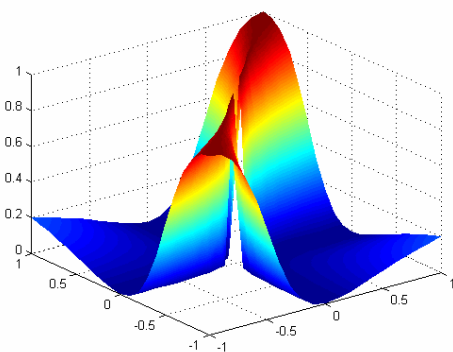
Να λυθούν οι υπόλοιπες.

Άσκηση 3.2

i. Έστω $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$ και (α, β) σημείο συσσώρευσης του A. Αποδείξτε ότι αν υπάρχουν τα $\lim_{(x,y) \rightarrow (\alpha,\beta)} f(x,y)$ και $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x,y)$, τότε υπάρχει το διαδοχικό

όριο $\lim_{y \rightarrow \beta} (\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x,y))$ και $\lim_{y \rightarrow \beta} (\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x,y)) = \lim_{(x,y) \rightarrow (\alpha,\beta)} f(x,y)$.

ii. Έστω $f(x,y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x-y)^2}$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.



Αποδείξτε ότι $\lim_{x \rightarrow 0}(\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)) = \lim_{y \rightarrow 0}(\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)) = 0$, αλλά ότι το $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$ δεν υπάρχει.

- iii. Έστω $f(x, y) = \frac{x-y}{x+y}$, $x+y \neq 0$. Αποδείξτε ότι $\lim_{x \rightarrow 0}(\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)) \neq \lim_{y \rightarrow 0}(\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y))$ και ότι το $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$ δεν υπάρχει.

Λύση

- i. Έστω $\ell = \lim_{(x, y) \rightarrow (a, \beta)} f(x, y)$ και $\varepsilon > 0$. Τότε $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ τέτοιο ώστε

$$l - \frac{\varepsilon}{2} < f(x, y) < l + \frac{\varepsilon}{2} \text{ για } (x, y) \in ((\alpha - \delta, \alpha + \delta) \times (\beta - \delta, \beta + \delta)) \cap A.$$

Έστω $y \in (\beta - \delta, \beta + \delta)$ για το οποίο ορίζεται το $\lim_{x \rightarrow a} f(x, y)$. Τότε

$$l - \frac{\varepsilon}{2} \leq \lim_{x \rightarrow a} f(x, y) \leq l + \frac{\varepsilon}{2} \text{ ή } \left| \lim_{x \rightarrow a} f(x, y) - l \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Άρα υπάρχει το $\lim_{y \rightarrow \beta}(\lim_{x \rightarrow a} f(x, y))$ και μάλιστα $\lim_{y \rightarrow \beta}(\lim_{x \rightarrow a} f(x, y)) = l$.

- ii. - iii. Να λυθούν

Άσκηση 3.3

Εξετάστε ως προς την συνέχεια τις συναρτήσεις

- i. $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{|x|+|y|}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$
- ii. $f(x, y) = \begin{cases} \frac{\eta\mu(x^2+2y^2)}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 1, & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$
- iii. $f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{\eta\mu(xy)}{x} + z\eta\mu\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$
- iv. $\vec{f}(x, y) = \begin{cases} \left(\frac{e^{xy}-1}{x}, \frac{1}{x^2+1}, \frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}e^y \right), & x \neq 0 \\ (y, 1, 0), & x = 0 \end{cases} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$
- v. $\vec{f}(x, y, z) = \begin{cases} \left(\frac{xy-z^2}{x^2+y^2+z^2}, \frac{x^3+y^3}{x^2+y+z^2} \right), & (x, y, z) \neq (0, 0, 0) \\ (1, 0), & (x, y, z) = (0, 0, 0) \end{cases} \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

Λύση

- i. Χρησιμοποιείστε τον ορισμό της συνέχειας με $\delta=\varepsilon$.
- ii. Για $y=x$ έχουμε $\lim_{(x,x)\rightarrow(0,0)} \frac{\eta\mu(x^2+2x^2)}{x^2+x^2} = \lim_{x\rightarrow 0} \frac{\eta\mu(3x^2)}{2x^2} = \lim_{x\rightarrow 0} \frac{\eta\mu(3x^2)}{2x^2} \frac{3}{2} = \frac{3}{2} \neq 1 = f(0,0)$. Άρα η f είναι ασυνεχής στο $(0,0)$. Για $(\alpha,\beta) \neq (0,0)$ η f είναι συνεχής.
- iv. $\vec{f} = (f_1, f_2, f_3)$ όπου $f_1(x,y) = \begin{cases} \frac{e^{xy}-1}{x}, & x \neq 0 \\ y, & x = 0 \end{cases}$,
- $$f_2(x,y) = \frac{1}{x^2+1}, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{και} \quad f_3(x,y) = \begin{cases} \frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x} e^y, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$
- Για την f_1 έχουμε: $\lim_{(x,y)\rightarrow(0,\beta)} \frac{e^{xy}-1}{x} = \lim_{(x,y)\rightarrow(0,\beta)} \frac{e^{xy}-1}{xy} y = \beta = f_1(0,\beta)$.
 - Για την f_3 έχουμε: $\lim_{(x,y)\rightarrow(0,\beta)} \frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x} e^y = 0 = f_3(0,\beta)$

Συμπεραίνουμε (εύκολα) ότι οι f_1, f_2, f_3 είναι συνεχείς για κάθε $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ άρα και η $\vec{f}$ είναι συνεχής σε κάθε $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$.

iii,v Να λυθούν.

Άσκηση 3.4

Εξετάστε αν υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ (και αν υπάρχει να υπολογιστεί), ώστε κάθε μία από τις συναρτήσεις να είναι συνεχής στο $(0,0)$.

- i. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ \lambda, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$
- ii. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} \sqrt[3]{y}, & (x,y) \neq (0,0) \\ \lambda, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$
- iii. Οι συναρτήσεις της άσκησης 3.1

Λύση

- i. Όπως το Παρ. 8.38, σελ. 392, Διδακτικό βιβλίο
- ii. Ισχύει $\left| \frac{xy}{x^2 + y^2} \right| \leq \frac{1}{2}$ και $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \sqrt[3]{y} = 0$. Άρα $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$.
Για να είναι η f συνεχής στο $(0,0)$ πρέπει $\lambda = f(0,0) = 0$.
- iii. Να λυθούν.

Κώδικας σε MATLAB για γραφικές παραστάσεις

```
clear all;  
clc;
```

```
[X,Y] = meshgrid(-5:0.5:5);
```

```
figure(1)
```

```
R1=X.*Y;  
R3=X.^2 + Y.^2;  
Z=R1./R3;
```

```
surf(X,Y,Z,'FaceColor','interp','EdgeColor','none','FaceLighting','phong')
```

```
figure (2);
```

```
R1=X.^3;  
R3=X.^2 + Y.^2;  
Z=R1./R3;
```

```
surf(X,Y,Z,'FaceColor','interp','EdgeColor','none','FaceLighting','phong')
```

```
figure (3);
```

```
R2=X.^2 + X.*Y + Y.^2;  
R3=X.^2 - Y.^2;  
Z=R2./R3;
```

```
surf(X,Y,Z,'FaceColor','interp','EdgeColor','none','FaceLighting','phong')
```

```
figure (4);
```

```
R1=X + Y;  
R2=sin(R1/4);  
Z=X.*R2;
```

```
surf(X,Y,Z,'FaceColor','interp','EdgeColor','none','FaceLighting','phong')
```

```
figure (5);
```

```
R1=X + Y;  
R2=sin(R1);  
Z=R2./R1;
```

```
surf(X,Y,Z,'FaceColor','interp','EdgeColor','none','FaceLighting','phong')
```

```
figure (6);
```

```
R1=X
```

```
R3=X.^2 +Y.^2;  
Z=X./(X.^2 +Y.^2);
```

```
surf(X,Y,Z,'FaceColor','interp','EdgeColor','none','FaceLighting','phong')
```

```
figure (7);  
R1=X.*Y  
R3=X.^2 + Y.^2-1;  
Z=R1./R3;
```

```
surf(X,Y,Z,'FaceColor','interp','EdgeColor','none','FaceLighting','phong')
```

```
figure (8);  
R1=X + Y;  
R2=X.^2 - Y.^2;  
Z=R2./R1;
```

```
surf(X,Y,Z,'FaceColor','interp','EdgeColor','none','FaceLighting','phong')
```


ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να υπολογιστεί το διαφορικό της $\vec{f}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, με:

$$\vec{f}(x, y) = (x + y, x^2 y)$$

Λύση

Ορίζουμε $f_1(x, y) = x + y$ και $f_2(x, y) = x^2 y$. Οι f_1, f_2 είναι παραγωγίσιμες, με:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y) = 1$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) = 1$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) = 2xy$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y) = x^2$$

Παρατηρούμε ότι οι μερικές παράγωγοι των παραπάνω συναρτήσεων είναι συνεχείς, άρα οι f_1, f_2 είναι διαφορίσιμες στο $\mathbb{R}^2$, με:

$$df_1(\vec{x}_0)(\vec{h}) = \nabla f_1(\vec{x}_0) \cdot \vec{h} = h_1 + h_2$$

$$df_2(\vec{x}_0)(\vec{h}) = \nabla f_2(\vec{x}_0) \cdot \vec{h} = 2xyh_1 + x^2h_2,$$

$$\forall \vec{x}_0 = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ και } \vec{h} = (h_1, h_2).$$

Τελικά,

$$\begin{aligned} d\vec{f}(x, y)(\vec{h}) &= (df_1(x, y)(\vec{h}), df_2(x, y)(\vec{h})) \\ &= (h_1 + h_2, 2xyh_1 + x^2h_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2xy & x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. Να βρεθεί το ολικό διαφορικό της $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, με:

$$f(x, y, z) = xy^2 + ye^{xz}$$

Λύση

Η f είναι παραγωγίσιμη, με:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = y^2 + yze^{xz}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = 2xy + e^{xz}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = xye^{xz}$$

Παρατηρούμε ότι οι μερικές παράγωγοι της f είναι συνεχείς, επομένως υπάρχει το ολικό διαφορικό της, με:

$$df(x, y, z) = (y^2 + yze^{xz})dx + (2xy + e^{xz})dy + xye^{xz}dz$$

3. Αν $W(x, y, z) = x^3 f\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)$, να αποδείξετε ότι:

$$x \frac{\partial W}{\partial x} + y \frac{\partial W}{\partial y} + z \frac{\partial W}{\partial z} = 3W$$

Λύση

Θέτουμε $u = \frac{y}{x}$ και $v = \frac{z}{x}$. Έχουμε:

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \frac{\partial x^3 f(u, v)}{\partial x} = 3x^2 f(u, v) + x^3 \frac{\partial f(u, v)}{\partial x} =$$

$$\begin{aligned}
3x^2 f(u, v) + x^3 \frac{\partial f(u, v)}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + x^3 \frac{\partial f(u, v)}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} &= \\
= 3x^2 f(u, v) - xy \frac{\partial f}{\partial u} - xz \frac{\partial f(u, v)}{\partial v}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial W}{\partial y} &= \frac{\partial x^3 f(u, v)}{\partial y} = x^3 \frac{\partial f(u, v)}{\partial y} \\
&= x^3 \frac{\partial f(u, v)}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + x^3 \frac{\partial f(u, v)}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = x^2 \frac{\partial f(u, v)}{\partial u}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial W}{\partial z} &= \frac{\partial x^3 f(u, v)}{\partial z} = x^3 \frac{\partial f(u, v)}{\partial z} \\
&= x^3 \frac{\partial f(u, v)}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} + x^3 \frac{\partial f(u, v)}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial z} = x^2 \frac{\partial f(u, v)}{\partial v}
\end{aligned}$$

Τελικά,

$$\begin{aligned}
x \frac{\partial W}{\partial x} + y \frac{\partial W}{\partial y} + z \frac{\partial W}{\partial z} &= 3x^3 f(u, v) - x^2 y \frac{\partial f}{\partial u} - x^2 z \frac{\partial f(u, v)}{\partial v} \\
&\quad + x^2 y \frac{\partial f(u, v)}{\partial u} + x^2 z \frac{\partial f(u, v)}{\partial v} = 3W
\end{aligned}$$

4. Θεωρούμε την $f: \mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{0}\} \rightarrow \mathbb{R}$, με:

$$f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x - y)^2}$$

Να αποδείξετε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right) = \lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right) = 0$$

και

$$\nexists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$$

Λύση

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x - y)^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} (0) = 0$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right) = \lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x - y)^2} \right) = \lim_{y \rightarrow 0} (0) = 0$$

Θα αποδείξουμε ότι $\nexists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$, μέσω καμπυλών:

$$f(x, 0) = 0$$

$$f(x, x) = 1$$

Επομένως, $\nexists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$.

5. Να βρεθούν, αν υπάρχουν, τα σημεία τοπικών ακροτάτων της συνάρτησης:

$$f(x, y) = (x - y)^4 + (y - 1)^4$$

Λύση

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^2$, με:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 4(x - y)^3$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -4(x - y)^3 + 4(y - 1)^3$$

Επομένως, $\nabla f(x, y) = (4(x - y)^3, -4(x - y)^3 + 4(y - 1)^3)$.

Λύνουμε:

$$\nabla f(x, y) = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} 4(x - y)^3 = 0 & (1) \\ -4(x - y)^3 + 4(y - 1)^3 = 0 & (2) \end{cases}$$

Από αντικατάσταση της (1) στην (2) προκύπτει ότι:

$$4(y - 1)^3 = 0 \Leftrightarrow y = 1$$

Για $y = 1$ η (1) γράφεται:

$$4(x - 1)^3 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Οπότε, εξετάζουμε το σημείο (1,1).

Βρίσκουμε τις παραγώγους δεύτερης τάξης:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 12(x - y)^2 \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, 1) = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 12(x - y)^2 + 12(y - 1)^2 \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1, 1) = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = -12(x - y)^2 \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(1, 1) = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = -12(x - y)^2 \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1, 1) = 0$$

Παρατηρούμε ότι $\Delta_2 = \det \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$, οπότε μέσω Εσσιανού πίνακα δεν μπορούμε να αποφανθούμε.

Όμως:

$$f(x, y) = (x - y)^4 + (y - 1)^4 \geq 0 = f(1, 1)$$

Άρα το $(1, 1)$ είναι σημείο ολικού ελαχίστου.

6. Να βρεθεί η κατευθυνόμενη παράγωγος της συνάρτησης f στο σημείο $(-1, 2, 3)$ και κατεύθυνση $\vec{a} = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$, όπου:

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \text{ με } f(x, y, z) = xz - y^2$$

Λύση

$$\begin{aligned} D_{\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)} f(-1, 2, 3) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left((-1, 2, 3) + h\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)\right) - f(-1, 2, 3)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left((-1, 2, 3) + \left(\frac{h}{3}, \frac{2h}{3}, \frac{2h}{3}\right)\right) - 7}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(\left(-1 + \frac{h}{3}, 2 + \frac{2h}{3}, 3 + \frac{2h}{3}\right)\right) - 7}{h} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(-1 + \frac{h}{3}, 2 + \frac{2h}{3}, 3 + \frac{2h}{3}\right) + 7}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left(-1 + \frac{h}{3}\right)\left(3 + \frac{2h}{3}\right) - \left(2 + \frac{2h}{3}\right)^2 + 7}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-3 - \frac{2h}{3} + \frac{3h}{3} + \frac{2h^2}{9} - \left(4 + \frac{8h}{3} + \frac{4h^2}{9}\right) + 7}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\frac{7h}{3} - \frac{2h^2}{9}}{h} = -\frac{7}{3}
\end{aligned}$$

Σχόλιο: Το ίδιο αποτέλεσμα θα παίρναμε αν χρησιμοποιούσαμε το θεώρημα, το οποίο αναφέρει ότι $D_{\vec{\alpha}}f(\vec{x}) = \nabla f(\vec{x}) \cdot \vec{\alpha}, \forall f: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, διαφορίσιμη, $\forall \vec{x} \in A$ και $\forall \vec{\alpha} \in \mathbb{R}^n: \|\vec{\alpha}\| = 1$, αφού η f έχει συνεχείς μερικές παραγώγους.

7. Να εξετάσετε αν έχει μερικές παραγώγους στο σημείο $(0,0)$ η συνάρτηση:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Λύση

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f((0,0) + h(1,0)) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h}$$

Όμως, αν $h > 0 \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} = +\infty$ και αν $h < 0 \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{1}{h} = -\infty$

Επομένως, $\nexists \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f((0,0) + h(0,1)) - f(0,0)}{h} = 0$$

8. Να επαληθεύσετε τον τύπο του Green για τη συνάρτηση $\vec{F}(x, y) = (2x - y, x + 3y)$ στο $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1\}$.

Λύση

Παρατηρούμε ότι το G είναι ένα απλό σύνολο Green και η $\vec{F}$ είναι C^1 στο G . Επομένως εφαρμόζεται ο τύπος του Green, για $P = 2x - y$ και $Q = x + 3y$:

$$\oint_{\partial G} P dx + Q dy = \iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

Για το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα, έχουμε:

$$\partial G = \Gamma = \{\vec{r}: \vec{r}(t) = (2 \cos t, \sin t), t \in [0, 2\pi]\}$$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} (4 \cos t - \sin t, 2 \cos t + 3 \sin t) \cdot (-2 \sin t, \cos t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-8 \sin t \cos t + 2(\sin t)^2 + 2(\cos t)^2 + 3 \sin t \cos t) dt \end{aligned}$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(-\frac{5}{2} \sin 2t + 2 \right) dt = \left[\frac{5}{4} \cos 2t + 2t \right]_0^{2\pi} = 4\pi$$

Για το διπλό ολοκλήρωμα έχουμε:

$$\iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \iint_G (1 - (-1)) dx dy = 2 \iint_G dx dy$$

Εφαρμόζοντας μετασχηματισμό $\vec{T}(r, \theta) = (2r \cos \theta, r \sin \theta)$ προκύπτει ότι:

$$\begin{cases} x = 2r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r \in [0, 1] \\ \theta \in [0, 2\pi] \end{cases}$$

και

$$\det \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \det \mathfrak{J}\vec{T}(r, \theta) = \det \begin{pmatrix} 2 \cos \theta & -2r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix} = 2r$$

Οπότε:

$$I' = 2 \iint_G dx dy = 2 \int_0^{2\pi} \int_0^1 2r dr d\theta = 2 \int_0^{2\pi} 1 d\theta = 2 \cdot 2\pi = 4\pi$$

Επομένως ισχύει ο τύπος του Green, αφού $I = I'$.

9. Να βρεθεί σημείο του επιπέδου $x - 2y + z = 5$, το οποίο να είναι πλησιέστερο στο σημείο $(5, -3, 6)$.

Λύση

Έστω το ζητούμενο σημείο είναι το (x, y, z) , το οποίο απέχει απόσταση από το $(5, -3, 6)$ ίση με:

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{(x - 5)^2 + (y + 3)^2 + (z - 6)^2} \\ &= \sqrt{(x - 5)^2 + (y + 3)^2 + (2y - x - 1)^2} \end{aligned}$$

Θα μελετήσουμε την $d = d(x, y)$ ως προς τα ακρότατα.

Τότε η d γίνεται ελάχιστη αν και μόνο αν η d^2 γίνεται ελάχιστη. Έχουμε:

$$\begin{aligned} d^2(x, y) &= (x - 5)^2 + (y + 3)^2 + (2y - x - 1)^2 \\ &= 2x^2 + 5y^2 - 4xy - 8x + 2y + 35 \end{aligned}$$

Η d^2 είναι παραγωγίσιμη, με:

$$\frac{\partial d^2}{\partial x}(x, y) = 4x - 4y - 8$$

$$\frac{\partial d^2}{\partial y}(x, y) = 10y - 4x + 2$$

Οπότε:

$$\nabla d^2(x, y) = (4x - 4y - 8, 10y - 4x + 2)$$

Λύνουμε:

$$\begin{aligned} \nabla d^2(x, y) = \vec{0} &\Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 4y - 8 = 0 \\ 10y - 4x + 2 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 2 & (1) \\ 10y - 4x + 2 = 0 & (2) \end{cases} \end{aligned}$$

Από αντικατάσταση της (1) στη (2) προκύπτει:

$$\begin{cases} x = y + 2 \\ 10y - 4y - 8 + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 2 \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$$

Άρα θα εξετάσουμε το σημείο (3, 1).

Βρίσκουμε τις μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης:

$$\frac{\partial^2 d^2}{\partial x^2}(x, y) = 4$$

$$\frac{\partial^2 d^2}{\partial y^2}(x, y) = 10$$

$$\frac{\partial^2 d^2}{\partial y \partial x}(x, y) = -4 = \frac{\partial^2 d^2}{\partial x \partial y}(x, y)$$

Έχουμε:

$$Hd^2(3,1) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 d^2}{\partial x^2}(3,1) & \frac{\partial^2 d^2}{\partial x \partial y}(3,1) \\ \frac{\partial^2 d^2}{\partial y \partial x}(3,1) & \frac{\partial^2 d^2}{\partial y^2}(3,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\Delta_1 = \frac{\partial^2 d^2}{\partial x^2}(3,1) = 4 > 0$$

$$\Delta_2 = \det Hd^2(3,1) = 24 > 0$$

Τελικά, το $(3,1)$ είναι σημείο ολικού ελαχίστου.

Οπότε, το ζητούμενο σημείο είναι το $(3, 1, 4)$, το οποίο απέχει απόσταση από το $(5, -3, 6)$, $d = 2\sqrt{6}$.

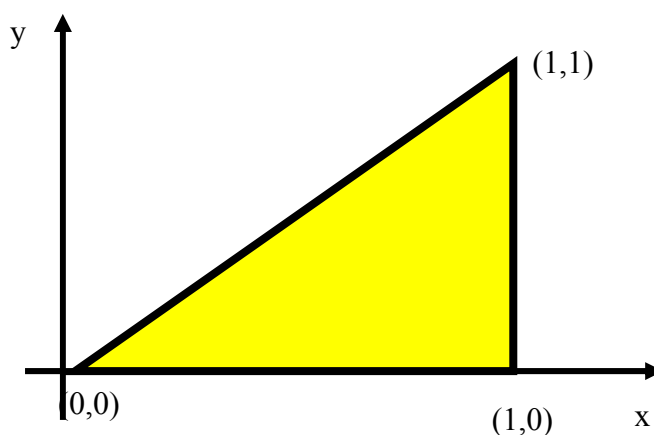
Κυριακή 16 Δεκεμβρίου 2018,
ΦΡΑΓΚΟΥΛΗΣ ΓΕΩΡΓΙΟΣ-ΜΑΡΙΟΣ

0.6 Διπλά ολοκληρώματα

Άσκηση 6.1

Να υπολογισθούν τα διπλά ολοκληρώματα

1. $\int_0^1 \int_{x+1}^{x+2} x^2 y dy dx$
2. $\int_0^1 \int_0^1 x^2 y^2 \sqrt{x^3 + y^3} dx dy$
3. $\int_0^1 \int_y^1 x^2 \sigma \nu (x^2 - xy) dx dy$



Λύση

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \int_y^1 x^2 \sigma \nu (x^2 - xy) dx dy = \int_0^1 \int_0^x x^2 \sigma \nu (x^2 - xy) dy dx = \\ &= \int_0^1 \left[-x \eta \mu (x^2 - xy) \right]_0^x dx = \int_0^1 x \eta \mu x^2 dx = \left[-\frac{1}{2} \sigma \nu \nu x^2 \right]_0^1 = \frac{1}{2} (1 - \sigma \nu \nu 1) \end{aligned}$$

4. $\int_0^1 \int_y^1 \frac{y}{(1+x^3)^5} dx dy$

Λύση

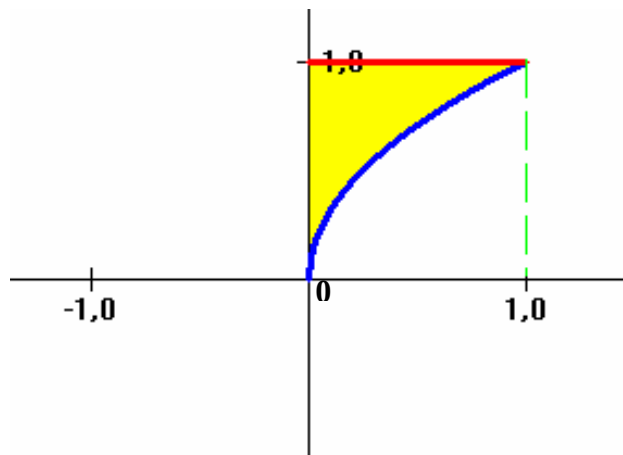
$$\int_0^1 \int_y^1 \frac{y}{(1+x^3)^5} dx dy = \int_0^1 \int_0^x \frac{y}{(1+x^3)^5} dy dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^2}{(1+x^3)} dx = \dots$$

$$5. \int_0^1 \int_x^1 \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} dy dx$$

Λύση

$$\int_0^1 \int_x^1 \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} dy dx = \int_0^1 \int_0^y \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy = \dots = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$$

$$6. \int_0^1 \left[\int_{\sqrt{x}}^1 \sqrt{1+y^3} dy \right] dx$$



Λύση

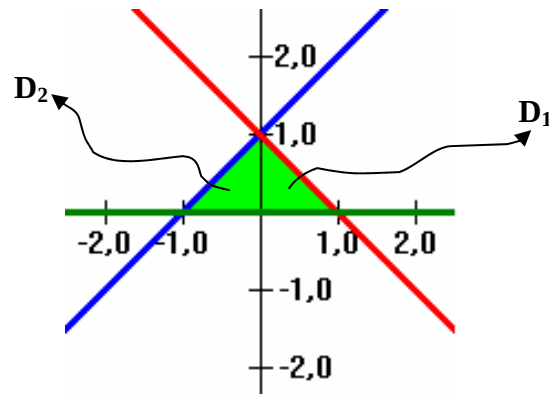
$$\int_0^1 \left[\int_{\sqrt{x}}^1 \sqrt{1+y^3} dy \right] dx = \int_0^1 \left[\int_0^{y^2} \sqrt{1+y^3} dx \right] dy = \int_0^1 y^2 \sqrt{1+y^3} dy = \dots$$

$$7. \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} (\alpha^2 - y^2)^{\frac{3}{2}} dy dx, (\alpha > 0)$$

Λύση

$$\begin{aligned} \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} (\alpha^2 - y^2)^{\frac{3}{2}} dy dx &= \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} (\alpha^2 - y^2)^{\frac{3}{2}} dx dy = \\ &= \int_0^a (\alpha^2 - y^2)^{\frac{3}{2}} (\alpha^2 - y^2)^{\frac{1}{2}} dy = \int_0^a (\alpha^2 - y^2)^2 dy = \int_0^a (a^4 - 2\alpha^2 y^2 + y^4) dy = \\ &= a^5 - \frac{2}{3} a^2 a^3 + \frac{1}{5} a^5 = \frac{8}{5} a^5 \end{aligned}$$

8. $\iint_D (x+y) dx dy$, όπου $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x|+y \leq 1, y \geq 0\}$



Λύση

Είναι $D = D_1 \cup D_2$, όπου $D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y \leq 1, x, y \geq 0\}$ και

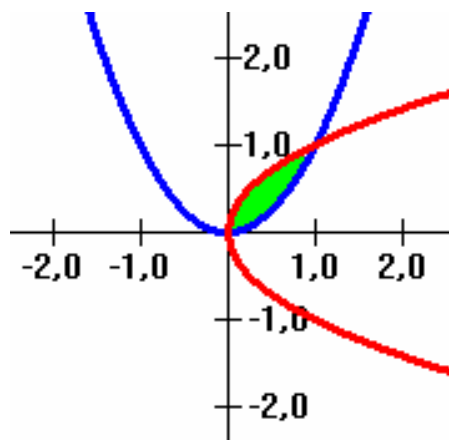
$D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -x+y \leq 1, x \leq 0, y \geq 0\}$. Άρα

$$\begin{aligned} \iint_D (x+y) dx dy &= \iint_{D_1} (x+y) dy dx + \iint_{D_2} (x+y) dy dx = \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-x} (x+y) dy dx + \int_{-1}^0 \int_0^{1+x} (x+y) dy dx = \dots = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

9. $\iint_D xy dx dy$, όπου D περιβάλλεται από τις $x = y^2$ $y = x^2$

Λύση

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq \sqrt{x}\}$...



Άσκηση 6.2

Να υπολογισθούν τα διπλά ολοκληρώματα

$$1. \int_{-1}^{+1} \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$$

Λύση

Ανάλογα με το παράδειγμα 10.13 σελ. 545-546 ($a=1$)

$$2. \iint_D \left(1 - \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2}\right)^{\frac{3}{2}} dx dy, \quad D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \left(\frac{x}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{y}{\beta}\right)^2 \leq 1 \right\}, \quad (\alpha, \beta > 0)$$

Λύση

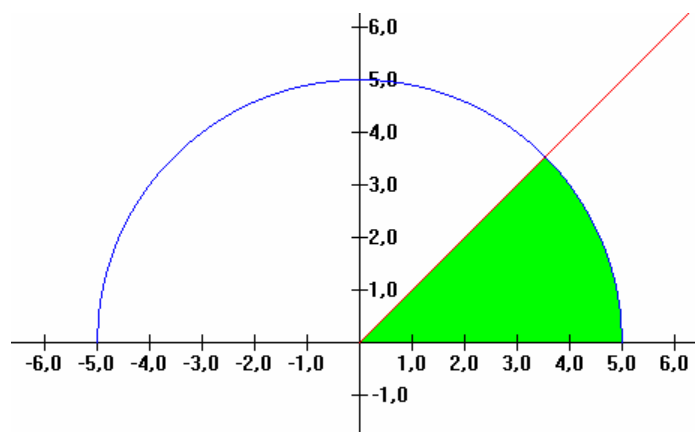
Θεωρούμε το μετασχηματισμό $T(r, \theta) = (\alpha r \cos \theta, \beta r \sin \theta)$.

Η Ιακωβιανή (ορίζουσα) του μετασχηματισμού είναι $(\alpha\beta r)$ και $D = T([0, 1] \times [0, 2\pi])$

οπότε ευρίσκουμε:

$$\iint_D \left(1 - \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2}\right) dx dy = \int_0^1 \int_0^{2\pi} (1 - r^2)^{\frac{3}{2}} (\alpha\beta r) d\theta dr = \dots = 10\alpha\beta\pi$$

$$3. \iint_D x dx dy, \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 25, y \leq x, y \geq 0\}$$

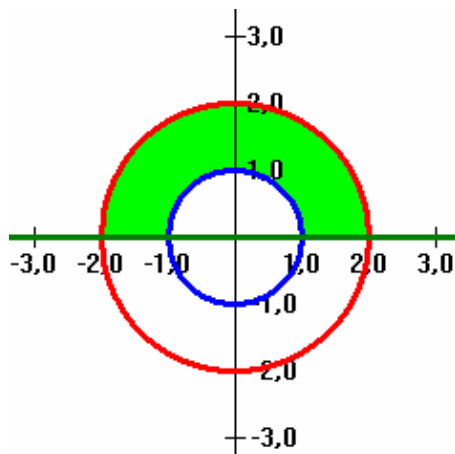


Λύση

$$\iint_D x dx dy = \int_0^5 \int_0^{\frac{\pi}{4}} (r \cos \theta) r d\theta dr = \dots \text{ (γιατί;)}$$

4. $\iint_D \frac{x+y}{x^2+y^2} dx dy$, $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \alpha^2 \leq x^2 + y^2 \leq \beta^2, y \geq 0\}$, $(0 < \alpha < \beta)$

Όπου D είναι το πράσινο χωρίο του σχήματος.



Λύση

Θεωρούμε τον πολικό μετασχηματισμό $x = r \cos \theta$ και $y = r \sin \theta$ όπου $\alpha \leq r \leq \beta$ και $0 \leq \theta \leq \pi$

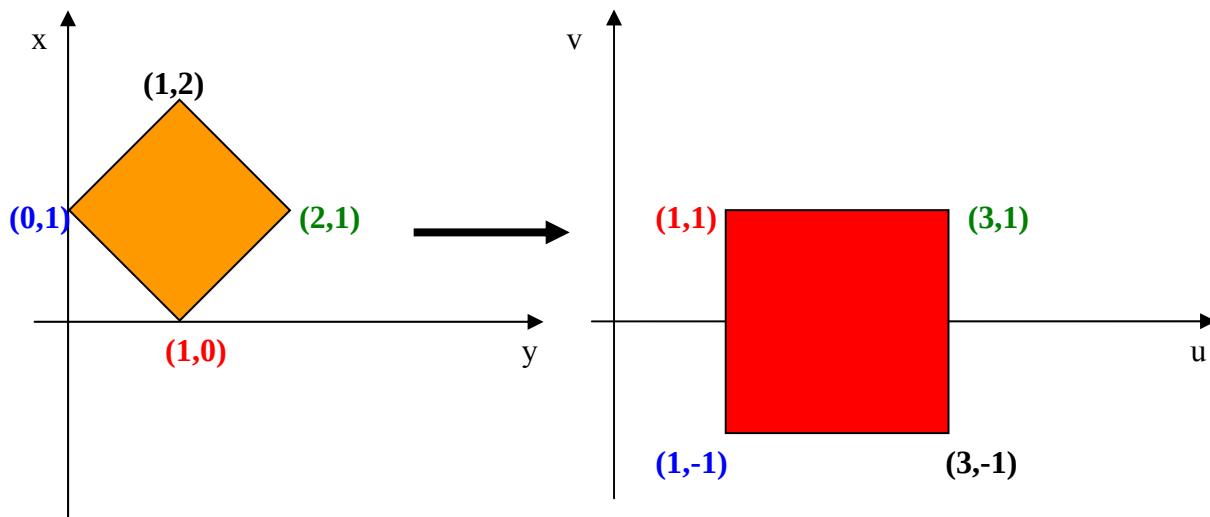
$$\begin{aligned} \iint_D \frac{x+y}{x^2+y^2} dx dy &= \int_0^\pi \int_\alpha^\beta r \frac{r \cos \theta + r \sin \theta}{r^2} dr d\theta = (\beta - \alpha) \int_0^\pi (\cos \theta + \sin \theta) d\theta = \\ &= (\beta - \alpha) \int_0^\pi \sin \theta d\theta = 2(\beta - \alpha) \end{aligned}$$

Άσκηση 6.3

Να υπολογιστεί το διπλό ολοκλήρωμα $\iint_D (x+y)^3 (x-y)^3 dx dy$, όπου D το τετράγωνο με κορυφές τα σημεία $A(1,0)$, $B(2,1)$, $\Gamma(1,2)$ και $\Delta(0,1)$.

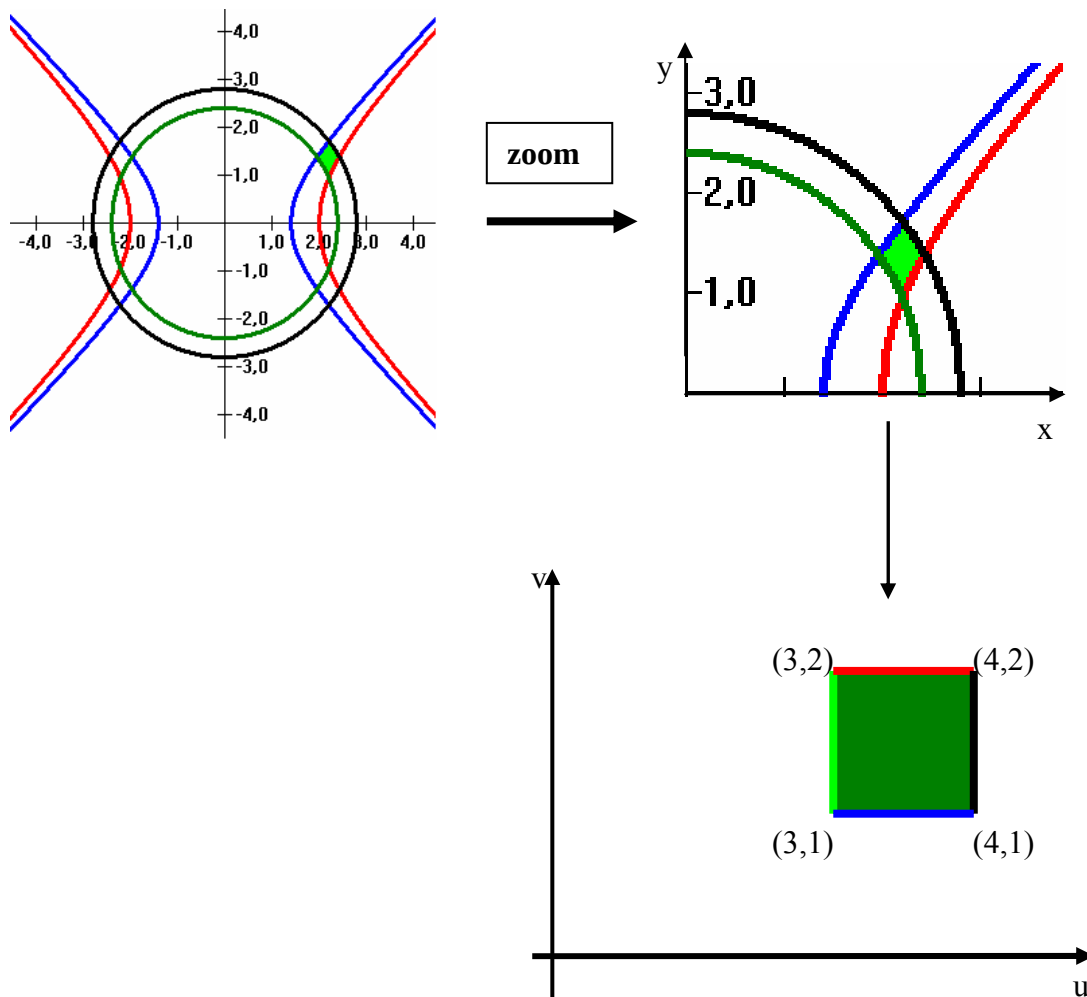
Υπόδειξη

Θέτουμε $u = x + y$ και $v = x - y$



Άσκηση 6.4

$\iint_D xy^3 dx dy$, όπου το D περιβάλλεται από τις υπερβολές $x^2 - y^2 = 2$, $x^2 - y^2 = 4$, τους κύκλους $x^2 + y^2 = 6$, $x^2 + y^2 = 8$, όπου $x, y \geq 0$.



Λύση

Θέτουμε $x = \sqrt{u+v}$ και $y = \sqrt{u-v}$

Η υπερβολή $x^2 - y^2 = 2$ γίνεται $v=1$ και η υπερβολή $x^2 - y^2 = 4$ γίνεται $v=2$.

Ο κύκλος $x^2 + y^2 = 6$ γίνεται $u=3$ και ο κύκλος $x^2 + y^2 = 8$ γίνεται $u=4$.

Η ορίζουσα του μετασχηματισμού είναι $\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{u^2 - v^2}}.$

Το ολοκλήρωμα $\iint_D xy^3 dx dy$ γίνεται $I = \int_1^2 \int_3^4 \sqrt{u+v} (\sqrt{u-v})^3 \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{u^2 - v^2}} du dv =$

$$\frac{1}{2} \int_1^2 \int_3^4 (u-v) du dv = \frac{1}{2} \int_1^2 \left(\frac{7}{2} - v \right) dv = \frac{7}{4} - \frac{3}{4} = 1$$

Διηλεκτά ολοκληρώματα

Ολοκληρώματα πάνω από ορθογώνιο χωρίο:

Αν $R = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d \}$

και η $f: R \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής, τότε

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy$$

(Θεώρημα Fubini)

Παράδειγμα 1

Αν $R = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2, -1 \leq y \leq 1 \}$,

τότε

$$\iint_R (1 - 6x^2y) dx dy = \int_{-1}^1 \left[\int_0^2 (1 - 6x^2y) dx \right] dy$$

$$= \int_{-1}^1 \left[x - 2x^3y \right]_{x=0}^2 dy = \int_{-1}^1 (2 - 16y) dy$$

$$= \left[2y - 8y^2 \right]_{-1}^1 = 2 - 8 + 2 + 8 = 4$$

Επαληθεύστε ότι το αποτέλεσμα θα ήταν

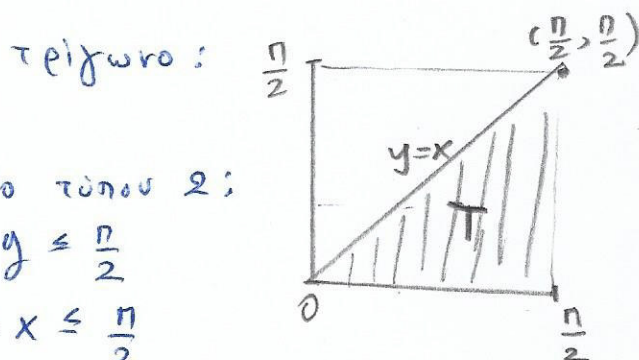
το ίδιο, αν ολοκληρώναμε πρώτα ως προς y
και μετά ως προς x .

Ολοκλήρωμα ορισμένο σε 1η ορθογώνιο χωρίο

Παράδειγμα 2

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I = \iint_T (x^3 y + \cos x) dx dy, \quad \text{όπου } T \text{ το}$$



Το T εκφράζεται
 ως χωρίο τύπου 1: $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$
 $0 \leq y \leq x$ ή ως χωρίο τύπου 2:
 $0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$
 $y \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

Επιλέγοντας την πρώτη έκφραση, έχουμε:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^x (x^3 y + \cos x) dy \right) dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{x^3 y^2}{2} + y \cos x \right]_{y=0}^x dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{x^5}{2} + x \cos x \right) dx \stackrel{*}{=} \left[\frac{x^6}{12} + x \sin x + \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi^6}{64 \cdot 12} + \frac{\pi}{2} - 1 \end{aligned}$$

* Είπαμε με ολοκλήρωση κατά μέρη: $\int x \cos x dx = \int x (\sin x)' dx = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x$

Παράδειγμα 3

Βρείτε τον όγκο του τετραέδρου που φράσσεται από τα επίπεδα $y=0$, $z=0$, $x=0$ και

$$y - x + z = 1.$$

Λύση

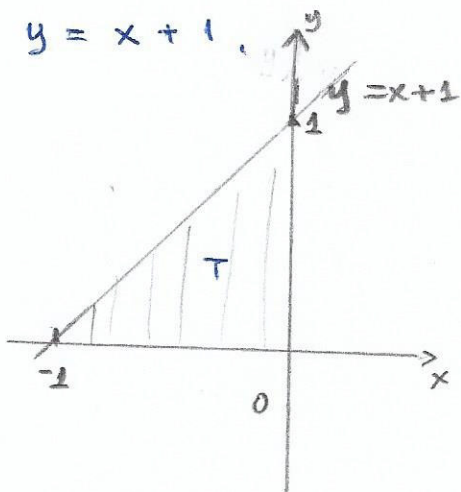
Ο ζητούμενος όγκος δίνεται από το ολοκλήρωμα της συνάρτησης $f(x,y) = x - y + 1$

(της οποίας το γράφημα είναι το επίπεδο $P: y - x + z = 1$)

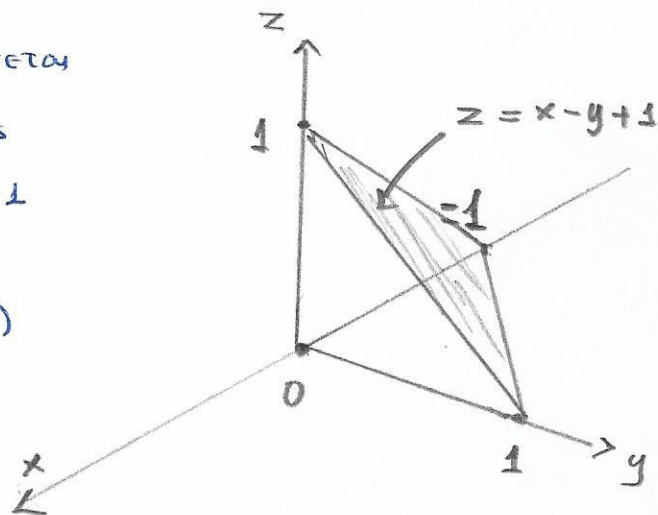
πάρω από το χωρίο T που ορίζεται από τους άξονες x 'ς και y 'ς και την τομή του επιπέδου P με το xy επίπεδο:

Για $z=0$ έχουμε

$$y = x + 1.$$



$$T: \begin{aligned} -1 &\leq x \leq 0 \\ 0 &\leq y \leq x+1 \end{aligned}$$

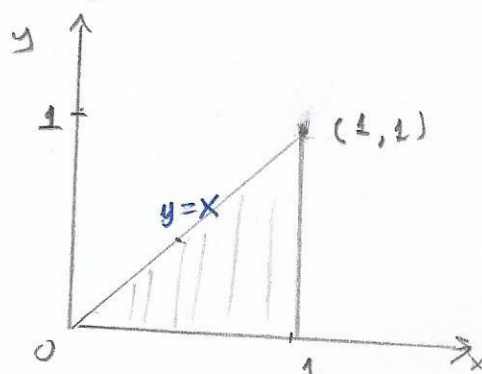


Άρα

$$\begin{aligned} E &= \iint_T (1+x-y) dx dy \\ &= \int_{-1}^0 \left(\int_0^{x+1} (1+x-y) dy \right) dx \\ &= \int_{-1}^0 \left[y + xy - \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=x+1} dx \\ &= \int_{-1}^0 \frac{(x+1)^2}{2} dx = \left[\frac{(x+1)^3}{6} \right]_{-1}^0 = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Παράδειγμα 4 (Η επιλογή της σειράς ολοκλήρωσης μπορεί να έχει σημασία).

Υπολογίστε το $\iint_R \frac{\sin x}{x} dx dy$ όπου
 R το τρίγωνο :



Λύση

Το χωρίο R είναι τύπου 3.

Αν το δούμε ως τύπου 1 (x μετατίθεται δύο σταθμών) και ολοκληρώσουμε πρώτα ως προς y και μετά ως προς x , βρίσκουμε:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\int_0^x \frac{\sin x}{x} dy \right) dx &= \int_0^1 \left[\frac{\sin x}{x} \cdot y \right]_{y=0}^x dx \\ &= \int_0^1 \sin x dx = [-\cos x]_0^1 = 1 - \cos 1. \end{aligned}$$

Αν δούμε το R ως χωρίο τύπου 2, δηλαδή ολοκληρώσουμε πρώτα ως προς x και μετά ως προς y , έχουμε

$$\int_0^1 \left(\int_y^1 \frac{\sin x}{x} dx \right) dy.$$

Όμως, το $\int \frac{\sin x}{x} dx$ δεν μπορεί να εκφραστεί μέσω στοιχειωδών συναρτήσεων, οπότε δεν μπορούμε να προχωρήσουμε.

* Δηλαδή η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = \frac{\sin x}{x}$

Αντιστροφή τη σειράς ολοκλήρωσης

Παράδειγμα 5

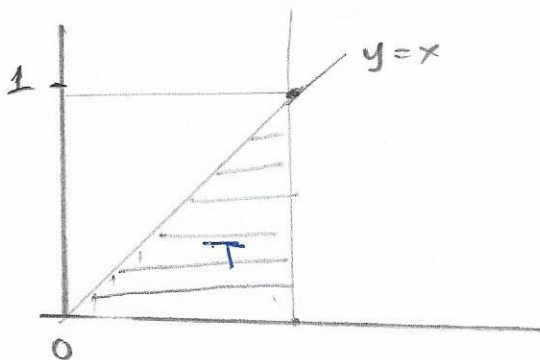
Υπολογίστε το ολοκλήρωμα:

$$I = \int_0^1 \left(\int_y^1 e^{x^2} dx \right) dy$$

Το $\int e^{x^2} dx$ δεν εκφράζεται μέσω στοιχειωδών συναρτήσεων.

Δοκιμάσουμε να αντιστρέψουμε τη σειρά ολοκλήρωσης.

Το χώρο T πάνω από το οποίο ολοκληρώνουμε είναι το τριγωνό:



$$0 \leq y \leq 1$$

$$y \leq x \leq 1$$

που
εκφράζεται
και ως:

$$0 \leq x \leq 1$$

$$0 \leq y \leq x$$

Άρα (με βάση το θεώρημα του Fubini)

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \left(\int_0^x e^{x^2} dy \right) dx = \int_0^1 \left[e^{x^2} y \right]_{y=0}^x dx \\ &= \int_0^1 x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 2x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \left[e^{x^2} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2} (e - 1). \end{aligned}$$

Παράδειγμα 6

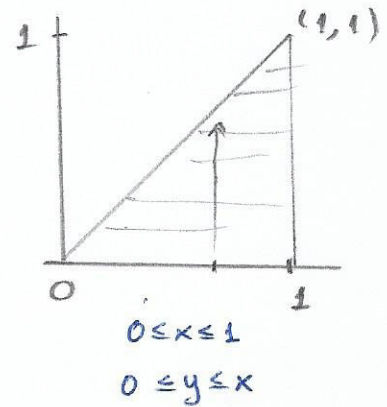
Υπολογίστε το ολοκλήρωμα:

$$I = \int_0^1 \left(\int_y^1 x^3 y e^{xy^2} dx \right) dy$$

Λύση

Αντιστρέφοντας τη σειρά ολοκλήρωσης, υπολογίζεται ευκολότερα.

Σύμφωνα με το σχήμα είναι:



$$I = \int_0^1 \left(x^3 \int_0^x y e^{xy^2} dy \right) dx$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{x^3}{2x} \int_0^x 2xy e^{xy^2} dy \right) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 \left[e^{xy^2} \right]_{y=0}^x dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 (x^2 e^{x^3} - x^2) dx = \frac{1}{6} \int_0^1 3x^2 \cdot e^{x^3} dx - \frac{1}{2} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1$$

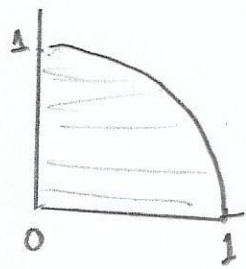
$$= \frac{1}{6} \left[e^{x^3} \right]_0^1 - \frac{1}{6} = \frac{1}{6} (e - 2)$$

Παράδειγμα 7

Υπολογίστε το ολοκλήρωμα :

$$I = \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} (1-y^2)^{3/2} dy \right) dx$$

Λύση



Αντιστρέφεται αν αντιστρέψουμε τη σειρά ολοκλήρωσης.

Το χωρίο πάνω από το οποίο ολοκληρώνουμε είναι το τεταρτοκύκλιο στο 1ο τεταρτημόριο

$$\begin{aligned} 0 \leq x \leq 1 & \quad \text{ή} \quad 0 \leq y \leq 1 \\ 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2} & \quad \text{ή} \quad 0 \leq x \leq \sqrt{1-y^2} \end{aligned}$$

Αρα

$$I = \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-y^2}} (1-y^2)^{3/2} dx \right) dy$$

$$= \int_0^1 (1-y^2)^{3/2} \sqrt{1-y^2} dy$$

$$= \int_0^1 (1-y^2)^2 dy = \int_0^1 (y^4 - 2y^2 + 1) dy$$

$$= \left[\frac{y^5}{5} - \frac{2y^3}{3} + y \right]_0^1 = \frac{1}{5} - \frac{2}{3} + 1 = \frac{8}{15}$$

Παράδειγμα 8

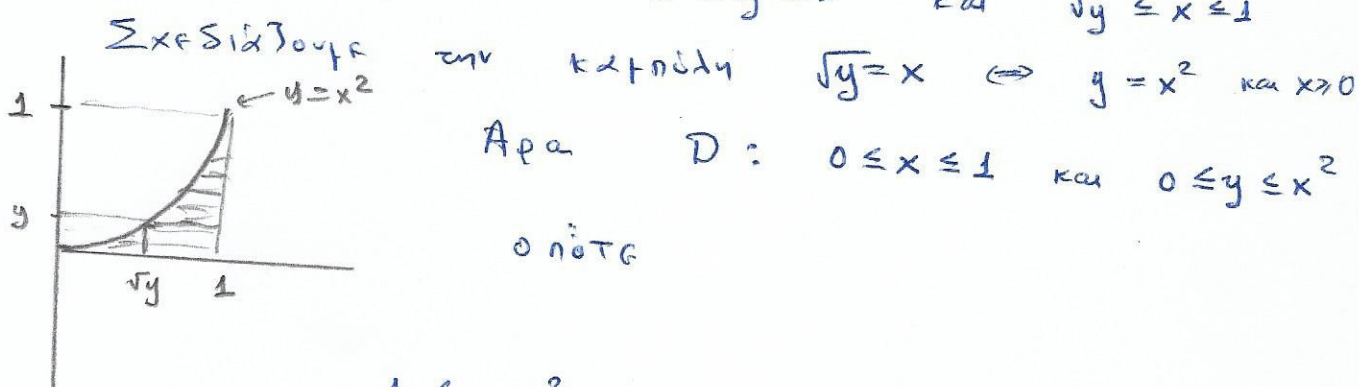
Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$I = \int_0^1 \left(\int_{\sqrt{y}}^1 \frac{y}{(1+x^5)^7} dx \right) dy$$

Λύση

Το χωρίο ολοκλήρωσης D δίνεται από

τις ανισότητες : $0 \leq y \leq 1$ και $\sqrt{y} \leq x \leq 1$



$$I = \int_0^1 \left(\int_0^{x^2} \frac{y}{(1+x^5)^7} dy \right) dx$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{(1+x^5)^7} \left[\frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{x^2} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^4}{(1+x^5)^7} dx = \frac{1}{10} \int_0^1 \frac{5x^4}{(1+x^5)^7} dx$$

$$= \frac{1}{10} \left[-\frac{1}{6} \frac{1}{(1+x^5)^6} \right]_0^1 = -\frac{1}{60} \cdot \frac{1}{2^6} + \frac{1}{60}$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{60} \cdot \frac{63}{64}$$

Αλλαγή μεταβλητών

Διπλά ολοκληρώματα σε πολικές συντεταγμένες

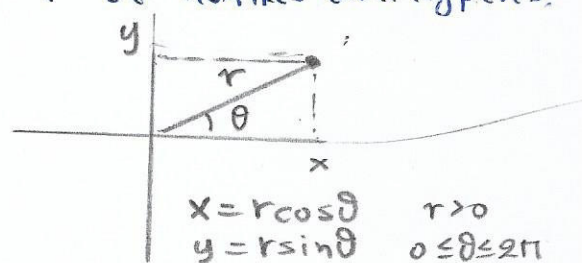
Αν το D είναι στοιχειώδες χωρίο στο επίπεδο και η $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη, τότε

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D^*} f(r \cos \theta, r \sin \theta) \cdot r dr d\theta$$

όπου D^* η έκφραση του χωρίου D σε πολικές συντεταγμένες.

Παράδειγμα 1

Το εμβαδόν του κύκλου



Έχουμε δη ότι το εμβαδόν ενός χωρίου δίνεται από το (διπλό) ολοκλήρωμα της συνάρτησης 1 πάνω από το χωρίο αυτό. - Αυτό ισχύει για το εμβαδόν του D ισούται με τον όγκο ενός «κυλίνδρου» βάσης D και ύψους 1.

Αρα $E(D) = \iint_D 1 dx dy$

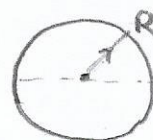
Εδώ D είναι ο κύκλος ακτίνας R :

Εκφράζοντας τον κύκλο σε πολικές συντεταγμένες έχουμε:

$$D^* : 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq r \leq R$$

Αρα

$$\begin{aligned}
 E(D) &= \iint_D 1 dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^R r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^2}{2} \right]_{r=0}^R d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{R^2}{2} d\theta \\
 &= 2\pi \frac{R^2}{2} = \pi R^2.
 \end{aligned}$$



Παράδειγμα 2

Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου D που περικλείεται από την καρδιοειδή καμπύλη, η οποία σε πολικές συντεταγμένες έχει εξίσωση $r = 1 + \cos \theta$.

Λύση

Σύμφωνα με τα προηγούμενα είναι

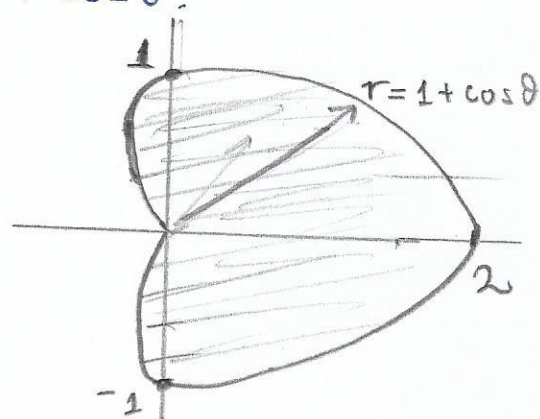
$$\begin{aligned} E(D) &= \iint_{D^*} r \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{1+\cos\theta} r \, dr \right) d\theta \end{aligned}$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{(1+\cos\theta)^2}{2} d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos^2\theta d\theta + \int_0^{2\pi} \cos\theta d\theta$$

$$= \pi + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1+\cos 2\theta) d\theta + [\sin\theta]_0^{2\pi}$$

$$= \pi + \frac{1}{4} \cdot 2\pi + \frac{1}{8} [\sin 2\theta]_0^{2\pi}$$

$$= \pi + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$$



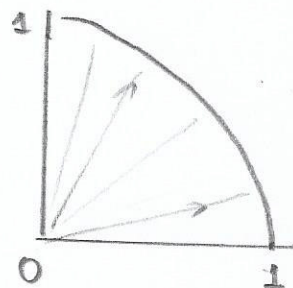
Παράδειγμα 3

Να βρείτε τη ροπή αδράνειας ως προς την αρχή των αξόνων μιας λεπτής πλάκας πυκνότητας $\delta(x,y)=1$, η οποία φράσσεται από το τεταρτοκύκλιο $x^2+y^2=1$ στο πρώτο τεταρτημόριο.

$$\left(\begin{array}{l} \text{Ροπή αδράνειας ως προς την αρχή!} \\ I = \iint_D (x^2+y^2) \delta(x,y) dx dy \end{array} \right)$$

Λύση

Σε καρτεσιανές συντεταγμένες είναι



$$I = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (x^2+y^2) dy dx$$

Κάνοντας αλλαγή σε πολικές συντεταγμένες $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, παίρνουμε:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 r^2 \cdot r dr d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 r^3 dr d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^4}{4} \right]_{r=0}^1 d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4} d\theta = \frac{\pi}{8} \end{aligned}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ GREEN

Το Θ. Green εξισώνει ένα επικαμπύλιο ολοκλήρωμα πάνω από μια κλειστή καμπύλη με επιφανειακό ολοκλήρωμα πάνω από το εσωτερικό της καμπύλης.

ΛΗΜΜΑ 1

Εστω D ένα x -απλό $\subseteq \mathbb{R}^2$ και $C := \partial D$. Επίσης έστω $P: D \rightarrow \mathbb{R}$ C^1 -διαφορίσιμη, και $F = (P, 0): D \rightarrow \mathbb{R}^2$. Τότε

$$\int_C F \cdot d\mathbf{r} = - \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy.$$

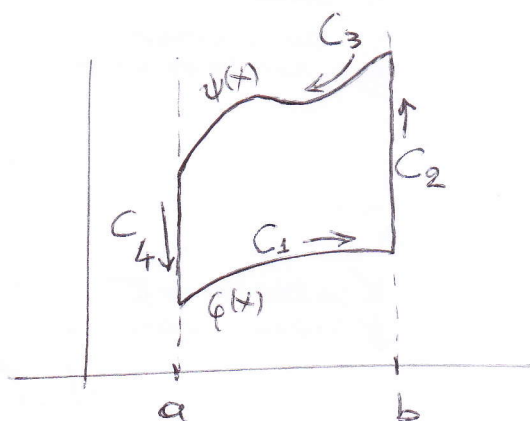
Απόδειξη.

Αφού D x -απλό, είναι της μορφής

$$D = \{(x, y): a \leq x \leq b, \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$$

με $\varphi, \psi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ C^1 -διαφορ.,

$\varphi \leq \psi$. Το ενοστό $C = \partial D$ είναι



κατά τμήματα C^1 -διαφ. καμπύλη, με 4 C^1 -τμήματα, που διατρέχονται από τις καμπύλες:

$\gamma_1(t) = (t, \varphi(t)), t \in [a, b]:$ διατρέχει την C_1 θετικά

$\gamma_2(t) = (b, t), t \in [\varphi(b), \psi(b)]:$ —||— C_2 —||—

$\gamma_3(t) = (t, \psi(t)), t \in [a, b]:$ —||— C_3 αρνητικά(!)

$\gamma_4(t) = (a, t), t \in [\varphi(a), \psi(a)]:$ —||— C_4 —||—

Παρατηρούμε ότι:

$$(1) \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \int_a^b \left[\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy \right] dx = \int_a^b (P(x, \psi(x)) - P(x, \varphi(x))) dx$$

Από την άλλη μεριά,

$$\begin{aligned}\int_{C^+} F \cdot dr &= \int_{C_1^+} F \cdot dr + \int_{C_2^+} F \cdot dr + \int_{C_3^+} F \cdot dr + \int_{C_4^+} F \cdot dr = \\ &= \int_{C_1^+} F \cdot dr + \int_{C_2^+} F \cdot dr - \int_{C_3^-} F \cdot dr - \int_{C_4^-} F \cdot dr\end{aligned}$$

(βλ. βελ. 109). Έχουμε:

$$\begin{aligned}\int_{C_1^+} F \cdot dr &= \int_a^b (P, 0)(r_1(t)) \cdot r_1'(t) dt = \int_a^b (P(t, \varphi(t)), 0) \cdot (1, \varphi'(t)) dt = \\ &= \int_a^b P(t, \varphi(t)) dt.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{C_2^+} F \cdot dr &= \int_{\varphi(b)}^{\psi(b)} (P, 0)(r_2(t)) \cdot r_2'(t) dt = \int_{\varphi(b)}^{\psi(b)} (P(b, t), 0) \cdot (0, 1) dt = \\ &= \int_{\varphi(b)}^{\psi(b)} 0 dt = 0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{C_3^+} F \cdot dr &= - \int_{C_3^-} F \cdot dr = - \int_a^b (P, 0)(r_3(t)) \cdot r_3'(t) dt = \\ &= - \int_a^b (P(t, \psi(t)), 0) \cdot (1, \psi'(t)) dt = - \int_a^b P(t, \psi(t)) dt.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{C_4^+} F \cdot dr &= - \int_{C_4^-} F \cdot dr = - \int_{\varphi(a)}^{\psi(b)} (P, 0)(r_4(t)) \cdot r_4'(t) dt = \\ &= - \int_{\varphi(a)}^{\psi(a)} (P(a, t), 0) \cdot (0, 1) dt = \int_{\varphi(a)}^{\psi(a)} 0 dt = 0.\end{aligned}$$

Αθροίζοντας έχουμε

$$(2) \quad \int_{C^+} F \cdot dr = \int_a^b (P(t, \varphi(t)) - P(t, \psi(t))) dt.$$

Από τις (1) και (2) παίρνουμε το ζητούμενο.

ΛΗΜΜΑ 2

Εστω D ένα y -απλό $\subseteq \mathbb{R}^2$, $C = \partial D$, $Q: D \rightarrow \mathbb{R}$ C^1 -διαφορίσιμη και $F = (0, Q): D \rightarrow \mathbb{R}^2$. Τότε

$$\int_{C^+} F \cdot dr = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy$$

Απόδ. Ομοια με την προηγούμενη.

ΘΕΩΡ. (Green)

Εστω D x -απλό και y -απλό, $C = \partial D$, $F = (P, Q): D \rightarrow \mathbb{R}^2$ C^1 -διαφορίσιμη. Τότε

$$\int_{C^+} F \cdot dr = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

Απόδ. Παρατηρούμε ότι $F = (P, Q) = (P, 0) + (0, Q)$ και εφαρμόζουμε τα προηγούμενα λήμματα.

ΠΑΡΑΔ.

(1) $F(x, y) = (x+y, y) \Rightarrow P(x, y) = x+y$, $Q(x, y) = y$ (C^∞ -διαδ.)

$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ x - και y -απλό.

$r(t) = (\cos t, \sin t) : t \in [0, 2\pi]$ C^∞ -καμπύλη.

$$\begin{aligned} \int_{C^+} F \cdot dr &= \int_0^{2\pi} F(r(t)) \cdot r'(t) dt = \int_0^{2\pi} (\cos t + \sin t, \sin t) \cdot (-\sin t, \cos t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} -\sin^2 t dt = \dots = -\pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy &= \iint_D (0 - 1) dx dy = - \iint_D 1 dx dy = \left(\begin{array}{l} \text{πολικός} \\ \text{μτχ.} \end{array} \right) \\ &= - \int_0^{2\pi} \left[\int_0^1 1 \cdot r dr \right] d\theta = \dots = -\pi. \end{aligned}$$

ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΣ $F = (P, Q) \Rightarrow$ θαάφουμε $\int_C Pdx + Qdy$
για το επικαμπύλιο $\int_C F \cdot dr$

Παράδ.

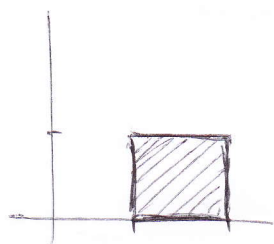
(2) Υπολογίστε χρησιμοποιώντας το Θ. Green το επικαμπύλιο

$$\int_C (x - xy)dx + (y^3 + 1)dy$$

όπου $C = \partial([1, 2] \times [0, 1])$ (x-απλό και y-απλό).

Απάντ.

$$\int_C \underbrace{(x - xy)}_{P(x, y)} dx + \underbrace{(y^3 + 1)}_{Q(x, y)} dy = \quad (\text{Green})$$



$$= \iint_D \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right] dx dy = \iint_D (0 - (-x)) dx dy$$

$$= \int_1^2 \left[\int_0^1 x dy \right] dx = \int_1^2 x dx = \left. \frac{x^2}{2} \right|_1^2 = 3/2.$$

(3) Υπολογίστε με χρήση του Θ. Green το

$$\int_C (x^3 + y^3)dx + (2y^3 - x^3)dy,$$

όπου $C = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$.

Απάντ.

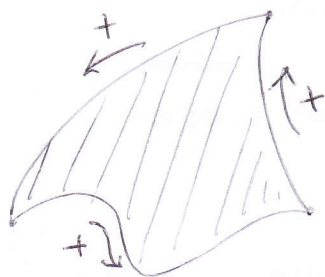
$C = \partial D$, όπου $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ x-απλό και y-απλό $\Rightarrow$

$$\int_C \underbrace{(x^3 + y^3)}_P dx + \underbrace{(2y^3 - x^3)}_Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy =$$

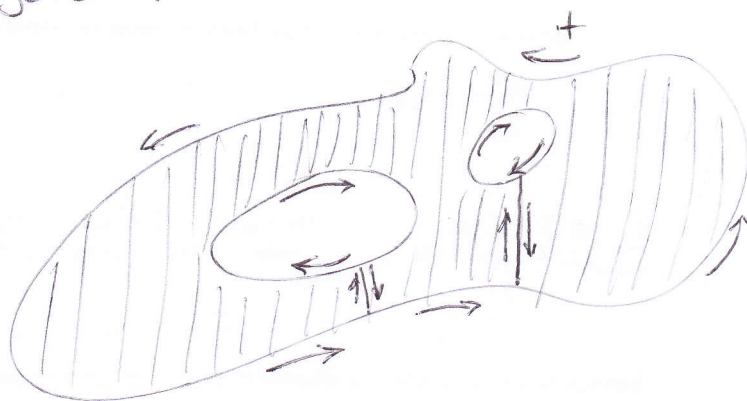
$$= \iint_D (-3x^2 - 3y^2) dx dy = -3 \iint_D (x^2 + y^2) dx dy = \left(\begin{array}{l} \text{πολικός} \\ \text{μζτα.} \end{array} \right)$$

$$= -3 \int_0^{2\pi} \left[\int_0^1 r^2 \cdot r dr \right] d\theta = \dots = -3 \frac{\pi}{2}.$$

ΟΡΞ Ένα απλό εὐνόλο Green είναι το εσωτερικό φέτας (κατά τμήματα) C^1 -καμπύλης Jordan. Ένα στοιχειώδες εὐνόλο Green είναι ένα φραγμένο $G \subseteq \mathbb{R}^2$ με εὐνορο ∂G να είναι ένωση ενός πεπερασμένου πλήθους από (κατά τμήματα) C^1 -καμπύλες Jordan.



απλό
Green



στοιχειώδες
Green

Προσοχή! Διατρέχουμε θετικά ένα στοιχειώδες εὐνόλο Green έχοντάς το πάντα αριστερά μας! Η εξωτερική καμπύλη διαχρoίζεται θετικά (αντίθετα των δεικτών των ρολογιού) ενώ οι εσωτερικές αντιστροφά!

ΘΕΩΡΗΜΑ Το θ -Green επεκτείνεται σε Green-απλά και σε Green-στοιχειώδη εὐνόλα.

Εφαρμογή

Έστω G απλό Green. Τότε το εμβαδόν του δίνεται από

$$A(G) = \frac{1}{2} \int_{(\partial G)^+} -y dx + x dy$$

Πράγματι:

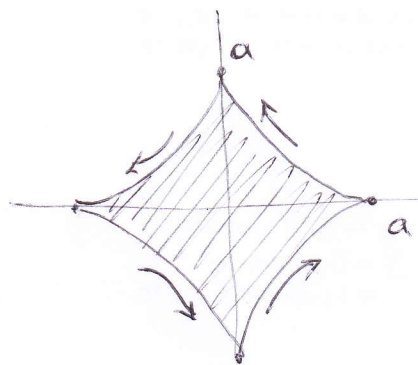
$$A(G) = \iint_G 1 dx dy = \iint_G (1/2 - (-1/2)) dx dy$$

Θέτω $P(x,y) = -y/2$, $Q(x,y) = x/2$, $F(x,y) = \frac{1}{2}(-y, x)$, οπότε:

$$A(G) = \iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_{(\partial G)^+} F \cdot dr = \frac{1}{2} \int_{(\partial G)^+} -y dx + x dy.$$

Άσκηση

Έστω G το εσωτερικό του αστεροειδούς που διατρέχεται από την $\gamma(t) = (a \cos^3 t, a \sin^3 t)$, $t \in [0, 2\pi]$. Να βρεθεί το εμβαδόν $A(G)$.



Απάντ.

$$\begin{aligned} A(G) &= \frac{1}{2} \int_{C^+} -y dx + x dy = \\ &= \frac{1}{2} \int_{C^+} F \cdot dr \end{aligned}$$

όπου $F(x, y) = (-y, x)$. Άρα:

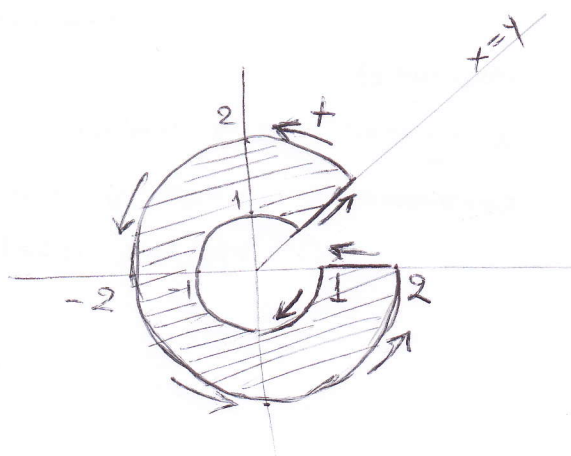
$$\begin{aligned} A(G) &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (-a \sin^3 t, a \cos^3 t) \cdot (-3a \cos^2 t \sin t, 3a \sin^2 t \cos t) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (3a^2 \sin^4 t \cos^2 t + 3a^2 \cos^4 t \sin^2 t) dt = \\ &= \frac{3a^2}{2} \int_0^{2\pi} \sin^2 t \cos^2 t dt = \frac{3a^2}{8} \int_0^{2\pi} \sin^2 2t dt = \dots = \frac{3\pi a^2}{8}. \end{aligned}$$

Άσκηση

Ζητείται το εμβαδόν

$$\int_{C^+} x dx + y dy$$

όπου C η καμπύλη
του σχήματος:



Απάντ.

Το εσωτερικό της καμπύλης είναι το χωρίο G που σε πολικές συντεταγμένες περιγράφεται από:

$$G = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq r \leq 2, \pi/4 \leq \theta \leq 2\pi\}.$$

Άρα

$$\begin{aligned} \int_{C^+} x dx + xy dy &= \iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \iint_G (y - 0) dx dy = \\ &= \int_{\pi/4}^{2\pi} \left[\int_1^2 r \sin \theta \cdot r dr \right] d\theta = \int_{\pi/4}^{2\pi} \left[\sin \theta \cdot \frac{r^3}{3} \Big|_1^2 \right] d\theta = \\ &= \frac{7}{3} \int_{\pi/4}^{2\pi} \sin \theta d\theta = \frac{7}{3} \left(-\cos \theta \Big|_{\pi/4}^{2\pi} \right) = \frac{7}{3} \left(-1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \end{aligned}$$

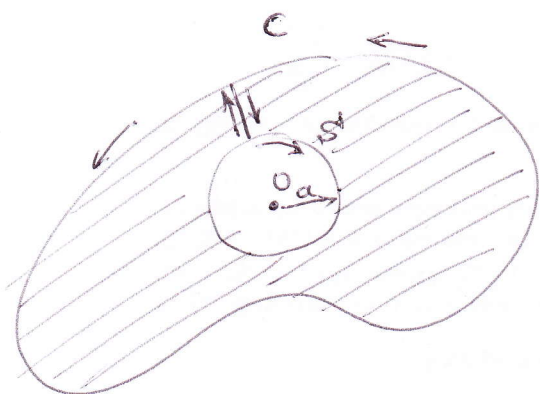
ΑΣΚΗΣΗ 4

Έστω C (κατα τμήμ.) $\mathbb{C}^1$ -διαφ. καμπύλη Jordan με το $(0,0)$ να ανήκει στο εσωτερικό της. Νόσο

$$\int_{C^+} -\frac{y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy = 2\pi.$$

Απόδ. Το εσωτερικό είναι ανοιχτό, άρα $\exists a > 0$:

$S(0, a) \subseteq \text{εσωτ. της } C$. Συμβολίζουμε με G το χωρίο ανάμεσα στην C και τον κύκλο S με κέντρο O και ακτίνα a .



Το G είναι στοιχειώδες σύνολο Green. Εξάλλου, για την δεδομένη F , είναι:

$$P(x, y) = -\frac{y}{x^2+y^2}, \quad Q(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{C^+} F \cdot dr + \int_{\substack{S^+ \\ \text{θετικά ως προς } G!}} F \cdot dr = \iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{C^+} F \cdot dr = - \int_{S^+} F \cdot dr = \int_{S^-} F \cdot dr =$$

↪ αρνητικά ως προς G αρα
θετικά ως προς εσωτερικό του
δίσκου

$$= \int_{S^+} F \cdot dr =$$

↪ συνίθης θετικός προσ/οφίος

$$= \int_0^{2\pi} F(r(t)) \cdot r'(t) dt = \int_0^{2\pi} F(a \cos t, a \sin t) \cdot$$

$$= \int_0^{2\pi} F(a \cos t, a \sin t) \cdot (-a \sin t, a \cos t) dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(-\frac{a \sin t}{a^2}, \frac{a \cos t}{a^2} \right) \cdot (-a \sin t, a \cos t) dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi.$$

Όπως φαίνεται από το προηγούμενο παράδειγμα, το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα μιας F στο σύνορο ενός στοιχειώδους Green, είναι άθροισμα των επικαμπύλιων ολοκληρωμάτων της F πάνω στην εξωτερική καμπύλη παραμετροποιημένη θετικά και πάνω στις εσωτερικές παραμετροποιημένες θετικά ως προς το Green, αλλά αρνητικά ως προς το δικό τους εσωτερικό.

ΘΕΩΡΗΜΑ GREEN (ΚΑΘΕΤΗ ΜΟΡΦΗ)

Εστω G ένα απλό σύνολο Green, $\partial G = \Gamma$ (κατά τμήματα) $\mathcal{C}^1$ -διαφορ. καμπύλη Jordan, παραμετρημένη θετικά από την $r(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [a, b]$. θεωρούμε το μοναδιαίο κάθετο (στην καμπύλη) διάνυσμα

$$n(t) = \frac{1}{\|r'(t)\|} \cdot (y'(t), -x'(t)).$$

Αν $F = (P, Q): G \rightarrow \mathbb{R}^2$ είναι $\mathcal{C}^1$ -διαφ. απεικόνιση, τότε

$$\int_{(\partial G)^+} F \cdot n \, ds = \iint_G \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx dy$$

Απόδ.

Η απεικόνιση $F \cdot n$ έχει πραγματικές τιμές, άρα η παράσταση στην αριστερή πλευρά της ισότητας είναι ένα σκαλιώδες ολοκλήρωμα 1ου είδους:

$$\int_{(\partial G)^+} F \cdot n \, ds = \int_a^b (F(r(t)) \cdot n(t)) \cdot \|r'(t)\| \, dt =$$

$$= \int_a^b (P(r(t)), Q(r(t))) \cdot \frac{1}{\|r'(t)\|} \cdot (y'(t), -x'(t)) \cdot \|r'(t)\| \, dt =$$

$$= \int_a^b (P(r(t)) \cdot y'(t) - Q(r(t)) \cdot x'(t)) \, dt =$$

$$= \int_a^b (-Q(r(t)), P(r(t))) \cdot r'(t) \, dt = \int_{(\partial G)^+} (-Q, P) \, ds \stackrel{(\text{Green})}{=} \iint_G \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx dy.$$

Παραδείγματα

Επαληθεύστε την κάθετη μορφή του Θ. Green για

① $F(x,y) = (x-y, x)$, $G = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Απόδ.

$$(\partial G)^+ = \{r(t) = (\cos t, \sin t) : t \in [0, 2\pi]\}$$

$$r'(t) = (-\sin t, \cos t), \quad \|r'(t)\| = 1, \quad n(t) = \frac{1}{1} (\cos t, -(-\sin t)) \Rightarrow n(t) = (\cos t, \sin t).$$

$$\rightarrow \iint_G \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx dy = \iint_G (1+0) dx dy = A(G) = \pi.$$

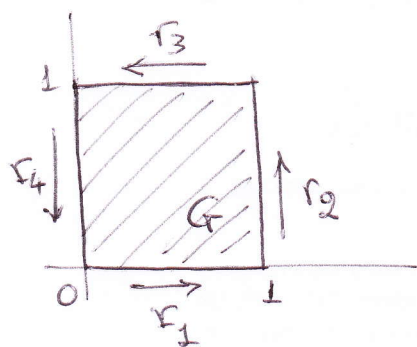
$$\rightarrow \int_{(\partial G)^+} F \cdot n \, ds = \int_0^{2\pi} (F(r(t)) \cdot n(t)) \cdot \|r'(t)\| \, dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} (\cos t - \sin t, \cos t) \cdot (\cos t, \sin t) \cdot 1 \, dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \cos^2 t \, dt = \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2t}{2} \, dt = \dots = \pi.$$

② $F(x,y) = (x^3 + y^2, x^4)$, $G = [0,1] \times [0,1]$.

Απόδ.



Το $(\partial G)^+$ διαχράζεται από τις

διαδοχικές παραμετρήσεις: για $t \in [0,1]$

$$r_1(t) = (t, 0) \Rightarrow r_1'(t) = (1, 0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|r_1'(t)\| = 1 \text{ και } n_1(t) = \frac{1}{1} (0, -1) = (0, -1),$$

$$r_2(t) = (1, t) \Rightarrow r_2'(t) = (0, 1) \Rightarrow \|r_2'(t)\| = 1 \text{ και } n_2(t) = \frac{1}{1} (1, -0) = (1, 0)$$

$$r_3(t) = (1-t, 1) \Rightarrow r_3'(t) = (-1, 0) \Rightarrow \|r_3'(t)\| = 1 \text{ και } n_3(t) = \dots = (0, 1)$$

$$r_4(t) = (0, 1-t) \Rightarrow r_4'(t) = (0, -1) \Rightarrow \|r_4'(t)\| = 1 \text{ και } n_4(t) = \dots = (-1, 0)$$

$$\rightarrow \iint_G \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx dy = \int_0^1 \left[\int_0^1 (3x^2 + 0) dx \right] dy = \int_0^1 \left[x^3 \Big|_0^1 \right] dy =$$

$$= \int_0^1 1 dy = 1.$$

$$\rightarrow \int_{(\partial G)^+} F \cdot n \, ds = \int_0^1 F(r_1(t)) \cdot \underbrace{n_1(t)}_1 \cdot \underbrace{\|r_1'(t)\|}_1 dt + \int_0^1 F(r_2(t)) \cdot \underbrace{n_2(t)}_1 \cdot \underbrace{\|r_2'(t)\|}_1 dt$$

$$+ \int_0^1 F(r_3(t)) \cdot \underbrace{n_3(t)}_1 \cdot \underbrace{\|r_3'(t)\|}_1 dt + \int_0^1 F(r_4(t)) \cdot \underbrace{n_4(t)}_1 \cdot \underbrace{\|r_4'(t)\|}_1 dt.$$

Εχουμε:

$$F(r_1(t)) \cdot n_1(t) = F(t, 0) \cdot (0, -1) = (t^3, t^4) \cdot (0, -1) = -t^4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^1 -t^4 dt = -t^5/5 \Big|_0^1 = -1/5.$$

$$F(r_2(t)) \cdot n_2(t) = F(1, t) \cdot (1, 0) = (1+t^2, 1) \cdot (1, 0) = 1+t^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^1 (1+t^2) dt = \left(t + \frac{t^3}{3} \right) \Big|_0^1 = 1 + 1/3.$$

$$F(r_3(t)) \cdot n_3(t) = F(1-t, 1) \cdot (0, 1) = ((1-t)^3 + 1, (1-t)^4) \cdot (0, 1) = (1-t)^4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^1 (1-t)^4 dt = -\frac{(1-t)^5}{5} \Big|_0^1 = 1/5.$$

$$F(r_4(t)) \cdot n_4(t) = F(0, 1-t) \cdot (-1, 0) = ((1-t)^2, 0) \cdot (-1, 0) = -(1-t)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^1 -(1-t)^2 dt = -\frac{(1-t)^3}{3} \Big|_0^1 = -1/3.$$

Αθροίζοντας έχουμε το ζητούμενο.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

① Επαληθεύστε την εδαπτομενική μορφή του Θ. Green στα παραδείγματα της σελ. 124.

(1a) Για $F(x, y) = (x-y, x)$, $G = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

$$\rightarrow \iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \iint_G (1 - (-1)) dx dy = 2 \iint_G 1 dx dy = 2A(G) = 2\pi.$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \int_{(\partial G)^+} F \cdot dr &= \int_0^{2\pi} F(r(t)) \cdot r'(t) dt = \int_0^{2\pi} (6\cos t - \pi \sin t, 6\sin t) \cdot (-\sin t, \cos t) dt = \\ &= \int_0^{2\pi} (-\pi \sin t \cos t + 6\cos^2 t + 6\sin^2 t) dt = \int_0^{2\pi} 1 - \pi \sin t \cos t dt = 2\pi - \int_0^{2\pi} \left(\frac{\pi \sin^2 t}{2} \right)' dt = \\ &= 2\pi - 0 = 2\pi. \end{aligned}$$

(1β) Για $F(x,y) = (x^3 + y^2, x^4)$, $G = [0,1] \times [0,1]$

$$\begin{aligned} \rightarrow \iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy &= \int_0^1 \left[\int_0^1 [4x^3 - 2y] dx \right] dy = \int_0^1 [x^4 - 2xy]_0^1 dy \\ &= \int_0^1 (1 - 2y) dy = (y - y^2) \Big|_0^1 = 1 - 1 = 0. \end{aligned}$$

$$\rightarrow F(r_1(t)) \cdot r_1'(t) = (t^3, t^4) \cdot (1, 0) = t^3 \Rightarrow \int_0^1 t^3 dt = t^4/4 \Big|_0^1 = 1/4.$$

$$F(r_2(t)) \cdot r_2'(t) = (1+t^2, 1) \cdot (0, 1) = 1 \Rightarrow \int_0^1 1 dt = 1.$$

$$\begin{aligned} F(r_3(t)) \cdot r_3'(t) &= ((1-t)^3 + 1, (1-t)^4) \cdot (-1, 0) = -1 - (1-t)^3 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \int_0^1 (-1 - (1-t)^3) dt = \dots = -5/4 \end{aligned}$$

$$F(r_4(t)) \cdot r_4'(t) = ((1-t)^2, 0) \cdot (0, -1) = 0 \Rightarrow \int_0^1 0 dt = 0.$$

Απομένοντας έχουμε το ζητούμενο.]

Θέματα Πτυχιακής Εξέτασης
“Ανάλυση ΙΙ και Εφαρμογές”
(17-03-2022)

Θέμα 1.

α. Να ευρεθεί το διπλό ολοκλήρωμα

$$I = \int_0^1 \left(\int_{\sqrt{y}}^1 \frac{y}{(1+x^5)^7} dx \right) dy$$

β. Να ευρεθεί η κατευθυνόμενη παράγωγος της συνάρτησης $f(x, y, z) = xy + e^{yz}$ στο σημείο $\vec{a} = (1, 2, 0)$ ως προς την κατεύθυνση $\vec{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$.

Θέμα 2.

α. Να ευρεθεί η μάζα και οι ροπές αδρανείας I_x και I_y του τριγωνικού χωρίου OAB με κορυφές τα σημεία $O(0, 0)$, $A(0, 1)$ και $B(1, 1)$ επάνω στο οποίο κατανέμεται μάζα (αμελητέου πάχους) πυκνότητας $\delta(x, y) = 4x + y$.

β. Να ευρεθεί το $\int_{\partial G} (xy - x^5) dx + (4x^2y + y^5) dy$, όπου G το τριγωνικό χωρίο με κορυφές τα σημεία $(0, 0)$, $(0, 1)$ και $(1, 1)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 3ου ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

ΑΝΑΛΥΣΗΣ II

Ανάγνου Κωνσταντίνος

Απρίλιος 2020

Άσκηση 1 :

Να σχεδιαστούν οι ισοψείς καμπύλες της συνάρτησης:

$$z = f(x, y) = \sqrt{64 - x^2 - y^2}.$$

Λύση :

Αρχικά θα βρούμε το πεδίο ορισμού D_f της συνάρτησης.
Πρέπει

$$\begin{aligned} 64 - x^2 - y^2 &\geq 0 \\ \Rightarrow x^2 + y^2 &\leq 64 \end{aligned}$$

Άρα $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 64\}$. Προκειμένου να βρούμε τις ισοψείς καμπύλες πρέπει πρώτα να θεωρήσουμε ένα τυχαίο επίπεδο $z = c$, και να εξετάσουμε την τομή του με τη συναρτησή μας.

$$\begin{aligned} z &= f(x, y) \\ \Rightarrow c &= \sqrt{64 - x^2 - y^2} \\ \Rightarrow c^2 &= 64 - x^2 - y^2 \\ \Rightarrow x^2 + y^2 &= 64 - c^2 \end{aligned}$$

Άρα οι ισοψείς καμπύλες είναι το σύνολο:

$I_c = \{(x, y) \in D_f \subseteq \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 64 - c^2\}$ και παριστάνουν το σύνολο των κύκλων με κέντρο το $O(0, 0)$, και ακτίνα $r = \sqrt{64 - c^2}$.

Οι γραφικές παραστάσεις παρατίθενται στο τέλος του αρχείου.

Άσκηση 2:

Ερώτημα 1:

Να σχεδιαστούν οι ισοψείς καμπύλες της συνάρτησης:

$$f(x, y) = 1 - x^2 - \frac{y^2}{R^2}.$$

Λύση :

Το πεδίο ορισμού αυτής της συνάρτησης είναι $D_f = \mathbb{R}^2$.

Ξανά, θεωρούμε ένα τυχαίο επίπεδο $z = c$ και εξετάζουμε την τομή του με τη συναρτησή μας.

$$\begin{aligned} z &= f(x, y) \\ \Rightarrow c &= 1 - x^2 - \frac{y^2}{R^2} \\ \Rightarrow x^2 + \frac{y^2}{R^2} &= 1 - c \\ \Rightarrow \frac{x^2}{1 - c} + \frac{y^2}{R^2(1 - c)} &= 1, c \neq 1 \end{aligned}$$

Άρα οι ισοψείς καμπύλες είναι το σύνολο:

$$I_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{1 - c} + \frac{y^2}{R^2(1 - c)} = 1\} \text{ και παριστάνουν ένα σύνολο ελλείψεων.}$$

Οι γραφικές παραστάσεις παρατίθενται στο τέλος του αρχείου.

Ερώτημα 2:

Να σχεδιαστούν οι ισοψείς καμπύλες της συνάρτησης:

$$f(x, y) = \frac{1 - x^2 - y^2}{R^2}$$

Λύση :

Το πεδίο ορισμού αυτής της συνάρτησης είναι $D_f = \mathbb{R}^2$.

Ξανά, θεωρούμε ένα τυχαίο επίπεδο $z = c$ και εξετάζουμε την τομή του με τη συναρτησή μας.

$$\begin{aligned} z &= f(x, y) \\ \Rightarrow c &= \frac{1 - x^2 - y^2}{R^2} \\ \Rightarrow x^2 + y^2 &= 1 - cR^2 \end{aligned}$$

Άρα οι ισοψείς καμπύλες είναι το σύνολο:

$$I_c = \{(x, y) \in D_f \subseteq \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1 - cR^2\}$$

και παριστάνουν το σύνολο των κύκλων με κέντρο το $O(0, 0)$, και ακτίνα $r = \sqrt{1 - cR^2}$.

Οι γραφικές παραστάσεις παρατίθενται στο τέλος του αρχείου.

Άσκηση 3:

Εξετάστε αν υπάρχει το όριο:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \left(y \sin \frac{1}{x} \right)$$

Λύση :

Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x, y) = y \sin \frac{1}{x}$, με $x \neq 0$, καθώς και τις ακολουθίες $\vec{a}_n = \left(\frac{1}{2n\pi}, 1 \right)$, $\vec{b}_n = \left(\frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}, 1 \right)$.

Και οι δύο αυτές ακολουθίες είναι διαφορετικές του σημείου συσσώρευσης, $\vec{a}_n, \vec{b}_n \neq (0, 1)$, ενώ συγκλίνουν σε αυτό καθώς $n \rightarrow \infty$. Δηλαδή:

$$\begin{aligned} \vec{a}_n &= \left(\frac{1}{2n\pi}, 1 \right) \rightarrow (0, 1), n \rightarrow \infty \\ \vec{b}_n &= \left(\frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}, 1 \right) \rightarrow (0, 1), n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

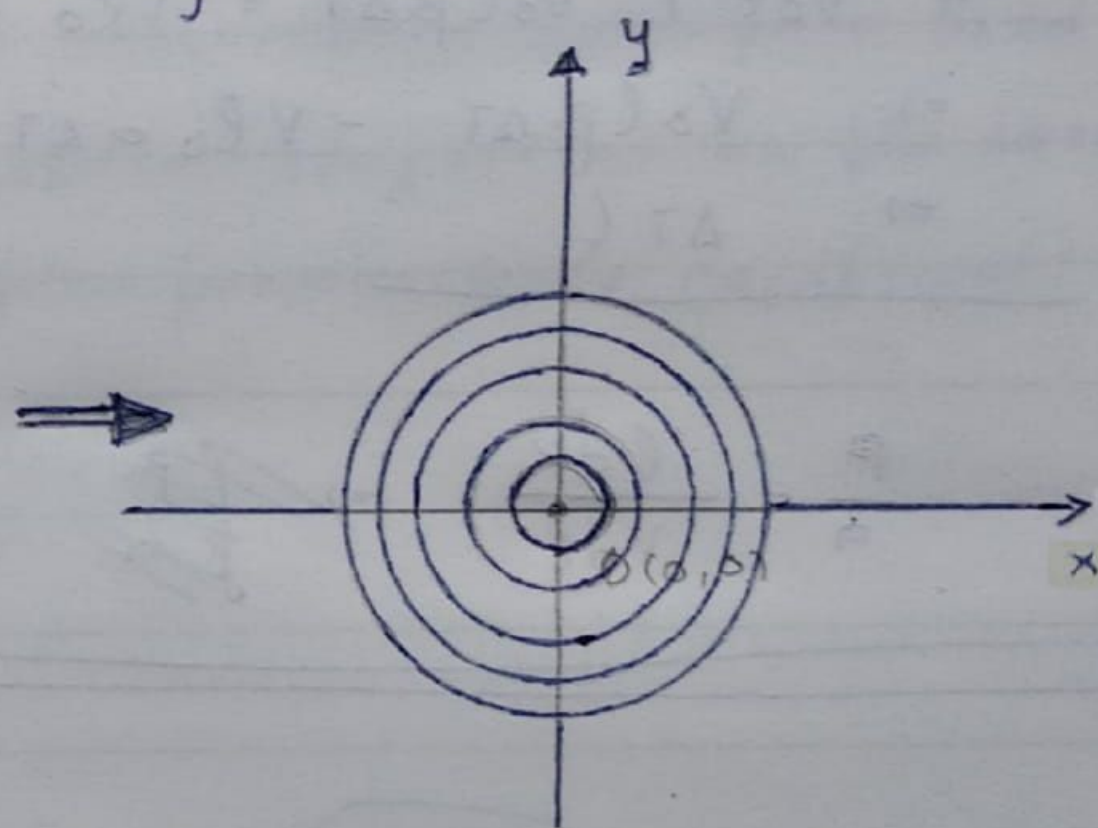
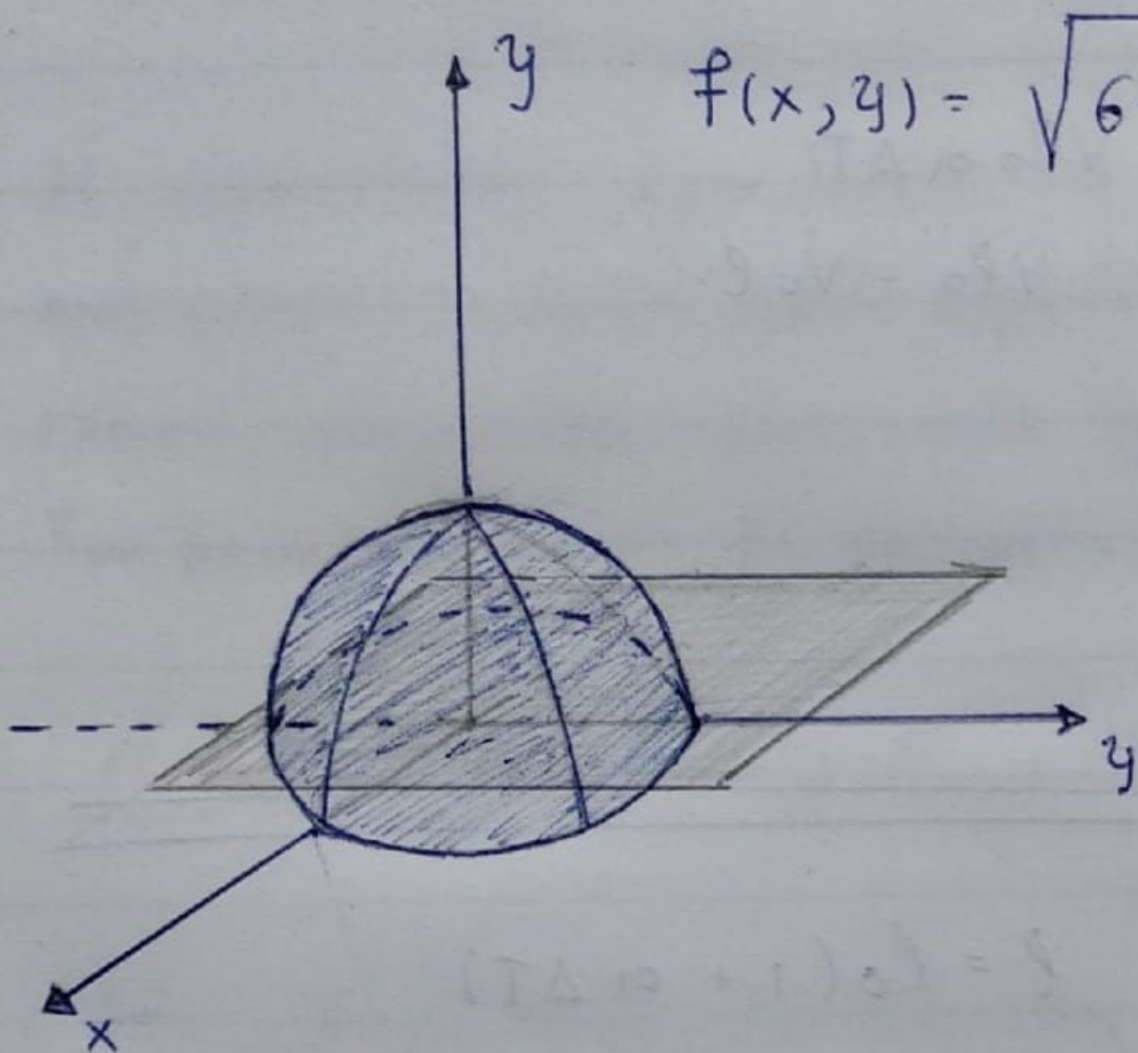
Επίσης ισχύει:

$$\begin{aligned} f(\vec{a}_n) &= 1 \sin 2n\pi = 0 \rightarrow 0 \\ f(\vec{b}_n) &= 1 \sin \left(2n\pi + \frac{\pi}{2} \right) = 1 \rightarrow 1 \end{aligned}$$

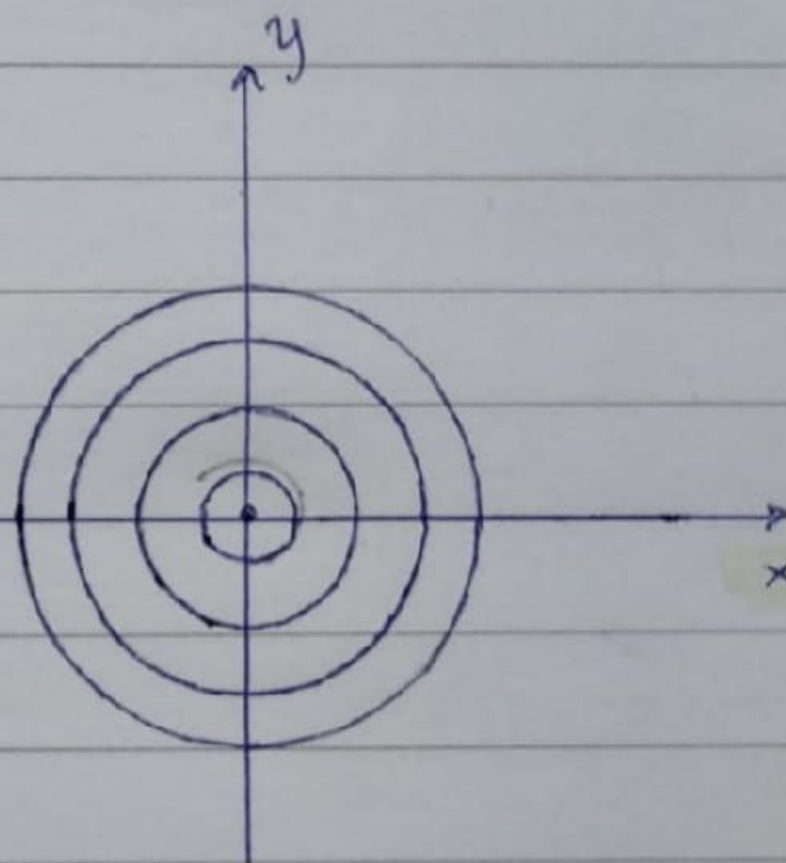
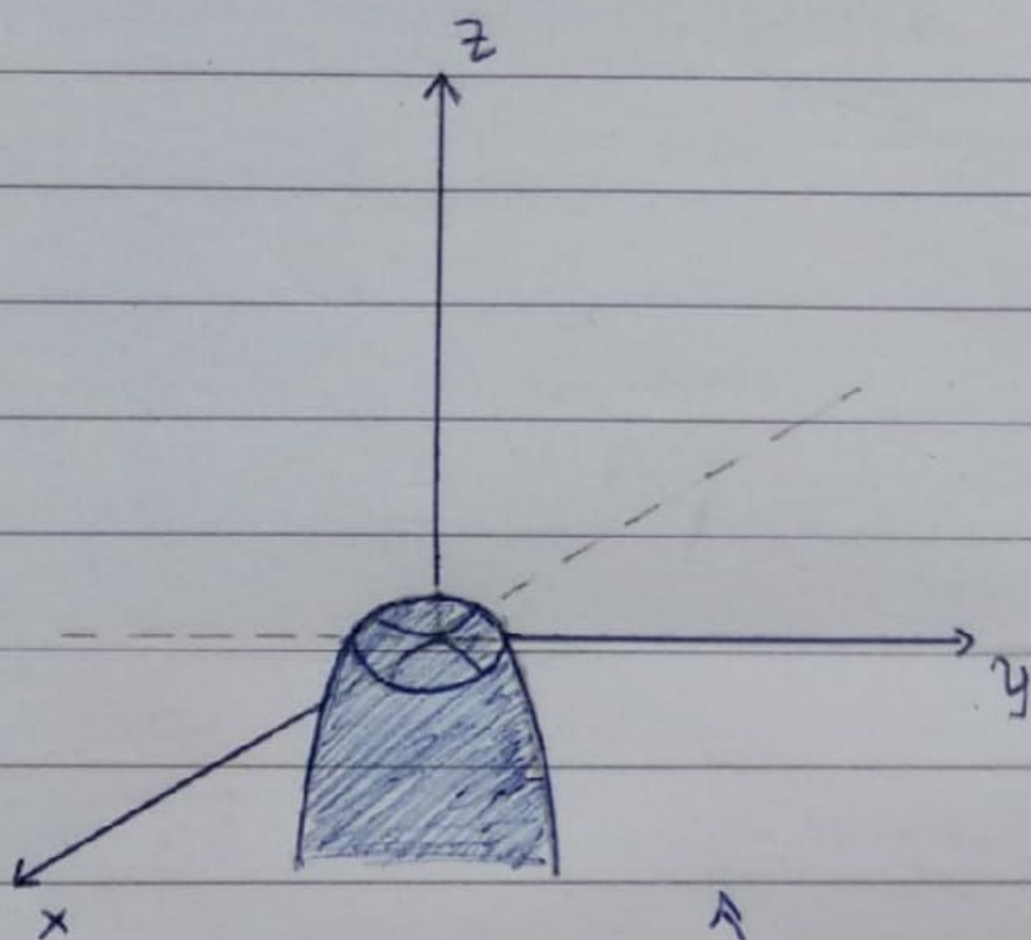
Επομένως με βάση την Αρχή της Μεταφοράς το όριο

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \left(y \sin \frac{1}{x} \right),$$

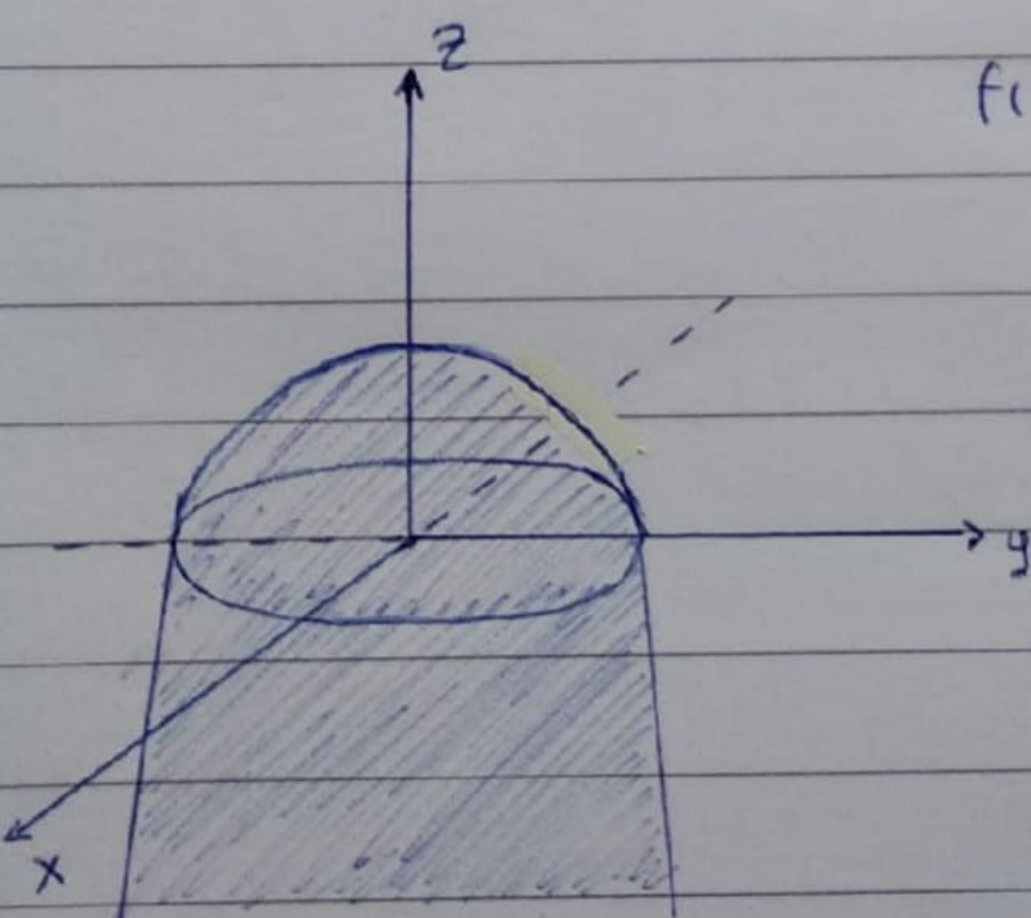
δεν υπάρχει ($\nexists$).



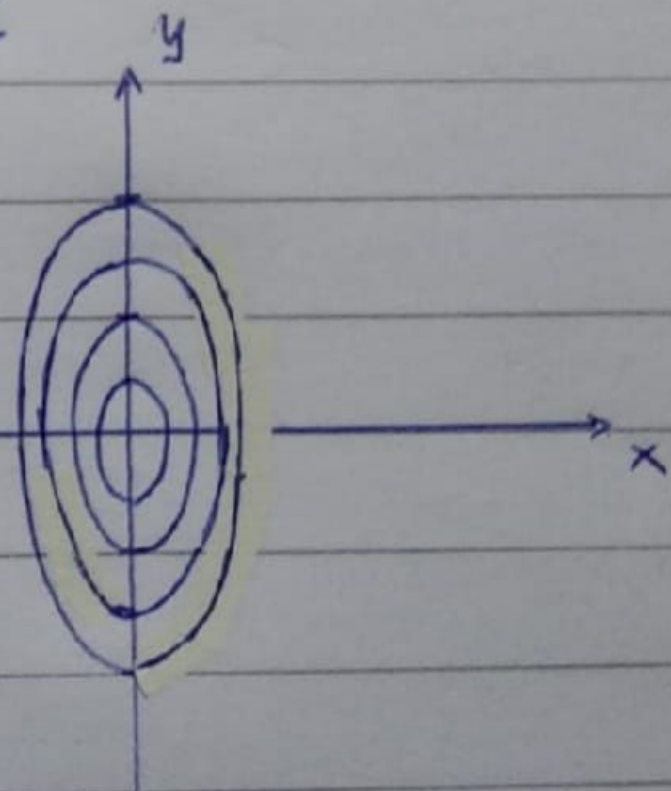
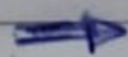
$$f(x, y) = \frac{1 - x^2 - y^2}{R^2}$$



Κόττω από
το επίπεδο $z = 0(x, y)$



$$f(x, y) = 1 - x^2 - \frac{y^2}{R^2}$$



ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙ - 5ο ΜΑΘΗΜΑ

Άσκηση 1

Υπολογίστε το $D\vec{f}(1, 2, -1)$, όπου $\vec{f}$ είναι η διανυσματική συνάρτηση τριών μεταβλητών $\vec{f}(x, y, z) = (x^2 + y - z, xyz^2, 2xy - y^2z)$.

Λύση

Ο πίνακας των μερικών παραγώγων της $\vec{f} = (f_1, f_2, f_3)$ είναι ο εξής :

$$D\vec{f} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Στη συνέχεια θα υπολογίσουμε τις μερικές παραγώγους (στοιχεία του πίνακα) στο σημείο $(1, 2, -1)$

- $\frac{\partial f_1}{\partial x} \Big|_{(1,2,-1)} = 2x \Big|_{(1,2,-1)} = 2$
- $\frac{\partial f_1}{\partial y} \Big|_{(1,2,-1)} = 1$
- $\frac{\partial f_1}{\partial z} \Big|_{(1,2,-1)} = -1$
- $\frac{\partial f_2}{\partial x} \Big|_{(1,2,-1)} = yz^2 \Big|_{(1,2,-1)} = 2$
- $\frac{\partial f_2}{\partial y} \Big|_{(1,2,-1)} = xz^2 \Big|_{(1,2,-1)} = 1$
- $\frac{\partial f_2}{\partial z} \Big|_{(1,2,-1)} = 2xyz \Big|_{(1,2,-1)} = -4$
- $\frac{\partial f_3}{\partial x} \Big|_{(1,2,-1)} = 2y \Big|_{(1,2,-1)} = 4$
- $\frac{\partial f_3}{\partial y} \Big|_{(1,2,-1)} = 2x - 2yz \Big|_{(1,2,-1)} = 6$
- $\frac{\partial f_3}{\partial z} \Big|_{(1,2,-1)} = -y^2 \Big|_{(1,2,-1)} = -4$

Τελικά έχουμε

$$D\vec{f}(1, 2, -1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \\ 4 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Άσκηση 2

Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή της κατευθυνόμενης παραγώγου, της βαθμωτής συνάρτησης $f(x, y, z) = x + \frac{y}{z}$, στο σημείο $\vec{a} = (4, 3, -1)$.

Λύση

Αρχικά θα υπολογίσουμε το ανάδελτα της f στη θέση $\vec{a}$.

$$\nabla f(x, y, z) = (f_x, f_y, f_z) = (1, \frac{1}{z}, \frac{-y}{z^2})$$

και

$$\nabla f \Big|_{(4,3,-1)} = (1, -1, -3)$$

Η ελάχιστη τιμή της κατευθυνόμενης παραγώγου θα είναι

$$\min [\nabla f(4, 3, -1)] = -\|\nabla f(4, 3, -1)\| = -\sqrt{1 + (-1)^2 + (-3)^2} = -\sqrt{11}.$$

Άσκηση 3

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{αν } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{αν } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Λύση

α) Να βρεθούν οι f_x , f_y .

Για $(x, y) \neq (0, 0)$ έχουμε

$$f_x(x, y) = 2x \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} - x(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} \cos \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Ομοίως

$$f_y(x, y) = 2y \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} - y(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} \cos \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Στο σημείο $(x, y) = (0, 0)$ θα υπολογίσουμε τα όρια

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(h \sin \frac{1}{h} \right) = 0$$

και

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(h \sin \frac{1}{h} \right) = 0$$

Άρα για $(x, y) = (0, 0)$, $f_x = 0$ και $f_y = 0$

β) Να εξετάσετε την συνέχεια των μερικών παραγώγων στο $(0, 0)$ Θα μελετήσουμε τα όρια $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f_x$ και $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f_y$. Έχουμε

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f_x = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f_x(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} 2x \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} - x(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} \cos \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Κατά μήκος της $x = 0$

$$\lim_{y \rightarrow 0} f_x(0, y) = \lim_{y \rightarrow 0} 0 = 0$$

Κατά μήκος της $y = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f_x(x, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} (2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x})$$

το οποίο δεν υπάρχει, άρα δεν υπάρχει και το $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f_x$, και η f_x δεν είναι συνεχής στο $(0, 0)$. Λόγω της συμμετρίας των μερικών παραγώγων τα ίδια ισχύουν και για την f_y .

γ) Να εξετάσετε αν η f είναι διαφορίσιμη στο $(0, 0)$. Προκειμένου να είναι η συνάρτησή μας διαφορίσιμη στο $(0, 0)$, θα πρέπει να ισχύει

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y) - f(0, 0) - \nabla f(0, 0) \cdot (x, y)}{\|(x, y) - (0, 0)\|} = 0$$

Ισχύει

$$\nabla f(0, 0) \cdot (x, y) = (0, 0) \cdot (x, y) = 0$$

Έχουμε λοιπόν

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y) - f(0, 0) - \nabla f(0, 0) \cdot (x, y)}{\|(x, y) - (0, 0)\|} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \sqrt{(x^2 + y^2)} \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$$

Για τον υπολογισμό του ορίου χρησιμοποιούμε τον ορισμό του ορίου. Άρα τελικά η $f(x, y)$ είναι διαφορίσιμη στο $(0, 0)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙ - 7ο ΜΑΘΗΜΑ

Άσκηση 1

Βρείτε τη μάζα μίας λεπτής πλάκας, πυκνότητας $\delta(x, y) = x + 1$, που φράσσεται από τις καμπύλες $y = x^2$, $y = -x^2 + 2x$.

Λύση

Το χωρίο που περιγράφεται είναι το εξής :

$$D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq -x^2 + 2x\}$$

και είναι X-απλό χωρίο.

Επομένως σύμφωνα με τον ορισμό της, η μάζα θα είναι:

$$\begin{aligned} m &= \int \int_D \delta(x, y) dx dy = \int_0^1 \int_{x^2}^{-x^2+2x} (x+1) dy dx = \int_0^1 [y(x+1)]_{x^2}^{-x^2+2x} dx = \\ &= \int_0^1 [(x+1)(-2x^2+2x)] dx = \int_0^1 (-2x^3+2x) dx = \left[-\frac{1}{2}x^4 + x^2\right]_0^1 \Rightarrow m = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Άσκηση 2

Βρείτε το κέντρο μάζας, τις στατικές ροπές, τις ροπές αδράνειας και την πολική ροπή του τριγωνικού χωρίου OAB με κορυφές O(0,0), A(1,0) και B(1,1), πάνω στο οποίο κατανέμεται μάζα αμελητέου πάχους πυκνότητας $\delta(x, y) = x + y^2$.

Λύση

Το χωρίο που περιγράφεται είναι το εξής :

$$D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$$

και είναι X-απλό χωρίο.

Επομένως σύμφωνα με τον ορισμό της η μάζα θα είναι:

$$\begin{aligned} m &= \int \int_D \delta(x, y) dx dy = \int_0^1 \int_0^x (x + y^2) dy dx = \int_0^1 \left[yx + \frac{y^3}{3} \right]_0^x dx = \\ &= \int_0^1 \left(x^2 + \frac{x^3}{3} \right) dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{12} \right]_0^1 = \frac{5}{12} \end{aligned}$$

Οι στατικές ροπές ως προς τον άξονα Ox και Oy αντίστοιχα είναι M_x , M_y

$$M_x = \int \int_D y \delta(x, y) dx dy = \int_0^1 \int_0^x (yx + y^3) dy dx = \int_0^1 \left(\frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{4} \right) dx$$

$$M_x = \left[\frac{x^4}{8} + \frac{x^5}{20} \right]_0^1 \Rightarrow M_x = \frac{7}{40}$$

και

$$M_y = \int \int_D x \delta(x, y) dx dy = \int_0^1 \int_0^x (x^2 + xy^2) dy dx = \int_0^1 \left[x^2 y + \frac{xy^3}{3} \right]_0^x dx$$

$$M_y = \int_0^1 \left(x^3 + \frac{x^4}{4} \right) dx = \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{20} \right]_0^1 \Rightarrow M_y = \frac{6}{20}$$

Άρα το κέντρο μάζας είναι $C = \left(\frac{M_y}{m}, \frac{M_x}{m} \right) \Rightarrow C = \left(\frac{72}{100}, \frac{84}{200} \right)$.

Οι ροπές αδράνειας είναι :

$$I_x = \int \int_D y^2 (x + y^2) dx dy = \int_0^1 \int_0^x (xy^2 + y^4) dy dx = \int_0^1 \left[x \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5} \right]_0^x dx$$

$$I_x = \int_0^1 \left(\frac{x^4}{3} + \frac{x^5}{5} \right) dx = \left[\frac{x^5}{15} + \frac{x^6}{30} \right]_0^1 \Rightarrow I_x = \frac{1}{10}$$

και

$$I_y = \int \int_D x^2 (x + y^2) dx dy = \int_0^1 \int_0^x (x^3 + x^2 y^2) dy dx = \int_0^1 \left[x^2 \frac{y^3}{3} + x^3 y \right]_0^x dx$$

$$I_y = \int_0^1 \left(x^4 + \frac{x^5}{3} \right) dx = \left[\frac{x^5}{5} + \frac{x^6}{18} \right]_0^1 \Rightarrow I_y = \frac{23}{90}$$

Τελικά η πολική ροπή είναι

$$I_o = I_x + I_y = \frac{16}{45} \quad .$$

Άσκηση 3

Να υπολογίσετε το διπλό ολοκλήρωμα $\int \int_B (e^x + x) \sin y dx dy$, όπου $B = [1, 2] \times [0, \frac{\pi}{2}]$.

Λύση

Ορίζουμε τη συνάρτηση $f : B \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = (e^x + x)\sin y$. Η f είναι συνεχής στο χωρίο B , το οποίο είναι Απλό. Άρα, με βάση το θώρημα *Fubini*, ισχύει :

$$\int \int_B (e^x + x)\sin y dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_1^2 (e^x + x)\sin y dx dy = \int_1^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (e^x + x)\sin y dy dx =$$

$$\int_1^2 (e^x + x) \left[-\cos y \right]_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \int_1^2 (e^x + x) dx = \left[e^x + \frac{x^2}{2} \right]_1^2 = e^2 - e + \frac{3}{2}$$

.

Άσκηση 4

Να υπολογίσετε το διπλό ολοκλήρωμα $\int_0^1 \int_x^1 \frac{\cos y}{y} dy dx$.

Λύση

Το χωρίο πάνω στο οποίο ολοκληρώνουμε την συνάρτησή μας είναι το

$$D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq 1\}$$

και είναι απλό (τριγωνικό χωρίο). Επομένως μπορεί να γραφεί και ως

$$D = \{(x, y) : 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq y\}$$

Από το Θεώρημα *Fubini* έχουμε :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_x^1 \frac{\cos y}{y} dy dx &= \int_0^1 \int_0^y \frac{\cos y}{y} dx dy = \int_0^1 \frac{\cos y}{y} \left[x \right]_0^y dy = \\ &= \int_0^1 y \frac{\cos y}{y} dy = \int_0^1 \cos y dy = \sin 1 \end{aligned}$$

.

Άσκηση 1

Να δείξετε ότι το $\widehat{S}(\vec{x}_0, \varepsilon) = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\vec{x} - \vec{x}_0\| \leq \varepsilon \right\}$ είναι κλειστό σύνολο.

Απόδειξη

Έστω $S^c = \mathbb{R}^n \setminus \widehat{S}(\vec{x}_0, \varepsilon) = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\vec{x} - \vec{x}_0\| > \varepsilon \right\}$ το συμπλήρωμα του $\widehat{S}(\vec{x}_0, \varepsilon)$ ως προς $\mathbb{R}^n$

και $\vec{x} \in S^c : \|\vec{x} - \vec{x}_0\| > \varepsilon \implies \exists \delta > 0 : \|\vec{x} - \vec{x}_0\| = \delta + \varepsilon$. Τότε $\forall \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ με $0 < \|\vec{y} - \vec{x}\| < \delta :$

$$\|\vec{x} - \vec{x}_0\| = \|\vec{x} - \vec{y} + \vec{y} - \vec{x}_0\| \leq \|\vec{x} - \vec{y}\| + \|\vec{y} - \vec{x}_0\| \implies \|\vec{y} - \vec{x}_0\| \geq \|\vec{x} - \vec{x}_0\| - \|\vec{x} - \vec{y}\| > \varepsilon + \delta - \delta \implies$$

$$\|\vec{y} - \vec{x}_0\| > \varepsilon \implies \vec{y} \in S^c. \text{ Άρα για τυχόν } \vec{x} \in S^c, S(\vec{x}, \delta) \subseteq S^c \implies$$

$$\forall \vec{x} \in S^c : \exists \delta(\vec{x}, \varepsilon) = \|\vec{x} - \vec{x}_0\| - \varepsilon = \delta > 0 : S(\vec{x}, \delta) \subseteq S^c \implies S^c \text{ ανοιχτό} \implies \widehat{S}(\vec{x}_0, \varepsilon) \text{ κλειστό}$$

Άσκηση 2

Να δείξετε ότι:

(α) το $(\alpha_1, b_1) \times (\alpha_2, b_2) \times \dots \times (\alpha_n, b_n)$ είναι ανοιχτό σύνολο και

(β) το $[\alpha_1, b_1] \times [\alpha_2, b_2] \times \dots \times [\alpha_n, b_n]$ είναι κλειστό σύνολο.

Απόδειξη

(α) $\vec{x} \in (\alpha_1, b_1) \times (\alpha_2, b_2) \times \dots \times (\alpha_n, b_n) = A_n \Leftrightarrow \alpha_j < x_j < b_j \forall j = 1, 2, \dots, n$

$$(\alpha_1, b_1) \equiv S\left(\frac{\alpha_1 + b_1}{2}, \frac{b_1 - \alpha_1}{2}\right) \implies (\alpha_1, b_1) \text{ ανοιχτό} : \Pi(1)$$

έστω $\Pi(n-1) : A_{n-1} = (\alpha_1, b_1) \times (\alpha_2, b_2) \times \dots \times (\alpha_{n-1}, b_{n-1})$ ανοιχτό

Τότε για τυχαίο $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in A_n :$

$$\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) = \{(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})\} \times \{(x_n)\} = \{pr_{A_{n-1}}(\vec{x})\} \times \{(x_n)\}. \text{ Από επαγωγική υπόθεση}$$

$$\exists \varepsilon > 0 : S(pr_{A_{n-1}}(\vec{x}), \varepsilon) \subseteq A_{n-1}. \text{ Για } \varepsilon' = \frac{|x_n - \alpha_n| + |x_n - b_n| - \left| |x_n - \alpha_n| - |x_n - b_n| \right|}{2} > 0$$

$$\forall \vec{y} \in S(pr_{A_{n-1}}(\vec{x}), \varepsilon) \times S(x_n, \varepsilon') : \forall j = 1, 2, \dots, n-1 : \alpha_j < x_j < b_j \text{ και } \alpha_n < x_n < b_n \implies$$

$$\text{για } \delta = \min\{\varepsilon, \varepsilon'\} > 0 : S(\vec{x}, \min\{\varepsilon, \delta\}) \subseteq A_n \implies A_n \text{ ανοιχτό} : \Pi(n)$$

$\Pi(1)$ και $\Pi(n) \implies \Pi(n+1) :$

$\forall n \in \mathbb{N} : (\alpha_1, b_1) \times (\alpha_2, b_2) \times \dots \times (\alpha_n, b_n)$ ανοιχτό σύνολο

(β) $\vec{x} \in [\alpha_1, b_1] \times [\alpha_2, b_2] \times \dots \times [\alpha_n, b_n] = B_n \Leftrightarrow \alpha_j \leq x_j \leq b_j \forall j = 1, 2, \dots, n$

$$[\alpha_1, b_1] \equiv \widehat{S}\left(\frac{\alpha_1 + b_1}{2}, \frac{b_1 - \alpha_1}{2}\right) \implies [\alpha_1, b_1] \text{ κλειστό} : \Pi(1)$$

έστω $\Pi(n-1) : B_{n-1} = [\alpha_1, b_1] \times [\alpha_2, b_2] \times \dots \times [\alpha_{n-1}, b_{n-1}]$ κλειστό $\implies (B_{n-1})^c$ ανοιχτό

$$B_n = B_{n-1} \times [\alpha_n, b_n] \implies (B_n)^c = (B_{n-1} \times [\alpha_n, b_n])^c \implies$$

$$(B_n)^c = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid proj_{B_{n-1}}(\vec{x}) \notin B_{n-1} \text{ ή } x_n < \alpha_n \text{ ή } x_n > b_n \right\} \implies$$

$$(B_n)^c = \left\{ (B_{n-1})^c \times \mathbb{R} \right\} \cup \left\{ \mathbb{R}^{n-1} \times (-\infty, \alpha) \right\} \cup \left\{ \mathbb{R}^{n-1} \times (\beta, +\infty) \right\}, \alpha \vee \Gamma = (B_{n-1})^c \times \mathbb{R},$$

$\Delta = \mathbb{R}^{n-1} \times (-\infty, \alpha)$ και $E = \mathbb{R}^{n-1} \times (\beta, +\infty)$, τότε $(B_n)^c = \Gamma \cup \Delta \cup E$. Παρατηρούμε ότι

$$\Gamma^c = B_{n-1} \times \mathbb{R}, \Delta^c = \mathbb{R}^{n-1} \times [a, +\infty), E^c = \mathbb{R}^{n-1} \times (-\infty, \beta] \text{ κλειστά υποσύνολα } \mathbb{R}^n \implies$$

Γ, Δ, E ανοιχτά υποσύνολα $\mathbb{R}^n$. Τότε $(B_n)^c$ ανοιχτό υποσύνολο $\mathbb{R}^n$ (ως ένωση ανοιχτών συνόλων) $\implies B_n$ κλειστό : $\Pi(n)$

$\Pi(1)$ και $\Pi(n) \implies \Pi(n+1)$:
 $\forall n \in \mathbb{N} : [\alpha_1, b_1] \times [\alpha_2, b_2] \times \dots \times [\alpha_n, b_n]$ κλειστό σύνολο

Άσκηση

Να βρείτε το σύνορο των συνόλων :

(i) $(0, +\infty)$

(ii) $\mathbb{R}$

(i) $bd((0, +\infty)) = \{x \in \mathbb{R} \mid \forall \varepsilon > 0 : S(x, \varepsilon) \cap (0, +\infty) \neq \emptyset \text{ και } S(x, \varepsilon) \cap (\mathbb{R} \setminus (0, +\infty)) \neq \emptyset\} \implies$
 $bd((0, +\infty)) = \{x \in \mathbb{R} \mid \forall \varepsilon > 0 : S(x, \varepsilon) \cap (0, +\infty) \neq \emptyset \text{ και } S(x, \varepsilon) \cap (-\infty, 0) \neq \emptyset\} \implies$
 $bd((0, +\infty)) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0 \text{ και } x \leq 0\} = \{0\}$

(ii) $bd\mathbb{R} = \{x \in \mathbb{R} \mid \forall \varepsilon > 0 : S(x, \varepsilon) \cap \mathbb{R} \neq \emptyset \text{ και } S(x, \varepsilon) \cap \emptyset \neq \emptyset\} = \emptyset$

Πρόταση

Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα :

(α) A κλειστό

(β) $A' \subseteq A$

(γ) $bdA \subseteq A$

Απόδειξη

Αν A κλειστό (α) : έστω $\vec{x} \in A' : \forall \varepsilon > 0 : S(\vec{x}, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ και $\vec{x} \notin A \implies \vec{x} \in A^c = \mathbb{R}^n \setminus A$

A κλειστό $\implies A^c$ ανοιχτό : $\exists \varepsilon > 0 : S(\vec{x}, \varepsilon) \subseteq A^c \implies S(\vec{x}, \varepsilon) \cap A = \emptyset$, άτοπο. Άρα $\forall \vec{x} \in A' \implies \vec{x} \in A \implies$

$A' \subseteq A$ (β)

$bdA = \left\{ \vec{x} \in A \mid \forall \varepsilon > 0 : S(\vec{x}, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset \text{ και } S(\vec{x}, \varepsilon) \cap A^c \neq \emptyset \right\} = A' \cap (A^c) ' \subseteq A' \subseteq A$ (γ). Έχουμε δείξει ότι

(α) $\implies$ (β) $\implies$ (γ). Αν $bdA \subseteq A$ (γ) : έστω A ανοιχτό : $\forall \vec{x} \in A : \exists \varepsilon > 0 : S(\vec{x}, \varepsilon) \subseteq A$, άτοπο.

$\forall \vec{x} \in bdA \subseteq A : \forall \varepsilon > 0 : S(\vec{x}, \varepsilon) \cap A^c \neq \emptyset \implies \forall \varepsilon > 0 : \exists \vec{y} \in S(\vec{x}, \varepsilon) : \vec{y} \notin A \implies \nexists \varepsilon > 0 : S(\vec{x}, \varepsilon) \subseteq A$.

Άρα A κλειστό, δηλαδή (γ) $\implies$ (α). Τελικά, (α) $\implies$ (β) $\implies$ (γ) $\implies$ (δ) $\implies$ (α), δηλαδή

(α) $\Leftrightarrow$ (β) $\Leftrightarrow$ (γ) $\Leftrightarrow$ (δ)

Πρόταση

Έστω $f, g : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} : \exists M \geq 0 : |f(\vec{x})| \leq M \forall \vec{x} \in A$ και $\exists \vec{x}_0 \in A' : \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} g(\vec{x}) = 0$.

Τότε $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} [f(\vec{x})g(\vec{x})] = 0$

Απόδειξη

για $M = 0 : f(\vec{x}) = 0 \implies f(\vec{x})g(\vec{x}) = 0 \implies \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} [f(\vec{x})g(\vec{x})] = 0 \forall \vec{x}_0 \in A'$

για $M > 0$: έστω $\varepsilon > 0 \implies \frac{\varepsilon}{M} > 0 : \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} g(\vec{x}) = 0 \implies \exists \delta \left(\vec{x}_0, \frac{\varepsilon}{M} \right) = \delta > 0 : \forall \vec{x} \in A \text{ με } 0 < \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \delta :$

$|g(\vec{x})| < \frac{\varepsilon}{M}$. Για $0 < \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \delta : |f(\vec{x})g(\vec{x})| \leq |f(\vec{x})||g(\vec{x})| \leq M|g(\vec{x})| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta(\vec{x}_0, \varepsilon) = \delta_2 > 0 : \forall \vec{x} \in A \text{ με } 0 < \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \delta_2 : |f(\vec{x})g(\vec{x})| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} [f(\vec{x})g(\vec{x})] = 0$

Θεώρημα

Έστω $\vec{f} : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ με $f(\vec{x}) = (f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}), \dots, f_j(\vec{x}), \dots, f_m(\vec{x})) \text{ } j = 1, 2, \dots, m,$

$\vec{x}_0 \in A'$ και $\vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_j, \dots, b_m)$. Τότε $\forall j = 1, 2, \dots, m : \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{b} \Leftrightarrow \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f_j(\vec{x}) = b_j$

Απόδειξη

$$\text{Av} \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f_j(\vec{x}) = b_j \forall j = 1, 2, \dots, m : \text{έστω } \varepsilon > 0, \exists \delta_j \left(\vec{x}_0, \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}} \right) = \delta_j > 0 : \forall \vec{x} \in A \text{ με } 0 < \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \delta_j :$$

$$|f_j(\vec{x}) - b_j| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}. \text{ Για } \delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_j, \dots, \delta_m\} > 0 : \forall \vec{x} \in A \text{ με } 0 < \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \delta :$$

$$\|\vec{f}(\vec{x}) - \vec{b}\| = \left(\sum_{j=1}^m (f_j(x) - b_j)^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \sqrt{m \cdot \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{m}} \right)^2} = \varepsilon \Leftrightarrow \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{b}$$

$$\text{Av} \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{b} : \text{έστω } \varepsilon > 0. \exists \delta(\vec{x}_0, \varepsilon) = \delta > 0 : \forall \vec{x} \in A \text{ με } 0 < \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \delta : \|\vec{f}(\vec{x}) - \vec{b}\| < \varepsilon$$

$$\forall j = 1, 2, \dots, m : |f_j(\vec{x}) - b_j| \leq \|\vec{f}(\vec{x}) - \vec{b}\| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f_j(\vec{x}) = b_j \forall j = 1, 2, \dots, m$$

$$\text{Αρα } \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{b} \Leftrightarrow \forall j = 1, 2, \dots, m : \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f_j(\vec{x}) = b_j$$

Β' τρόπος

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{b} \Leftrightarrow \left(\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta(\vec{x}_0, \varepsilon) = \delta > 0 : \forall \vec{x} \in A \text{ με } 0 < \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \delta : \|\vec{f}(\vec{x}) - \vec{b}\| < \varepsilon \right) \Rightarrow$$

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} \|\vec{f}(\vec{x}) - \vec{b}\| = 0 \Rightarrow \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} \left(\|\vec{f}(\vec{x}) - \vec{b}\|^2 \right) = 0 \Rightarrow \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} \left(\sum_{j=1}^m |f_j(\vec{x}) - b_j|^2 \right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta'(\vec{x}_0, \varepsilon) = \delta' > 0 : \forall \vec{x} \in A \text{ με } 0 < \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \delta' : \sum_{j=1}^m |f_j(\vec{x}) - b_j|^2 < \varepsilon \right)$$

$$\text{Έστω } \exists j = 1, 2, \dots, m : \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} |f_j(\vec{x}) - b_j| = a > 0 \Rightarrow \gamma \text{ ια } \varepsilon = \frac{a}{2} > 0 : \exists \delta'' \left(\vec{x}_0, \frac{a}{2} \right) = \delta'' > 0 :$$

$$\forall \vec{x} \in A \text{ με } 0 < \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \delta'' : |f_j(\vec{x}) - b_j| > \frac{a}{2} > 0 \Rightarrow |f_j(\vec{x}) - b_j|^2 > \frac{a^2}{4} \Rightarrow \left(\sum_{j=1}^m |f_j(\vec{x}) - b_j|^2 \right) > \frac{a^2}{4}, \text{ άτοπο.}$$

$$\text{Αρα } \forall j = 1, 2, \dots, m : \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} |f_j(\vec{x}) - b_j| = 0 \Rightarrow \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f_j(\vec{x}) = b_j.$$

$$\text{Έστω } \forall j = 1, 2, \dots, m : \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f_j(\vec{x}) = b_j \Rightarrow \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} |f_j(\vec{x}) - b_j| = 0 \Rightarrow \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} \left(\sum_{j=1}^m |f_j(\vec{x}) - b_j|^2 \right) = 0 \Rightarrow$$

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} \|\vec{f}(\vec{x}) - \vec{b}\| = 0 \Leftrightarrow \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} (\vec{f}(\vec{x}) - \vec{b}) = \vec{0} \Leftrightarrow \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{b}.$$

$$\text{Αρα } \forall j = 1, 2, \dots, m : \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{b} \Leftrightarrow \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f_j(\vec{x}) = b_j$$

Θεώρημα

$$\text{Έστω } \vec{f}, \vec{g} : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \text{ και } \vec{x}_0 \in A' : \exists \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} \vec{f}(\vec{x}), \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} \vec{g}(\vec{x}) \in \mathbb{R}^m. \text{ Τότε}$$

$$(i) \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} (\vec{f}(\vec{x}) + \vec{g}(\vec{x})) = \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} \vec{f}(\vec{x}) + \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} \vec{g}(\vec{x})$$

$$(ii) \forall \lambda \in \mathbb{R} : \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} (\lambda \vec{f}(\vec{x})) = \lambda \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} \vec{f}(\vec{x})$$

$$(iii) \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} (\vec{f}(\vec{x}) \cdot \vec{g}(\vec{x})) = \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} \vec{f}(\vec{x}) \cdot \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} \vec{g}(\vec{x})$$

$$(iv) \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} (\vec{f}(\vec{x}) \times \vec{g}(\vec{x})) = \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} \vec{f}(\vec{x}) \times \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} \vec{g}(\vec{x}) \text{ (για } m = 3 \text{)}$$

Απόδειξη

$$\text{έστω } \alpha, b \in \mathbb{R}^m : \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} \vec{f}(\vec{x}) = \alpha \text{ και } \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} \vec{g}(\vec{x}) = b.$$

$$(i) \text{ έστω } \varepsilon > 0 : \exists \delta \left(\vec{x}_0, \frac{\varepsilon}{2} \right) = \delta > 0 : \forall \vec{x} \in A \text{ με } 0 < \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \delta : \|\vec{f}(\vec{x}) - \alpha\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\kappa\alpha\iota \quad \exists \delta \left(\vec{x}_0, \frac{\varepsilon}{2} \right) = \delta > 0 : \forall \vec{x} \in A \quad \mu \varepsilon \quad 0 < \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \delta : \|\vec{g}(\vec{x}) - \vec{b}\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\forall \vec{x} \in A \quad \mu \varepsilon \quad 0 < \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \delta :$$

$$\|(f(\vec{x}) + g(\vec{x})) - (\vec{a} + \vec{b})\| \leq \|f(\vec{x}) - \vec{a}\| + \|g(\vec{x}) - \vec{b}\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \Leftrightarrow$$

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} (f(\vec{x}) + g(\vec{x})) = \vec{a} + \vec{b} = \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f(\vec{x}) + \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} g(\vec{x})$$

$$(ii) \quad \gamma\iota\alpha \quad \lambda \neq 0 : \exists \delta' \left(\vec{x}_0, \frac{\varepsilon}{|\lambda|} \right) = \delta' > 0 : \forall \vec{x} \in A \quad \mu \varepsilon \quad 0 < \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \delta' : \|\vec{f}(\vec{x}) - \vec{\alpha}\| < \frac{\varepsilon}{|\lambda|}$$

$$\|\lambda \vec{f}(\vec{x}) - \lambda \vec{\alpha}\| = |\lambda| \cdot \|\vec{f}(\vec{x}) - \vec{a}\| < |\lambda| \cdot \frac{\varepsilon}{|\lambda|} = \varepsilon \Leftrightarrow \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} (\lambda \vec{f}(\vec{x})) = \lambda \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} \vec{f}(\vec{x})$$

$$\gamma\iota\alpha \quad \lambda = 0 : \lambda \vec{f}(\vec{x}) = 0 \cdot \vec{f}(\vec{x}) = \vec{0} \implies \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} [\lambda \vec{f}(\vec{x})] = \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} \vec{0} = \vec{0} = 0 \cdot \vec{\alpha} = \lambda \vec{\alpha}.$$

$$\text{A}\rho\alpha \quad \forall \lambda \in R : \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} (\lambda \vec{f}(\vec{x})) = \lambda \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} \vec{f}(\vec{x})$$

$$(iii) \quad \|\vec{f}(\vec{x}) \cdot \vec{g}(\vec{x}) - \vec{a} \cdot \vec{b}\| \leq \|\vec{f}(\vec{x}) \cdot \vec{g}(\vec{x}) - \vec{g}(\vec{x}) \cdot \vec{a} + \vec{g}(\vec{x}) \cdot \vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{b}\| \implies$$

$$\|\vec{f}(\vec{x}) \cdot \vec{g}(\vec{x}) - \vec{a} \cdot \vec{b}\| \leq \|(\vec{f}(\vec{x}) - \vec{a}) \cdot \vec{g}(\vec{x}) + (\vec{g}(\vec{x}) - \vec{b}) \cdot \vec{b}\| \implies$$

$$\|\vec{f}(\vec{x}) \cdot \vec{g}(\vec{x}) - \vec{a} \cdot \vec{b}\| \leq \|(\vec{f}(\vec{x}) - \vec{a}) \cdot \vec{g}(\vec{x})\| + \|(\vec{g}(\vec{x}) - \vec{b}) \cdot \vec{b}\| \implies (\text{ανισότιητα } Cauchy - Schwarz)$$

$$\|\vec{f}(\vec{x}) \cdot \vec{g}(\vec{x}) - \vec{a} \cdot \vec{b}\| \leq \|\vec{f}(\vec{x}) - \vec{a}\| \|\vec{g}(\vec{x})\| + \|\vec{g}(\vec{x}) - \vec{b}\| \|\vec{b}\|$$

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{\alpha} \implies \gamma\iota\alpha \quad \varepsilon = 1 > 0 : \exists \delta_1 > 0 : \forall \vec{x} \in A \cap N_{\delta_1}(\vec{x}_0) : \|\vec{f}(\vec{x}) - \vec{a}\| < 1 \implies$$

$$\|\vec{f}(\vec{x}) - \vec{a} + \vec{a}\| \leq \|\vec{f}(\vec{x}) - \vec{a}\| + \|\vec{a}\| < 1 + \|\vec{a}\| = M$$

$$\alpha\nu \quad \|\vec{b}\| > 0 : \acute{\epsilon}\sigma\tau\omega \quad \varepsilon > 0 : \exists \delta \left(\vec{x}_0, \frac{\varepsilon}{2M} \right) = \delta_1 > 0 : \forall \vec{x} \in A \quad \mu \varepsilon \quad 0 < \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \delta_2 : \|\vec{f}(\vec{x}) - \vec{\alpha}\| < \frac{\varepsilon}{2M}$$

$$\kappa\alpha\iota \quad \exists \delta \left(\vec{x}_0, \frac{\varepsilon}{2\|\vec{b}\|} \right) = \delta_2 > 0 : \forall \vec{x} \in A \quad \mu \varepsilon \quad 0 < \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \delta_3 : \|\vec{g}(\vec{x}) - \vec{b}\| < \frac{\varepsilon}{2\|\vec{b}\|}. \quad \text{Τότε} \varepsilon :$$

$$\forall \vec{x} \in A \quad \mu \varepsilon \quad 0 < \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\} : \|\vec{f}(\vec{x}) \cdot \vec{g}(\vec{x}) - \vec{a} \cdot \vec{b}\| \leq M \|\vec{f}(\vec{x}) - \vec{a}\| + \|\vec{b}\| \|\vec{g}(\vec{x}) - \vec{b}\| \implies$$

$$\|\vec{f}(\vec{x}) \cdot \vec{g}(\vec{x}) - \vec{a} \cdot \vec{b}\| < M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} + \|\vec{b}\| \cdot \frac{\varepsilon}{2\|\vec{b}\|} = \varepsilon$$

$$\alpha\nu \quad \|\vec{b}\| = 0 \implies \vec{b} = \vec{0}, \delta\eta\lambda\alpha\delta\acute{\eta} \quad \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} \vec{g}(\vec{x}) = \vec{0} \Leftrightarrow \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} \|\vec{g}(\vec{x})\| = 0 \quad \kappa\alpha\iota \quad |\vec{f}(\vec{x}) \cdot \vec{g}(\vec{x})| \leq \|\vec{f}(\vec{x})\| \|\vec{g}(\vec{x})\|$$

$$\forall \vec{x} \in A \cap N_{\delta_1}(\vec{x}_0) : |\vec{f}(\vec{x}) \cdot \vec{g}(\vec{x})| \leq M \|\vec{g}(\vec{x})\| \implies \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} (\vec{f}(\vec{x}) \cdot \vec{g}(\vec{x})) = 0 = \vec{a} \cdot \vec{0} \implies$$

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} (\vec{f}(\vec{x}) \cdot \vec{g}(\vec{x})) = \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} \vec{f}(\vec{x}) \cdot \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} \vec{g}(\vec{x}).$$

$$(iv) \quad \|\vec{f}(\vec{x}) \times \vec{g}(\vec{x}) - \vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{f}(\vec{x}) \times \vec{g}(\vec{x}) - \vec{a} \times \vec{g}(\vec{x}) + \vec{a} \times \vec{g}(\vec{x}) - \vec{a} \times \vec{b}\| \implies$$

$$\|\vec{f}(\vec{x}) \times \vec{g}(\vec{x}) - \vec{a} \times \vec{b}\| = \|(\vec{f}(\vec{x}) - \vec{a}) \times \vec{g}(\vec{x}) + \vec{a} \times (\vec{g}(\vec{x}) - \vec{b})\| \implies$$

$$\|\vec{f}(\vec{x}) \times \vec{g}(\vec{x}) - \vec{a} \times \vec{b}\| \leq \|(\vec{f}(\vec{x}) - \vec{a}) \times \vec{g}(\vec{x})\| + \|\vec{a} \times (\vec{g}(\vec{x}) - \vec{b})\|$$

$$\|\vec{f}(\vec{x}) \times \vec{g}(\vec{x}) - \vec{a} \times \vec{b}\| \leq \|\vec{f}(\vec{x}) - \vec{a}\| \|\vec{g}(\vec{x})\| + \|\vec{g}(\vec{x}) - \vec{b}\| \|\vec{a}\|. \quad \text{Έστω } \varepsilon > 0 : \text{ομοίως με } (iii) :$$

$$\exists \delta(\vec{x}_0, \varepsilon) = \delta > 0 : \forall \vec{x} \in A \quad \mu \varepsilon \quad 0 < \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \delta : \|\vec{f}(\vec{x}) \times \vec{g}(\vec{x}) - \vec{a} \times \vec{b}\| < \varepsilon$$

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} (\vec{f}(\vec{x}) \times \vec{g}(\vec{x})) = \vec{a} \times \vec{b} = \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} \vec{f}(\vec{x}) \times \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} \vec{g}(\vec{x})$$

Πρόταση

Έστω $\vec{f}, \vec{g} : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ και $\vec{x}_0 \in A'$:

(i) $\vec{f}$ μηδενική στο $\vec{x}_0 \Leftrightarrow \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{0}$

(ii) $\vec{g}$ τοπικά φραγμένη στο $\vec{x}_0 \Leftrightarrow \exists M \geq 0, \delta > 0 : \forall \vec{x} \in A : 0 < \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \delta : \|\vec{g}(\vec{x})\| \leq M$

Τότε :

(a) $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} (\|\vec{f}(\vec{x})\| \|\vec{g}(\vec{x})\|) = 0$

(β) $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} (\|\vec{f}(\vec{x})\| \cdot \vec{g}(\vec{x})) = \vec{0}$

(γ) $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} (\vec{f}(\vec{x}) \times \vec{g}(\vec{x})) = \vec{0}$

Απόδειξη

Έστω $\varepsilon > 0$. $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{0} \implies \exists \delta_1 \left(\vec{x}_0, \frac{\varepsilon}{M} \right) = \delta_1 > 0 : \forall \vec{x} \in A \text{ με } 0 < \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \delta_1 : \|\vec{f}(\vec{x})\| < \frac{\varepsilon}{M}$.

Για $\delta_2 = \min\{\delta_1, \delta\} > 0 : \forall \vec{x} \in A \text{ με } 0 < \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \delta_2 : \|\vec{f}(\vec{x})\| \|\vec{g}(\vec{x})\| < \frac{\varepsilon}{M} \cdot \varepsilon = \varepsilon$. Παρατηρούμε ότι από

ανισότητα *Cauchy – Schwarz* : $\|\vec{f}(\vec{x})\| \cdot \|\vec{g}(\vec{x})\| = \|\vec{f}(\vec{x})\| \cdot \|\vec{g}(\vec{x})\| < \varepsilon$ και $\|\vec{f}(\vec{x}) \times \vec{g}(\vec{x})\| \leq \|\vec{f}(\vec{x})\| \|\vec{g}(\vec{x})\| < \varepsilon$.

Άρα $\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta(\vec{x}_0, \varepsilon) = \delta_2 > 0 : \forall \vec{x} \in A \text{ με } 0 < \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \delta_2 :$

(α) $\|\vec{f}(\vec{x})\| \|\vec{g}(\vec{x})\| < \varepsilon \implies \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} (\|\vec{f}(\vec{x})\| \|\vec{g}(\vec{x})\|) = 0$

(β) $\|\vec{f}(\vec{x})\| \cdot \vec{g}(\vec{x}) < \varepsilon \implies \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} (\|\vec{f}(\vec{x})\| \cdot \vec{g}(\vec{x})) = \vec{0}$

(γ) $\|\vec{f}(\vec{x}) \times \vec{g}(\vec{x})\| < \varepsilon \implies \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} (\vec{f}(\vec{x}) \times \vec{g}(\vec{x})) = \vec{0}$

Άσκηση

Να δείξετε ότι :

(a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(\frac{x^2 y}{x^2 + y^2}, \frac{\cos(x^2 + y^2) - 1}{x^2 + y^2} \right) = (0, 0)$

(β) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{\sin(x^2 + 2y^2)}{x^2 + y^2} \right) \quad (\nexists)$

Λύση

(α) $\vec{f} : A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2 : \vec{f}(x, y) = \left(\frac{x^2 y}{x^2 + y^2}, \frac{\cos(x^2 + y^2) - 1}{x^2 + y^2} \right)$ με συνιστώσες συναρτήσεις :

$f_1 : A \rightarrow \mathbb{R} : f_1(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}, (x, y) \neq (0, 0)$ και $f_2 : A \rightarrow \mathbb{R} : f_2(x, y) = \frac{\cos(x^2 + y^2) - 1}{x^2 + y^2}, (x, y) \neq (0, 0)$.

Έστω $\varepsilon > 0 : \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < \|(x, y)\| < \varepsilon : |f_1(x, y)| = \left| \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \right| \leq \frac{x^2 |y|}{x^2 + y^2} \leq \frac{(x^2 + y^2) \sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2} \implies$

$|f_1(x, y)| \leq \sqrt{x^2 + y^2} = \|(x, y)\| < \varepsilon$. Άρα $\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta = \delta(\varepsilon) = \varepsilon > 0 : \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ με } 0 < \|(x, y)\| < \delta :$

$|f_1(x, y)| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(\frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \right) = 0$

$|f_2(x, y)| = \left| \frac{\cos(x^2 + y^2) - 1}{x^2 + y^2} \right| = \frac{\left[\sin(x^2 + y^2) \right]^2}{x^2 + y^2} = u \left(\frac{\sin u}{u} \right)^2$ με $u : A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}, u(x, y) = x^2 + y^2 > 0$,

$u \in C^0(A)$ και $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} u(x, y) = 0$. Ως γνωστόν, $\lim_{u \rightarrow 0^+} \left(\frac{\sin u}{u} \right) = 1 \implies \lim_{u \rightarrow 0^+} \left(\frac{\sin u}{u} \right)^2 = 1^2 = 1$.

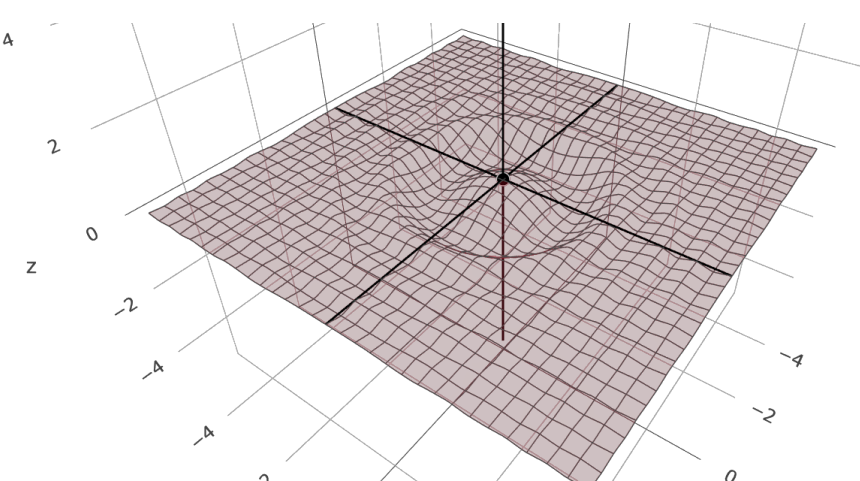
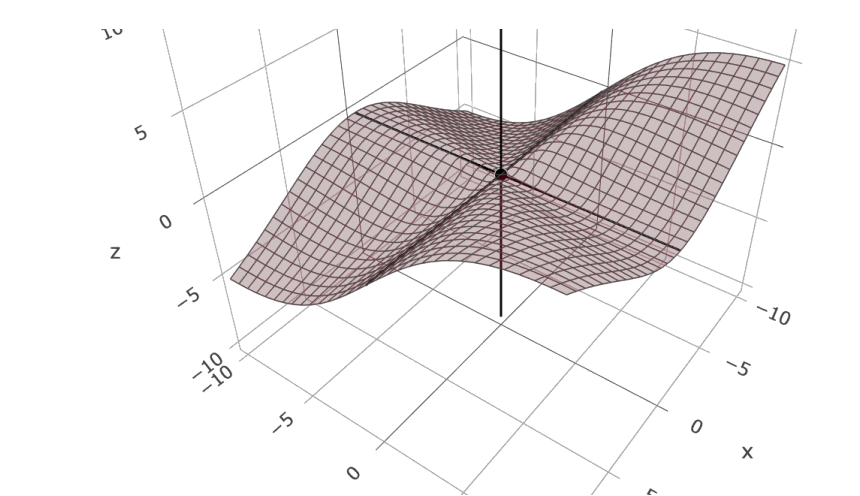
$$\text{Άρα } \lim_{u \rightarrow 0^+} \left[u \left(\frac{\sin u}{u} \right)^2 \right] = 0 \cdot 1 = 0 \Leftrightarrow \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall u \in \mathbb{R}^+ \text{ με } 0 < u < \delta : \left| u \left(\frac{\sin u}{u} \right)^2 - 0 \right| < \varepsilon.$$

Παρατηρούμε ότι $u = \|(x,y)\|^2$. Τότε έχουμε ότι $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ με $0 < \|(x,y)\| < \sqrt{\delta} \implies |$

$$\frac{\cos(x^2+y^2)-1}{x^2+y^2}| < \varepsilon, \text{ δηλαδή } \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ με } 0 < \|(x,y)\| < \delta : |f_2(x,y)| < \varepsilon \Leftrightarrow$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(\frac{\cos(x^2+y^2)-1}{x^2+y^2} \right) = 0. \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f_1(x,y) = 0 \in \mathbb{R} \text{ και } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f_2(x,y) = 0 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(\frac{x^2y}{x^2+y^2}, \frac{\cos(x^2+y^2)-1}{x^2+y^2} \right) = (0,0)$$



$$(\beta) \vec{f}: A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2 : \vec{f}(x,y) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{\sin(x^2+2y^2)}{x^2+y^2} \right) \text{ με συνιστώσες συναρτήσεις :}$$

$$f_1: A \rightarrow \mathbb{R}: f_1(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \, (x,y) \neq (0,0), \, f_2: A \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}: f_2(x,y) = \frac{\sin(x^2+2y^2)}{x^2+y^2}, \, (x,y) \neq (0,0)$$

$$\text{έστω } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{\sin(x^2+2y^2)}{x^2+y^2} \right) = \vec{a} = (a_1,a_2) \in \mathbb{R}^2. \text{ Τότε } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f_1(x,y) = a_1 \in \mathbb{R} \text{ και}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f_2(x,y) = a_2 \in \mathbb{R}. \text{ Για τον περιορισμό της } f_1 \text{ στην ημιευθεία } \vec{c_1}(t) = (t,0), \, t > 0 \text{ ισχύει ότι :}$$

$$g_1(t) = f_1(\vec{c_1}(t)) = f_1(t,0) = \frac{t}{|t|} = 1, \, x > 0 \implies \lim_{t \rightarrow 0^+} g_1(t) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f_1(t,g_1(t)) = 0. \text{ Για τον περιορισμό της } f_1$$

$$\text{στην ημιευθεία } \vec{c_2}(t) = (t,0), \, t < 0 \text{ ισχύει: } g_2(t) = f_1(\vec{c_2}(t)) = f_1(t,0) = \frac{t}{|t|} = -1, \, t < 0 \implies$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} g_2(t) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f_1(t,g_2(t)) = -1 \neq 0. \text{ Τότε (ως συνέπεια της αρχής της μεταφοράς)}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} f_1(\vec{c_1(t)}) = 1 \neq -1 = \lim_{x \rightarrow 0} f_1(\vec{c_2(t)}), \text{ άτοπο. Άρα } \nexists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f_1(x,y) \implies$$

$$\nexists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{\sin(x^2 + 2y^2)}{x^2 + y^2} \right)$$

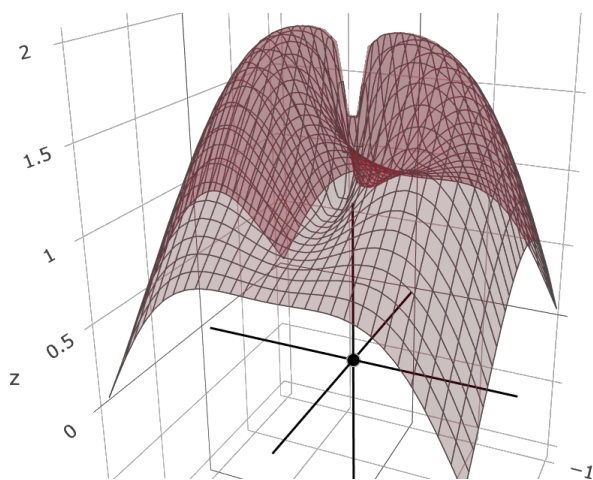
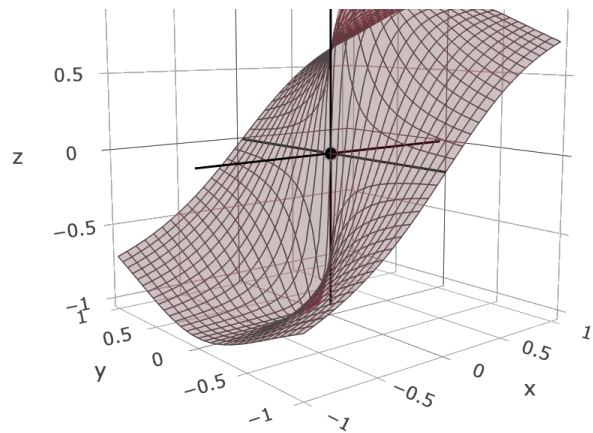
Επίσης, παρατηρούμε ότι για τον περιορισμό της f_2 στην ημιευθεία $\vec{c_1(t)} = (t, 0), t > 0$ ισχύει ότι:

$$g_3(t) = f_2(\vec{c_1(t)}) = f_1(t, 0) = \frac{\sin(t^2)}{t^2} \implies \lim_{t \rightarrow 0} g_3(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(t^2)}{t^2} = \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{\sin u}{u} = 1 \implies a_2 = 1, \text{ ενώ για τον}$$

$$\text{περιορισμό της } f_2 \text{ στην ημιευθεία } \vec{c_2(t)} = (t, t), t > 0, g_3(t) = f_2(\vec{c_2(t)}) = f_1(t, t) = \frac{\sin(3t^2)}{2t^2} \implies$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} g_3(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(3t^2)}{2t^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(3t^2)}{3t^2} \cdot \frac{3t^2}{2t^2} \right) = \lim_{u \rightarrow 0^+} \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{\sin u}{u} \right) = \frac{3}{2} \implies a_2 = \frac{3}{2}, \text{ άτοπο.}$$

$$\text{Άρα } \nexists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^2 + 2y^2)}{x^2 + y^2}$$



ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙ & ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ_ΕΑΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2020

ΔΗΜΗΤΡΗΣ ΠΙΤΣΟΣ_ ΑΡ.ΜΗΤΡΩΟΥ: 1110201900303

Άσκηση 1

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Λύση

$\forall (x, y) \neq (0, 0)$ f συνεχής ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων. Όμως $\nexists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$, διότι

για $x = 0, y \neq 0$: $f(0, y) = 0 \xrightarrow{y \rightarrow 0} 0 = f(0, 0)$ ενώ για $y = x \neq 0$: $f(x, x) = \frac{1}{2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \neq 0$. Η f δεν

είναι συνεχής στο $(0, 0) \implies$ η f δεν είναι διαφορίσιμη στο $(0, 0)$. Για $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$:

$$\text{Θεωρούμε } g_{y_0}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \text{ με } g(x) = f(x, y_0) = \frac{xy_0}{x^2 + y_0^2}. \text{ Τότε } \frac{dg}{dx} = \frac{y_0(x^2 + y_0^2) - xy_0 \cdot 2x}{(x^2 + y_0^2)^2} \implies$$

$$\frac{dg}{dx} = \frac{y_0^3 - x^2 y_0}{(x^2 + y_0^2)^2}. \text{ Άρα: } \forall (x_0, y_0) \neq (0, 0): \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} \implies$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h} = \frac{dg}{dx}(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{y_0^3 - y_0 x_0^2}{(x_0^2 + y_0^2)^2}. \text{ Παρατηρούμε ότι}$$

$$\nexists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left[\frac{y(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2} \right]: \text{ για } y = 0, x \neq 0: \frac{\partial f}{\partial x}(x, 0) = 0 \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0, \text{ για } x = 0, y \neq 0:$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, y) = \frac{y^3}{y^4} = \frac{1}{y} \rightarrow \begin{cases} \xrightarrow{y \rightarrow 0^+} +\infty \\ \xrightarrow{y \rightarrow 0^-} -\infty \end{cases} \implies \nexists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}. \text{ Όμως } \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = 0.$$

$$\text{Άρα } \frac{\partial f}{\partial x}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} \frac{y(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}, \text{ ασυνεχής στο } (0, 0)$$

$$\text{Αντίστοιχα για } (x, y) \neq (0, 0): \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} - \text{η } f \text{ είναι συμμετρική ως προς τις}$$

$$\text{μεταβλητές } x, y, \text{ δηλαδή } f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} = \frac{yx}{y^2 + x^2} = f(y, x) - \nexists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}:$$

$$\text{για } x = 0, y \neq 0: \frac{\partial f}{\partial y}(0, y) = 0 \xrightarrow{y \rightarrow 0} 0 \text{ ενώ για } y = 0, x \neq 0: \frac{\partial f}{\partial y}(x, 0) = \frac{1}{x} \rightarrow \begin{cases} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty \\ \xrightarrow{x \rightarrow 0^-} -\infty \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = 0, \text{ δηλαδή } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \begin{cases} \frac{x(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Η f είναι μερικώς παραγωγίσιμη ως προς την μεταβλητή x και ως προς την μεταβλητή y

$$\text{στο } \mathbb{R}^2, \text{ άρα είναι μερικώς παραγωγίσιμη με } \nabla f = \begin{cases} \left(\frac{y(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2}, \frac{x(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \right), & (x, y) \neq (0, 0) \\ (0, 0), & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

αλλά $f \notin C^1(\mathbb{R}^2)$. Έστω ότι το διαφορικό της f στο $(0, 0)$ υπάρχει. Τότε

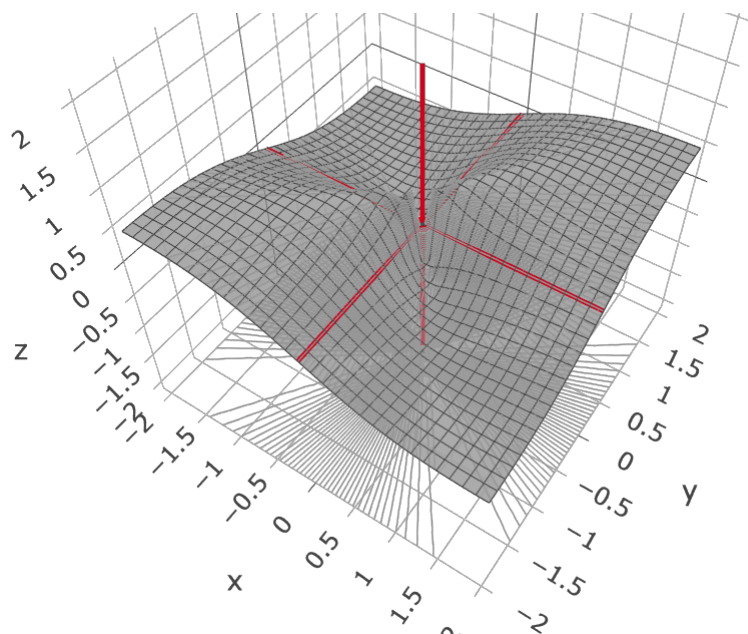
$$df_{(0,0)}(h_1, h_2) = \vec{\nabla} f(0, 0) \cdot (h_1, h_2) = 0. \text{ Τότε } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y) - f(0, 0) - df_{(0,0)}(x, y)}{\|(x, y)\|} = 0 \implies$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(\frac{\frac{xy}{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) = 0 \implies \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(\frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}^3} \right) = 0, \text{ άτοπο. Για } x = 0, y \neq 0:$$

$$\frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}^3} = 0 \xrightarrow{y \rightarrow 0} 0 \text{ ενώ για } y = x \neq 0: \frac{x \cdot x}{\sqrt{x^2 + x^2}^3} = \frac{x^2}{\sqrt{2x^2}^3} = \frac{x^2}{\sqrt{2}^3 x^3} = \frac{1}{\sqrt{2}^3 x} \begin{cases} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty \\ \xrightarrow{x \rightarrow 0^-} -\infty \end{cases}$$

$$\nexists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(\frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}^3} \right). \text{ Άρα } \nexists df_{(0,0)}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \text{ δηλαδή δεν υπάρχει εφαπτόμενο επίπεδο στην}$$

f στο $(0, 0)$.



Άσκηση 2

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y - xy^3}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Λύση

$$\forall (x, y) \neq (0, 0): f \text{ συνεχής ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων και } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(\frac{x^3 y - xy^3}{x^2 + y^2} \right) = 0 \implies$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = f(0, 0) \implies f \text{ συνεχής στο } (0, 0) \implies f \text{ συνεχής.}$$

$$(\text{έστω } \varepsilon > 0. \text{ Για } \delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{2} > 0: \|(x, y)\| < \delta \implies |f(x, y)| < \varepsilon, \text{ διότι}$$

$$\left| \frac{x^3 y - xy^3}{x^2 + y^2} \right| \leq \frac{|x^3||y| + |x||y^3|}{x^2 + y^2} \leq \frac{|x^2 + y^2|^{\frac{3}{2}}|x^2 + y^2|^{\frac{1}{2}} + |x^2 + y^2|^{\frac{1}{2}}|x^2 + y^2|^{\frac{3}{2}}}{x^2 + y^2} = \frac{(x^2 + y^2)^2}{x^2 + y^2} = x^2 + y^2$$

$$\gamma\iota\alpha\ (x,y) \neq (0,0): f_x(x,y) = \frac{(3x^2y - y^3)(x^2 + y^2) - (x^3y - xy^3)2x}{(x^2 + y^2)^2} \implies$$

$$f_x(x,y) = \frac{(3x^4y + 3x^2y^3 - y^3x^2 - y^5 - 2x^4y + 2x^2y^3)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^4y + 5x^2y^3 - y^5}{(x^2 + y^2)^2}. \text{ Τότε } f_x(0,y) = -y, y \neq 0.$$

$$\text{Παρατηρούμε ότι: } f(y,x) = \frac{y^3x - yx^3}{y^2 + x^2} = -f(x,y) \implies f_y(x,y) = -f_x(y,x) \implies$$

$$f_y(x,y) = \frac{-y^4x - 4y^2x^3 + x^5}{(x^2 + y^2)^2}. \text{ Αναλυτικά, } f_y(x,y) = \frac{(x^3 - 3xy^2)(x^2 + y^2) - (x^3y - xy^3)2y}{(x^2 + y^2)^2} \implies$$

$$f_y(x,y) = \frac{x^5 + x^3y^2 - 3x^3y^2 - 3xy^4 - 2x^3y^2 + 2xy^4}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^5 - 4x^3y^2 - xy^4}{(x^2 + y^2)^2}, (x,y) \neq (0,0) \text{ και}$$

$$f_y(x,0) = x = -f_x(0,x), x \neq 0. \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0 \in \mathbb{R} \implies f_x(0,0) = 0. \text{ Η } f \text{ είναι}$$

$$\text{μερικώς παραγωγίσιμη με } \nabla f = \begin{cases} \left(\frac{-y^5 + 5x^2y^3 + x^4y}{(x^2 + y^2)^2}, \frac{x^5 - 4x^3y^2 - xy^4}{(x^2 + y^2)^2} \right), & (x,y) \neq (0,0) \\ (0,0) & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\left(\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(\frac{-y^5 + 5x^2y^3 + x^4y}{(x^2 + y^2)^2} \right), \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(\frac{x^5 - 4x^3y^2 - xy^4}{(x^2 + y^2)^2} \right) \right) = (0,0) = \nabla f(0,0),$$

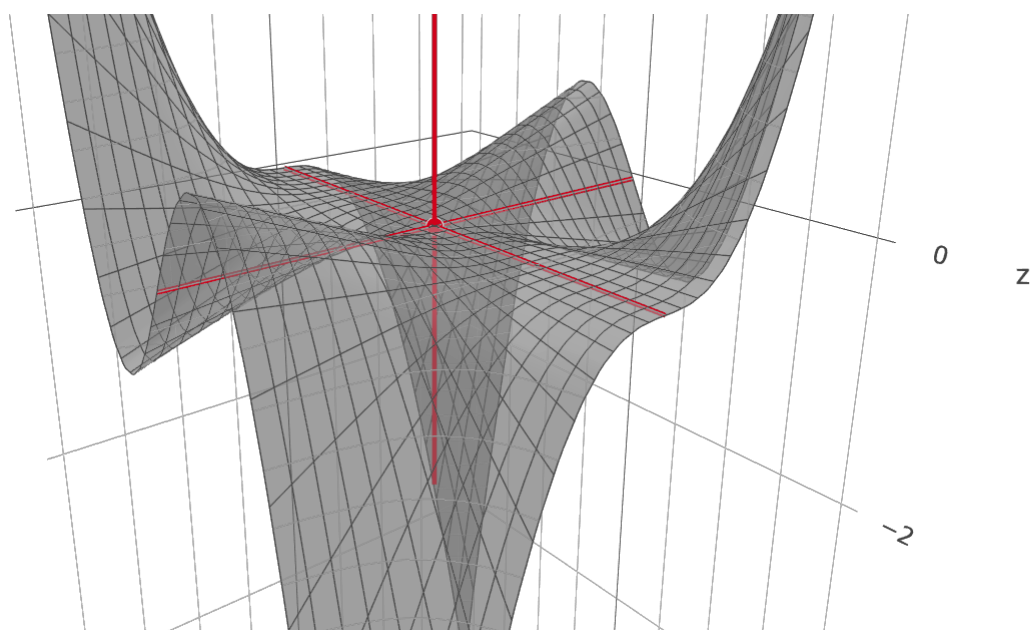
$$\nabla f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \text{ συνεχής} \implies f \in C^1(\mathbb{R}^2)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0 \in \mathbb{R} \implies f_y(0,0) = 0$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0 \in \mathbb{R} \implies f_x(0,0) = 0. \text{ Για τις μικτές παραγώγους στο } \vec{0} \text{ ισχύει:}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_x(0,h) - f_x(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{h} = -1 \in \mathbb{R} \implies f_{xy}(0,0) = -1$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_y(h,0) - f_y(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = 1 \in \mathbb{R} \implies f_{yx}(0,0) = 1 \neq f_{xy}(0,0) \implies f \notin C^2(\mathbb{R}^2)$$



Άσκηση 3

Να βρεθεί η κλίση της $f(x, y) = \sin\left(\frac{3x + x^2}{1 - y}\right)$.

Λύση

$$f: D \rightarrow \mathbb{R}, D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 - y \neq 0 \Leftrightarrow y \neq 1\right\} = \mathbb{R}^2 - \{y = 1\}$$

$$\text{το } D^c = \mathbb{R}^2 \setminus D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 1\right\} \text{ είναι κλειστό} \implies D \text{ ανοιχτό}$$

$$\text{θεωρούμε } g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } g(x) = \sin x, g \in C^\infty(\mathbb{R}) \text{ και } u: D \rightarrow \mathbb{R}: u(x, y) = \frac{3x + x^2}{1 - y} = \frac{3proj_1(x, y) + [proj_1(x, y)]^2}{1 - proj_2(x, y)}.$$

όπου $proj_1, proj_2: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με $proj_1(x, y) = x$ και $proj_2(x, y) = y$ (ομοιόμορφα) συνεχείς. Άρα $u \in C^0(D)$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων

$$\text{Τότε } g(u(x, y)) = \sin\left(\frac{3x + x^2}{1 - y}\right), (x, y) \in D. \text{ Παρατηρούμε ότι } D_f = D = g \circ u \text{ και } \forall (x, y) \in D:$$

$$(g \circ u)(x, y) = f(x, y). \text{ Άρα } f = g \circ u \implies f \in C^0(D) \text{ ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων}$$

$$f_x(x, y) = \left[\frac{df}{du}(u(x, y)) \right] \left[\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) \right] = \cos\left(\frac{3x + x^2}{1 - y}\right) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{3x + x^2}{1 - y} \right) = \frac{3 + 2x}{1 - y} \cos\left(\frac{3x + x^2}{1 - y}\right), (x, y) \in D$$

$$f_y(x, y) = \left[\frac{df}{du}(u(x, y)) \right] \left[\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \right] = \cos\left(\frac{3x + x^2}{1 - y}\right) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{3x + x^2}{1 - y} \right) = -\cos\left(\frac{3x + x^2}{1 - y}\right) \frac{3x + x^2}{(1 - y)^2} (-1) \implies$$

$$f_y(x, y) = \frac{3x + x^2}{(1 - y)^2} \cos\left(\frac{3x + x^2}{1 - y}\right), (x, y) \in D. \text{ Τότε } \nabla f: D \rightarrow \mathbb{R} \text{ με}$$

$$\nabla f = \left(\frac{3 + 2x}{1 - y} \cos\left(\frac{3x + x^2}{1 - y}\right), \frac{3x + x^2}{(1 - y)^2} \cos\left(\frac{3x + x^2}{1 - y}\right) \right) = \cos\left(\frac{3x + x^2}{1 - y}\right) \left(\frac{3 + 2x}{1 - y}, \frac{3x + x^2}{(1 - y)^2} \right)$$

$$\text{Ο κανόνας της αλυσίδας σε αυτήν την περίπτωση παίρνει την μορφή: } f(x, y) = g(u(x, y)) \implies \nabla f = \frac{dg}{du} \nabla u$$

Δεν ορίζεται συνεχής επέκταση της f σε κανένα σημείο του επιπέδου $y = 1$.

$$\text{Έστω ότι } \exists \lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, 1)} f(x, y) = \lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, 1)} \left(\sin\left(\frac{3x + x^2}{1 - y}\right) \right) \in \mathbb{R}. \text{ Για } x_0 \neq 0:$$

$$\vec{a}_n = \left(x_0, \frac{1 - \frac{2\pi n}{(3x_0 + x_0^2)}}{\frac{2\pi n}{(3x_0 + x_0^2)}} \right) = \left(x_0, -\frac{3x_0 + x_0^2 - 2\pi n}{2\pi n} \right): \forall n \in \mathbb{N}: \vec{a}_n \in D \text{ και } \vec{a}_n \neq (0, 1), \vec{a}_n \rightarrow (x_0, 1) \text{ και}$$

$$f(\vec{a}_n) = \sin\left(\frac{3x_0 + x_0^2}{1 + \frac{3x_0 + x_0^2 - 2\pi n}{2\pi n}}\right) = \sin\left(\frac{3x_0 + x_0^2}{\frac{3x_0 + x_0^2}{2\pi n}}\right) = \sin(2\pi n) = 0$$

$$\vec{b}_n = \left(x_0, \frac{1 - \frac{\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi}{2}}{\frac{\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi}{2}} \right) = \left(x_0, -\frac{3x_0 + x_0^2 - \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}}{\left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}} \right): \forall n \in \mathbb{N}: \vec{b}_n \in D \text{ και } \vec{b}_n \neq (0, 1), \vec{b}_n \rightarrow (x_0, 1) \text{ και}$$

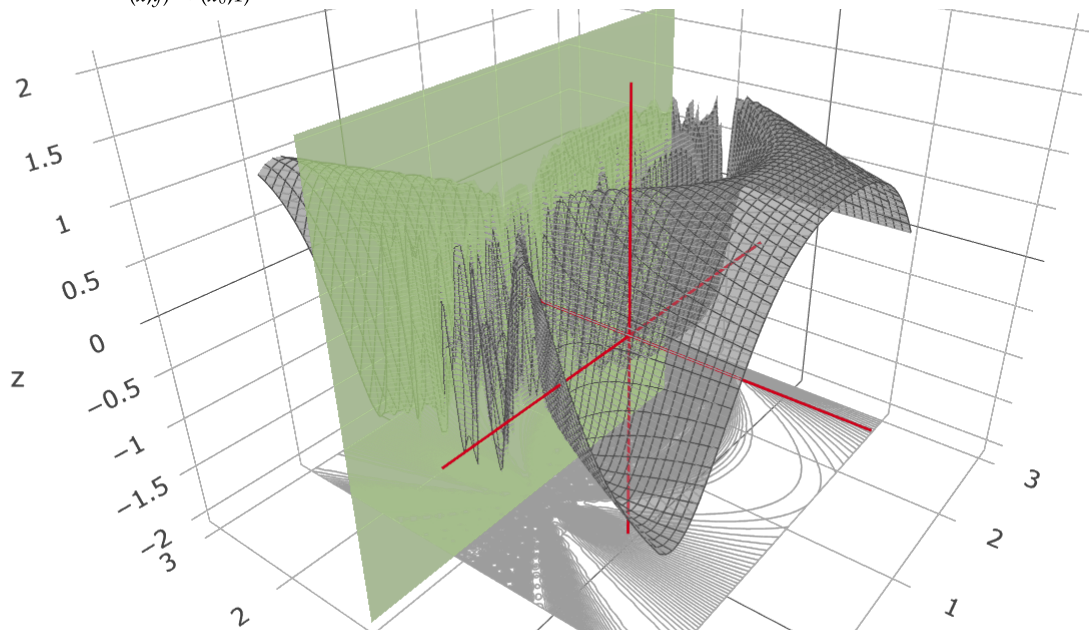
$$f(\vec{b}_n) = \sin\left(\frac{3x_0 + x_0^2}{1 + \frac{3x_0 + x_0^2 - \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}}{\left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}}}\right) = \sin\left(\frac{\left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}}{\left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}}\right) = 1 \neq 0, \text{ το οποίο είναι άτοπο.}$$

για $x_0 = 0$:

$$\text{για } y = 1 - x, x > 0: f(x, 1 - x) = \sin\left(\frac{3x + x^2}{1 - (1 - x)}\right) = \sin\left(\frac{3x + x^2}{x}\right) = \sin(x + 3) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \sin 3$$

για $x = 0, y = 1 + x, x > 0: f(x, 1 + x) = \sin\left(\frac{3x + x^2}{1 - (1 + x)}\right) = \sin\left(\frac{3x + x^2}{-x}\right) = \sin(-x - 3) \xrightarrow{x \rightarrow 0} -\sin 3 \neq \sin 3,$
το οποίο είναι άτοπο.

Αρα $\forall x_0 \in \mathbb{R}: \nexists \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,1)} f(x, y)$



Άσκηση 4

Να βρεθεί η $f_{\vec{u}}(\vec{a})$ της $f(x, y, z) = xe^y + 2 \sin y$ για $\vec{a} = (1, 0, 1), \vec{u} = (1, 1, 0)$.

Λύση

$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ με $\nabla f = (e^y, xe^y + 2 \cos y, 0)$. Παρατηρούμε ότι f κυλινδρική συνάρτηση:

$f(x, y, z) = f(x, y)$. Το $\vec{u}$ ορίζει $\hat{u} = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)$

$f \in C^1(\mathbb{R}^3) \subset C^\infty(\mathbb{R}^3) \Rightarrow \lim_{\vec{h} \rightarrow 0} \frac{f(\vec{a} + \vec{h}) - f(\vec{a}) - \nabla f(\vec{a}) \cdot \vec{h}}{|\vec{h}|} = 0$. Παρατηρούμε ότι εφόσον η f

είναι διαφορίσιμη $f_{\vec{u}}(\vec{a}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\vec{a} + t\hat{u}) - f(\vec{a})}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\vec{a}) + \nabla f(\vec{a}) \cdot (t\hat{u}) - f(\vec{a})}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\nabla f(\vec{a}) \cdot (t\hat{u})}{t} \Rightarrow$

$f_{\vec{u}}(\vec{a}) = \nabla f(\vec{a}) \cdot \hat{u} = (e^{a_2}, a_1 e^{a_2} + 2 \cos a_2, 0) \cdot (u_1, u_2, u_3) = e^{a_2} u_1 + (a_1 e^{a_2} + 2 \cos a_2) u_2$

Αναλυτικά:

$f_{\vec{u}}(\vec{a}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\vec{a} + t\hat{u}) - f(\vec{a})}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\vec{a} + t\hat{u}) - f(\vec{a})}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\vec{a} + t\hat{u}) - f(\vec{a})}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\vec{a} + t\hat{u}) - f(\vec{a})}{t} \Rightarrow$

$f_{\vec{u}}(\vec{a}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a_1 + tu_1, a_2 + tu_2, a_3 + tu_3) - f(a_1, a_2, a_3)}{t} \Rightarrow$

$f_{\vec{u}}(\vec{a}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(a_1 + tu_1)e^{a_2 + tu_2} + 2 \sin(a_2 + tu_2) - a_1 e^{a_2} - 2 \sin a_2}{t} =$

$f_{\vec{u}}(\vec{a}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{a_1 e^{a_2} (e^{tu_2} - 1) + tu_1 e^{a_2 + tu_2} 2[\sin(a_2 + tu_2) - \sin a_2]}{t} = a_1 e^{a_2} \cdot u_2 + e^{a_2} \cdot u_1 + \cos a_2 \cdot u_2$

$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{tu_2} - 1}{t} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{e^h - 1}{h} u_2 \right) = e^0 \cdot u_2 = u_2 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0} \left(a_1 e^{a_2} \frac{e^{tu_2} - 1}{t} \right) = a_1 e^{a_2} u_2$

$h = tu_2 \Rightarrow t = \frac{h}{u_2}$

$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{te^{a_2 + tu_2}}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} (e^{a_2 + tu_2}) = e^{a_2 + 0 \cdot u_2} = e^{a_2} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0} \frac{tu_1 e^{a_2 + tu_2}}{t} = e^{a_2} u_1$

$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(a_2 + tu_2) - \sin a_2}{t} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(a_2 + h) - \sin a_2}{h} u_2 \right) = \cos a_2 \cdot u_2$

για $\vec{a} = (1, 0, 1), \hat{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right) f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right) (1, 0, 1) = 1e^0 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + e^0 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \cos 0 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$

Άσκηση 5

Να βρεθεί το $df_{(0,2,1)} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ της $f(x, y, z) = x^4 y + 2e^{-xy} - 2y^2 + 3z^3 - 5$.

Λύση

$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$. Συγκεκριμένα, η f είναι διαφορίσιμη διότι $\exists \nabla f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ και $\nabla f \in C^0(\mathbb{R}^3)$

$$\mu\epsilon df_{(x,y,z)}(\vec{h}) = \nabla f(x, y, z) \cdot \vec{h} = \left(4x^3 y - 2ye^{-xy}, x^4 - 2xe^{-xy} - 4y, 9z^2\right) \cdot \vec{h} \implies$$

$$df_{(0,2,1)}(\vec{h}) = \left(4 \cdot 0^3 \cdot 2 - 2 \cdot 2e^{-0 \cdot 2}, 0^4 - 2 \cdot 0e^{-0 \cdot 2} - 4 \cdot 2, 9 \cdot 1^2\right) \cdot \vec{h} = (-4, -8, 9) \cdot \vec{h} = -4h_1 - 8h_2 + 9h_3$$

Άσκηση

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Λύση

$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^0(\mathbb{R}^2)$, διότι $\forall (x, y) \neq (0, 0)$ f συνεχής ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων και

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(\frac{x^2 y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) = 0 = f(0, 0). \text{ Έστω } \varepsilon > 0. \text{ Για } \delta(\varepsilon) = \sqrt{\varepsilon} > 0, \|(x, y)\| < \delta \implies$$

$$\left| \frac{x^2 y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| = \frac{x^2 |y|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq \frac{(x^2 + y^2) \sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = x^2 + y^2 < \varepsilon. \text{ Θέτουμε } D = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$$

$$\forall (x, y) \in \left\{ \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\} \right\} : f_x(x, y) = \frac{2xy\sqrt{x^2 + y^2} + \frac{2x^3 y}{2\sqrt{x^2 + y^2}}}{x^2 + y^2} = \frac{2xy(x^2 + y^2) + x^3 y}{\sqrt{x^2 + y^2}^3} = \frac{3x^3 y + xy^3}{\sqrt{x^2 + y^2}^3}, \quad f_x : D \rightarrow \mathbb{R},$$

$$f_x \in C^0(D) \text{ ως πράξεις } C^0(D) - \text{συναρτήσεων και } f_y(x, y) = \frac{x^2 \sqrt{x^2 + y^2} + \frac{2x^2 y^2}{2\sqrt{x^2 + y^2}}}{x^2 + y^2} = \frac{x^2(x^2 + y^2) + 2x^2 y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}^3} \implies$$

$$f_y(x, y) = \frac{x^4 + 3x^2 y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}^3} \quad f_y : D \rightarrow \mathbb{R} \text{ και } f_y \in C^0(D) \text{ ως πράξεις } C^0(D) - \text{συναρτήσεων.}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f_x(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(\frac{3x^3 y + xy^3}{\sqrt{x^2 + y^2}^3} \right) = 0 \text{ και } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f_y(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(\frac{x^4 + 3x^2 y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}^3} \right) = 0$$

$$\text{έστω } \varepsilon > 0. \text{ Για } \delta(\varepsilon) = \delta = \frac{\varepsilon}{4} > 0 : 0 < \|(x, y)\| < \delta \implies$$

$$\left| \frac{3x^3 y + xy^3}{\sqrt{x^2 + y^2}^3} \right| \leq \frac{3|x|^3|y| + |x||y|^3}{\sqrt{x^2 + y^2}^3} \leq \frac{3\sqrt{x^2 + y^2}^3 \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{x^2 + y^2}^3}{\sqrt{x^2 + y^2}^3} \leq \frac{4\sqrt{x^2 + y^2}^4}{\sqrt{x^2 + y^2}^3} = 4\|(x, y)\| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{x^4 + 3x^2 y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}^3} \right| \leq \frac{(x^2 + y^2)^2 + 3(x^2 + y^2)(x^2 + y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}^3} = \frac{4(x^2 + y^2)^2}{\sqrt{x^2 + y^2}^3} = 4\|(x, y)\| < \varepsilon$$

$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta(\varepsilon) = \delta > 0 : 0 < \|(x, y)\| < \delta \implies |f_x(x, y)| < \varepsilon \text{ και } |f_y(x, y)| < \varepsilon. \text{ Άρα}$

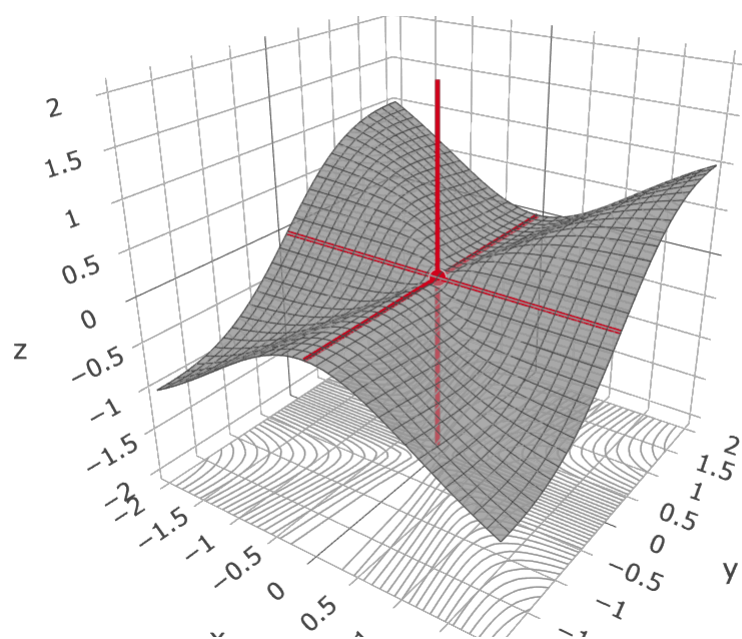
$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f_x(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f_y(x, y) = 0$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0 \in \mathbb{R} \implies f_x(0, 0) = 0 = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f_x(x, y)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0 \in \mathbb{R} \implies f_y(0, 0) = 0 = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f_y(x, y)$$

Άρα $f_x, f_y \in C^0(\mathbb{R}^2) \implies f \in C^1(\mathbb{R}^2) \implies f$ διαφορίσιμη $\implies f$ διαφορίσιμη στο $(0, 0)$ με

$$Df_{(0,0)}(x, y) = \nabla f(0, 0) \cdot (x, y) = (0, 0) \cdot (x, y) = 0$$



ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙ & ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ_ΕΑΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2020

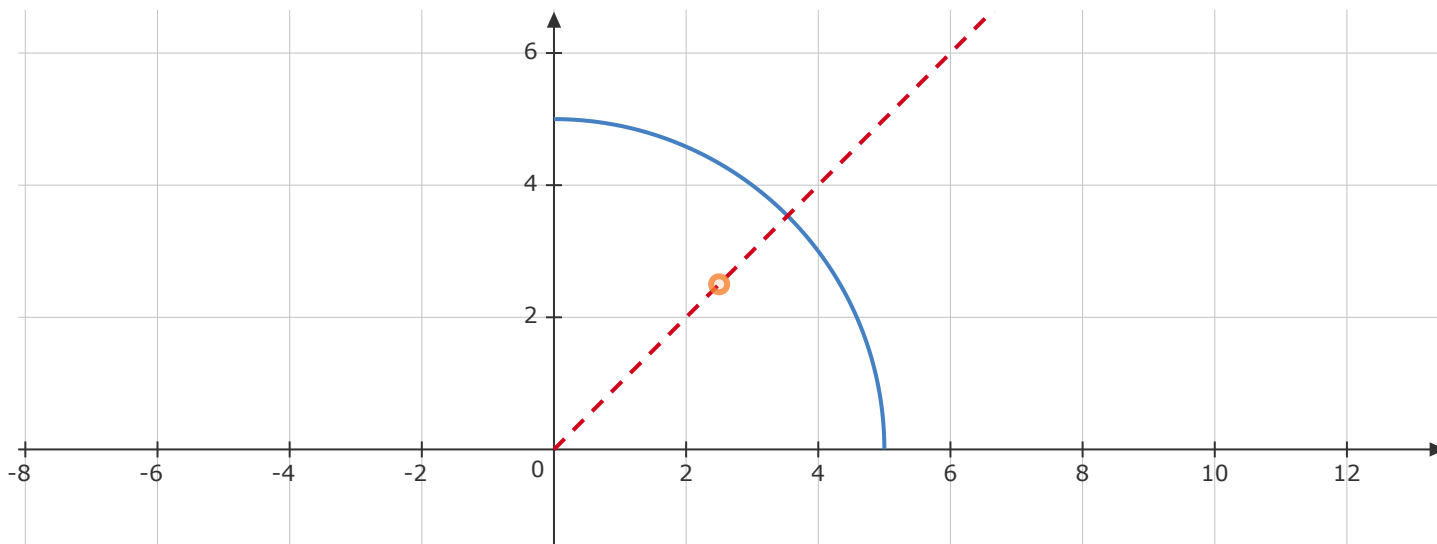
ΔΗΜΗΤΡΗΣ ΠΙΤΣΟΣ_ ΑΡ.ΜΗΤΡΩΟΥ: 1110201900303

Άσκηση1

Υπολογίστε την μάζα, τις ροπές M_x, M_y , τις συντεταγμένες του κέντρου βάρους $C(\bar{x}, \bar{y})$, τις ροπές I_x, I_y ,

I_0 του κυκλικού τομέα $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq a^2, x \geq 0, y \geq 0\}$ με πυκνότητα $\delta(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Λύση



Χρησιμοποιούμε τον πολικό μετασχηματισμό $\vec{T}: (r, \theta) \in [0, \infty) \times [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$ με

$x(r, \theta) = r \cos \theta, y(r, \theta) = r \sin \theta$ και $J(\vec{T}) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}$ με $|\det J(\vec{T})| = r(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = r$

$$m = \iint \delta(x, y) dA = \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} \sqrt{x^2 + y^2} dy dx = \int_0^{\pi/2} \int_0^a (r) r dr d\theta = \left(\int_0^{\pi/2} d\theta \right) \left(\int_0^a r^2 dr \right) \Rightarrow$$

$$m = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{a^3}{3} = \frac{\pi a^3}{6}$$

$$M_x = \iint y \delta(x, y) dA = \int_0^{\pi/2} \int_0^a [(r \sin \theta) r] r dr d\theta = \left(\int_0^{\pi/2} \sin \theta d\theta \right) \left(\int_0^a r^3 dr \right) = \frac{a^4}{4}$$

$$M_y = \iint x \delta(x, y) dA = \int_0^{\pi/2} \int_0^a (r \cos \theta) r^2 dr d\theta = \left(\int_0^{\pi/2} \cos \theta d\theta \right) \left(\int_0^a r^3 dr \right) = \frac{a^4}{4}$$

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{\frac{a^4}{4}}{\frac{\pi a^3}{6}} = \frac{3a}{2\pi}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{\frac{a^4}{4}}{\frac{\pi a^3}{6}} = \frac{3a}{2\pi} = \bar{x}. \text{ Τότε } C = (\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{3a}{2\pi}, \frac{3a}{2\pi} \right)$$

Παρατηρούμε ότι το C βρίσκεται επί της ευθείας $\theta = \frac{\pi}{4}$, όπως είναι αναμενόμενο λόγω της

ισοτροπίας του συνόλου D και του πεδίου πυκνότητας.

$$I_x = \iint y^2 \delta(x, y) dA = \int_0^{\pi/2} \int_0^a [(r \sin \theta)^2 r] r dr d\theta = \left(\int_0^{\pi/2} \sin^2 \theta d\theta \right) \left(\int_0^a r^4 dr \right) \Rightarrow$$

$$I_x = \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1 - \cos 2\theta}{2} \right) d\theta \left(\frac{r^5}{5} \right)_0^a = \frac{1}{2} \left(\theta - \frac{\sin 2\theta}{2} \right)_0^{\pi/2} \frac{a^5}{5} = \frac{\pi a^5}{20}$$

$$I_y = \iint x^2 \delta(x, y) dA = \int_0^{\pi/2} \int_0^a [(r \cos \theta)^2 r] r dr d\theta = \left(\int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta d\theta \right) \left(\int_0^a r^4 dr \right) \Rightarrow$$

$$I_y = \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1 + \cos 2\theta}{2} \right) d\theta \left(\frac{r^5}{5} \right)_0^a = \frac{1}{2} \left(\theta + \frac{\sin 2\theta}{2} \right)_0^{\pi/2} \frac{a^5}{5} = \frac{\pi a^5}{20}$$

$$I_o = \iint (x^2 + y^2) \delta(x, y) dA = \iint x^2 \delta(x, y) dA + \iint y^2 \delta(x, y) dA = I_y + I_x = \frac{\pi a^5}{10}$$

Άσκηση 2

Υπολογίστε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_{\Gamma+} (x^3 + y^3) dx + (2y^3 - x^3) dy$ όπου $\Gamma = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$

Λύση

A' τρόπος (εφαρμογή A' θεωρήματος *Green*)

Θεωρούμε την $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\vec{F}(x, y) = (x^3 + y^3, 2y^3 - x^3) \in C^1(\mathbb{R}^2)$ και τον μοναδιαίο κύκλο

$\Gamma = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^2$ με παραμέτρηση $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t)$ $\theta \in \mathbb{R}$. Παρατηρούμε ότι

η καμπύλη είναι :

– **κλειστή** : $\forall t \in \mathbb{R} : \vec{r}(t) = \vec{r}(t + 2\pi)$. Τότε μπορούμε να περιορίσουμε το

Π.Ο. σε $t \in [0, 2\pi]$.

– **απλή** : $\forall t_1, t_2 \in (0, 2\pi) : \vec{r}(t_1) = \vec{r}(t_2) \implies \cos t_1 = \cos t_2$ και $\sin t_1 = \sin t_2 \implies t_1 = t_2$ ή $t_1 = 2\pi - t_2$

και $t_1 = t_2$ ή $t_1 = \pi - t_2 \implies v = t_2$

– **λεία** : $\left\| \frac{d\vec{r}}{dt} \right\| = \|(-\sin t, \cos t)\| = 1 \neq 0 \forall t \in [0, 2\pi]$

– θετικά προσανατολισμένη (αντιωρολογιακά / αριστερόστροφα).

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \hat{k} = -3(x^2 + y^2) \hat{k}.$$

Ισχύουν οι προϋποθέσεις του πρώτου θεωρήματος *Green*. Τότε :

$$\int_{\Gamma+} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_D \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) dA = \iint_D [(\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \hat{k}] dA = \iint_D -3(x^2 + y^2) dx dy \implies$$

$$\int_{\Gamma+} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (-3r^2) r dr d\theta = -3 \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \left(\int_0^1 r^3 dr \right) = -6\pi \left(\frac{r^4}{4} \right)_0^1 = -\frac{6\pi}{4} = -\frac{3\pi}{2}$$

B' τρόπος (άμεσος υπολογισμός διανυσματικού επικαμπύλιου ολοκληρώματος)

$$\int_{\Gamma+} [(x^3 + y^3) dx + (2y^3 - x^3) dy] = \int_{\Gamma+} (F_x dx + F_y dy) = \int_{\Gamma+} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\Gamma+} \left[\vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \right] dt \implies$$

$$\int_{\Gamma+} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \left[F_x(x(t), y(t)) \frac{dx}{dt} + F_y(x(t), y(t)) \frac{dy}{dt} \right] dt \implies$$

$$\int_{\Gamma+} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \left[(\cos^3 t + \sin^3 t)(-\sin t) + (2\sin^3 t - \cos^3 t) \cos t \right] dt \implies$$

$$\int_{\Gamma+} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} (-\cos^3 t \sin t - \sin^4 t + 2\sin^3 t \cos t - \cos^4 t) dt \implies$$

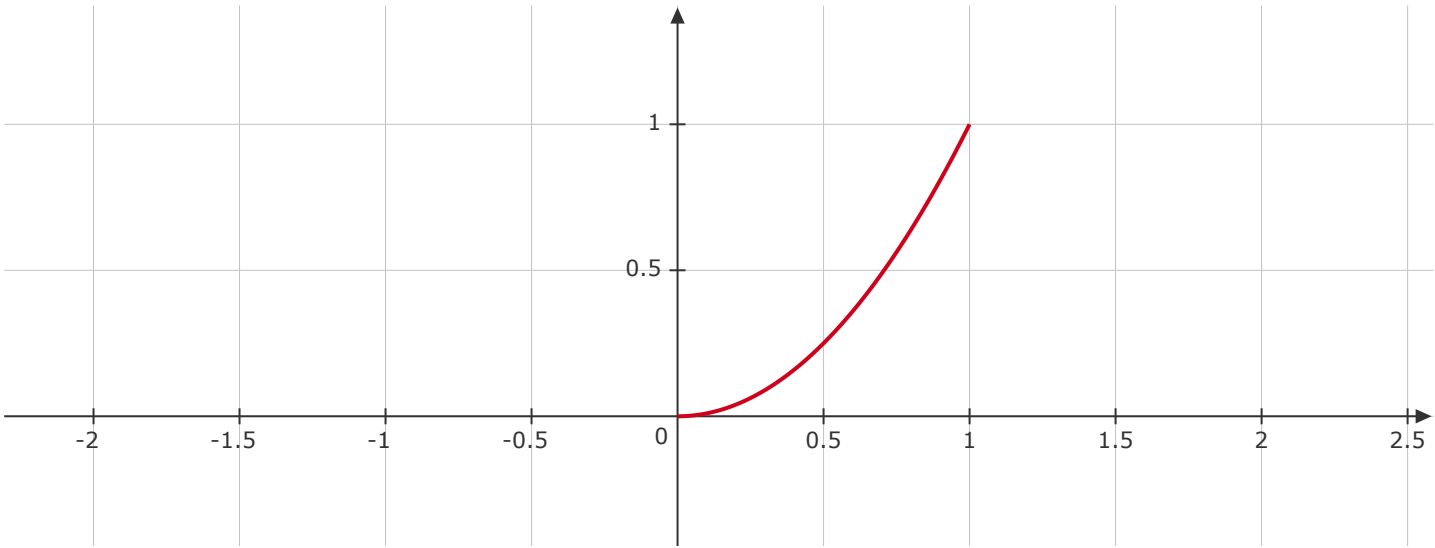
$$\int_{\Gamma+} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} (\cos^3 t) d(\cos t) - \int_0^{2\pi} \left[(\sin^2 t + \cos^2 t)^2 - 2\sin^2 t \cos^2 t \right] dt + 2 \int_0^{2\pi} (\sin^3 t) d(\sin t) \implies$$

$$\int_{\Gamma+} \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_0^{2\pi} \left(1 - \frac{\sin^2 2t}{2} \right) dt = - \int_0^{2\pi} \left(1 - \frac{1 - \cos 4t}{4} \right) dt = - \left(\frac{3t}{4} + \frac{\sin 4t}{16} \right)_0^{2\pi} = -\frac{3\pi}{2}$$

Άσκηση 3

Υπολογίστε το έργο της δύναμης $\vec{F}(x,y) = (2xy, x^2)$ που μετατοπίζει το σημείο εφαρμογής κατά μήκος της παραμετρικής καμπύλης $\Gamma = \Gamma(\vec{r}) : \vec{r}(t) = (t, t^2), t \in [0, 1]$

Λύση



$\vec{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \vec{F} \in C^1(\mathbb{R}^2), \Gamma = \Gamma(\vec{r})$ απλή, λεία καμπύλη (τμήμα παραβολής $y = x^2$) με $\vec{r} = \vec{r}(t)$ συνεχή παραμέτρηση. Τότε :

$$W = \int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 \left[\vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \right] dt = \int_0^1 [(2t^3, t^2) \cdot (1, 2t)] dt = \int_0^1 (2t^3 + 2t^3) dt = \int_0^1 4t^3 dt \implies$$

$$W = (t^4)_0^1 = 1$$

Άσκηση 4

Υπολογίστε το $\iiint_B z^2 dx dy dz$, όπου B σφαίρα με εξίσωση επιφάνειας $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ καθώς και τον όγκο $V(B)$ της σφαίρας.

Λύση

Από στερεομετρία είναι γνωστό ότι $V(B) = \frac{4\pi}{3} \cdot 2^3 = \frac{32\pi}{3}$. Αναλυτικά, $V(B) = \iiint_B dV \implies$

Χρησιμοποιούμε τον "1 – 1", επί και συνεχή μετασχηματισμό σε σφαιρικές συντεταγμένες

$\vec{T} : (0, \infty) \times [0, \pi] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ με $\vec{T}(\rho, \theta, \varphi) = (\rho \sin \varphi \cos \theta, \rho \sin \varphi \sin \theta, \rho \cos \varphi)$ και

$$\vec{T}^{-1}(x, y, z) = \begin{cases} \left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \arcsin\left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right), \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) \right), & x \geq 0 \\ \left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \pi - \arcsin\left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right), \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) \right), & x < 0 \end{cases} \text{ . Τότε :}$$

$$J(\vec{T}) = \begin{pmatrix} \sin \varphi \cos \theta & -\rho \sin \varphi \sin \theta & -\rho \cos \varphi \cos \theta \\ \sin \varphi \sin \theta & \rho \sin \varphi \cos \theta & \rho \cos \varphi \sin \theta \\ \cos \varphi & 0 & -\rho \sin \varphi \end{pmatrix} \text{ και}$$

$$\det J(\vec{T}) = -\rho^2 \sin^3 \varphi \cos^2 \theta + \rho \sin \varphi \sin \theta (-\rho \sin^2 \varphi \sin \theta - \rho \cos^2 \varphi \sin \theta) + \rho^2 \cos^2 \varphi \sin \varphi \cos^2 \theta \implies$$

$$|\det J(\vec{T})| = |-\rho^2 \sin \varphi (\sin^2 \varphi \cos^2 \theta + \sin^2 \varphi \sin^2 \theta + \cos^2 \varphi \sin^2 \theta + \cos^2 \varphi \cos^2 \theta)| = \rho^2 \sin \varphi.$$

$$V(B) = \iiint_B dx dy dz = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^2 \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta = \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \left(\int_0^\pi \sin \varphi d\varphi \right) \left(\int_0^2 \rho^2 d\rho \right) \Rightarrow$$

$$V(B) = 2\pi \cdot (-\cos \varphi)_0^\pi \cdot \left(\frac{\rho^3}{3} \right)_0^2 = 4\pi \frac{2^3}{3} = \frac{32\pi}{3}. \quad \text{Θεωρούμε } f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}: f(x, y, z) = z^2 \in C(\mathbb{R}^3),$$

$$\kappa \alpha \iota \left(f \circ \overrightarrow{T^{-1}} \right)(x, y, z) = f\left(\overrightarrow{T^{-1}}(x, y, z)\right) = f(r, \theta, \varphi) = (\rho \cos \varphi)^2.$$

$$I = \iiint_B z^2 dx dy dz = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^2 (\rho \cos \varphi)^2 \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta \Rightarrow$$

$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^2 \rho^4 \cos^2 \varphi \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta = \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \left(\int_0^\pi \cos^2 \varphi \sin \varphi d\varphi \right) \left(\int_0^2 \rho^4 d\rho \right) \Rightarrow$$

$$I = 2\pi \int_0^\pi (-\cos^2 \varphi) d(\cos \varphi) \left(\frac{\rho^5}{5} \right)_0^2 = -2\pi \cdot \frac{2^5}{5} \int_1^{-1} u^2 du = \frac{64\pi}{5} \left(\frac{u^3}{3} \right)_{-1}^1 = \frac{128\pi}{15}.$$

Επαλήθευση Θ.Μ.Τ. ολοκληρωτικού λογισμού

Παρατηρούμε ότι $I = \frac{4}{5} \cdot V(B)$, άρα η μέση τιμή της $f: B \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y, z) = z^2$ στο B είναι

$$\bar{f}_B = \frac{I}{V(B)} = \frac{4}{5} \text{ και } B \text{ κλειστό και φραγμένο σύνολο, δηλαδή συμπαγές. Για } (x, y, z) \in B:$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq \frac{16}{5} \\ z = -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{cases} \quad \text{ή} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 \leq \frac{16}{5} \\ z = \frac{2}{\sqrt{5}} \end{cases} \Rightarrow f(x, y, z) = \bar{f}_B \text{ δηλαδή } \exists (x_0, y_0, z_0) \in B: f(x_0, y_0, z_0) = \bar{f}_B$$

Άσκηση 5

Υπολογίστε το $V(B)$ και το $\iiint_B \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz$, όπου B το στερεό που βρίσκεται στην πρώτη στερεά γωνία και περιβάλλεται από τα επίπεδα $x = 0, y = 0$ και $z = 4$ και το παραβολοειδές $z = x^2 + y^2$.

Λύση

Χρησιμοποιούμε τον "1-1", επί και συνεχή μετασχηματισμό σε κυλινδρικές συντεταγμένες

$\vec{T}: (0, \infty) \times [0, 2\pi) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \vec{T}(r, \theta, z) = (r \cos \theta, r \sin \theta, z)$ και

$$\overrightarrow{T^{-1}}(x, y, z) = \begin{cases} \left(\sqrt{x^2 + y^2}, \arcsin\left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right), z \right), & x \geq 0 \\ \left(\sqrt{x^2 + y^2}, \pi - \arcsin\left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right), z \right), & x < 0 \end{cases}$$

Τότε $J(\vec{T}) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ με $\det J(\vec{T}) = r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta = r$. Το χωρίο B σε κυλινδρικές

συντεταγμένες περιγράφεται από σχέσεις: $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq z \leq 4$ και $0 \leq r \leq \sqrt{z} \Rightarrow$

$0 \leq r \leq \sqrt{z}$ ενώ η $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}, f \in C(\mathbb{R}^2)$ με

$\left(f \circ \overrightarrow{T^{-1}}\right)(x, y, z) = f\left(\overrightarrow{T^{-1}}(x, y, z)\right) = f(r, \theta, z) = r$ συνεχή ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων $\implies f \circ \overrightarrow{T^{-1}}$ ολοκληρώσιμη. Τότε: $V(B) = \iiint_B dx dy dz = \int_0^4 \int_0^{\pi/2} \int_0^{\sqrt{z}} r dr d\theta dz \implies$

$$V(B) = \int_0^{\pi/2} \int_0^4 \left(\frac{r^2}{2}\right)_0^{\sqrt{z}} dz d\theta = \int_0^{\pi/2} \int_0^4 \left(\frac{z}{2}\right) dz d\theta = \left(\int_0^{\pi/2} d\theta\right) \int_0^4 \left(\frac{z}{2}\right) dz = \frac{\pi}{2} \left(\frac{z^2}{4}\right)_0^4 = 2\pi$$

$$I = \iiint_B \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz = \int_0^4 \int_0^{\pi/2} \int_0^{\sqrt{z}} (r) r dr d\theta dz = \int_0^{\pi/2} \int_0^4 \left(\frac{r^3}{3}\right)_0^{\sqrt{z}} dz d\theta \implies$$

$$I = \int_0^{\pi/2} \int_0^4 \left(\frac{z^{3/2}}{3}\right) dz d\theta = \left(\int_0^{\pi/2} d\theta\right) \int_0^4 \left(\frac{z^{3/2}}{3}\right) dz = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{2}{5} \cdot \left(\frac{z^{5/2}}{3}\right)_0^4 = \frac{\pi}{5} \cdot \frac{32}{3} = \frac{32\pi}{15}$$

$$\text{και παρατηρούμε ότι } I = \frac{16}{15} \cdot V(B) \implies \bar{f}_B = \frac{I}{V(B)} = \frac{16}{15} = f\left(\frac{4}{\sqrt{15}}, \theta, \frac{16}{15}\right) \forall \theta \in [0, 2\pi),$$

δηλαδή $\exists (r_0, \theta_0, z_0) \in B: f(r_0, \theta_0, z_0) = \bar{f}_B$

Συμπληρωματικές ασκήσεις για το 9ο μάθημα

Άσκηση 1

Δίνεται η συνάρτηση $f(x, y, z) = xye^{x^2+y^2+z^2}$. Να υπολογιστεί η κατευθυνόμενη παράγωγος $f_u'(\vec{a})$ στο

σημείο $\vec{a} = (1, 1, 1)$ ως προς την κατεύθυνση $\vec{u} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$

Λύση

$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x, y, z) = xye^{x^2+y^2+z^2} \in C(\mathbb{R}^3)$. Παρατηρούμε ότι $f(x, y, z) = f(z, x, y) = f(y, z, x)$

$$f_x(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial x} (xye^{x^2+y^2+z^2}) = yz \left[\frac{\partial}{\partial x} (x) \cdot e^{x^2+y^2+z^2} + x \frac{\partial}{\partial x} (e^{x^2+y^2+z^2}) \right] \implies$$

$$f_x(x, y, z) = yz (e^{x^2+y^2+z^2} + x \cdot 2xe^{x^2+y^2+z^2}) \implies f_x(x, y, z) = yze^{x^2+y^2+z^2} (1 + 2x^2).$$

Αντίστοιχα, με κυκλική μετάθεση δεικτών $x \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow x$

$f_y(x, y, z) = zxe^{x^2+y^2+z^2} (1 + 2y^2)$ και $f_z(x, y, z) = xye^{x^2+y^2+z^2} (1 + 2z^2)$. f_x, f_y, f_z συνεχείς ως

γινόμενο συνεχών (πολυωνυμικών και σύνθεσης εκθετικής με πολυωνυμική συνάρτηση των

των x, y, z) $\implies f \in C^1(\mathbb{R}^3) \implies f$ διαφορίσιμη με $D_{f(x,y,z)}(\vec{h}) = \vec{\nabla} f(x, y, z) \cdot \vec{h} \implies$

$$D_{f(x,y,z)}(\vec{h}) = (f_x(x, y, z), f_y(x, y, z), f_z(x, y, z)) \cdot \vec{h} = e^{x^2+y^2+z^2} (yz(1+2x^2), zx(1+2y^2), xy(1+2z^2)) \cdot \vec{h}$$

$$f_u'(\vec{a}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\vec{a} + t\vec{u}) - f(\vec{a})}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{D_{f(\vec{a})}(t\vec{u})}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\vec{\nabla} f(\vec{a}) \cdot (t\vec{u})}{t} = \vec{\nabla} f(1, 1, 1) \cdot \vec{u} \implies$$

$$f_u'(\vec{a}) = (3, 3, 3) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) = 3\sqrt{2}$$

Άσκηση 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x, y, z) = x + y^2 + z^3$. Να βρεθεί για ποιες κατευθύνσεις η κατευθυνόμενη

παράγωγος της συνάρτησης f παίρνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή στο $(0, 0, 0)$ και στο $(1, 1, 1)$.

Λύση

$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x, y, z) = x + y^2 + z^3 \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$.

$$f_x(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial x}(x + y^2 + z) = 1, \quad f_y(x, y, z) = 2y \text{ και } f_z(x, y, z) = 3z^2, \quad f_x, f_y, f_z \text{ συνεχείς ως}$$

πολυωνυμικές συναρτήσεις των $x, y, z \implies f \in C^1(\mathbb{R}^3) \implies f$ διαφορίσιμη με

$$D_{f(x,y,z)}(\vec{h}) = \vec{\nabla} f(x, y, z) \cdot \vec{h} \implies D_{f(x,y,z)}(\vec{h}) = (f_x(x, y, z), f_y(x, y, z), f_z(x, y, z)) \cdot \vec{h}$$

$$D_{f(x,y,z)}(\vec{h}) = (1, 2y, 3z^2) \cdot \vec{h}$$

$$f_{\vec{u}}(\vec{a}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\vec{a} + t\vec{u}) - f(\vec{a})}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{D_{f(\vec{a})}(t\vec{u})}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\vec{\nabla} f(\vec{a}) \cdot (t\vec{u})}{t} = \vec{\nabla} f(x, y, z) \cdot \vec{u}$$

Από ανισότητα *Cauchy – Schwarz*: $|\vec{\nabla} f(x, y, z) \cdot \vec{u}| \leq \|\vec{\nabla} f(x, y, z)\| \cdot \|\vec{u}\| = \|\vec{\nabla} f(x, y, z)\| \implies$

$$-\|\vec{\nabla} f(x, y, z)\| \leq f_{\vec{u}}(\vec{a}) \leq \|\vec{\nabla} f(x, y, z)\| \text{ με } f_{\vec{u}}(\vec{a}) = \|\vec{\nabla} f(x, y, z)\| \text{ για } \hat{u}_1 = \frac{\vec{\nabla} f(\vec{a})}{\|\vec{\nabla} f(\vec{a})\|} \text{ (κατεύθυνση}$$

$$\text{μέγιστης κατευθυνόμενης παραγώγου) και } f_{\vec{u}}(\vec{a}) = -\|\vec{\nabla} f(\vec{a})\| \text{ για } \hat{u}_2 = -\frac{\vec{\nabla} f(\vec{a})}{\|\vec{\nabla} f(\vec{a})\|} = -\hat{u}_1$$

(κατεύθυνση ελάχιστης κατευθυνόμενης παραγώγου). Για $\vec{a} = (0, 0, 0)$:

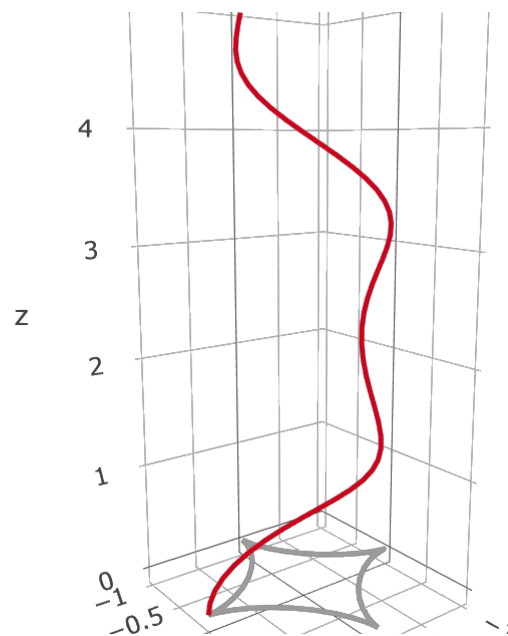
$$\hat{u}_1 = \frac{\vec{\nabla} f(0)}{\|\vec{\nabla} f(0)\|} = (1, 0, 0) \text{ και } \hat{u}_2 = (-1, 0, 0). \text{ Για } \vec{a} = (1, 1, 1): \hat{u}_1 = \frac{\vec{\nabla} f(1, 1, 1)}{\|\vec{\nabla} f(1, 1, 1)\|} = \frac{(1, 2, 3)}{\|(1, 2, 3)\|} \implies$$

$$\hat{u}_1 = \left(\frac{\sqrt{14}}{14}, \frac{\sqrt{14}}{7}, \frac{3\sqrt{14}}{14} \right) \text{ και αντίστοιχα } \hat{u}_2 = -\hat{u}_1 = \left(-\frac{\sqrt{14}}{14}, -\frac{\sqrt{14}}{7}, -\frac{3\sqrt{14}}{14} \right).$$

Άσκηση 3

Να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ της συνάρτησης $\vec{F}(x, y, z) = (\sin z, \cos z, \sqrt[3]{xy})$

$$\text{όπου } \Gamma = \left\{ \vec{r}(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t, t), t \in \left[0, \frac{3\pi}{2} \right] \right\}.$$



Λύση

$\vec{F}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ με $\vec{F}(x, y, z) = (\sin z, \cos z, \sqrt[3]{xy}) \in C(\mathbb{R}^3)$ – πεδίο, διότι $F_x = \sin z$, $F_y = \cos z$ και

$F_z = \sqrt[3]{xy} \in C(\mathbb{R}^3)$. Η παραμέτρηση της καμπύλης Γ $\vec{r}(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t, t)$, $t \in \left[0, \frac{3\pi}{2} \right]$ με

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = (-3\cos^2 t \sin t, 3\sin^2 t \cos t, 1) \text{ και } \left\| \frac{d\vec{r}}{dt} \right\| = \sqrt{9\sin^2 t \cos^2 t (\cos^2 t + \sin^2 t) + 1} \implies$$

$\left\| \frac{d\vec{r}}{dt} \right\| = \sqrt{\frac{9}{4}(-2 \sin t \cos t)^2 + 1} = \frac{\sqrt{9(\sin 2t)^2 + 4}}{2} \neq 0$ είναι C^1 , η καμπύλη Γ είναι λεία
 Έλικά με βάση το μοναδιαίο υποκυκλοειδές στο συμπαγές διάστημα $I = \left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$. Τότε :

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_0^{3\pi/2} \left[(\vec{F} \circ \vec{r}(t)) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \right] dt \Rightarrow \\ \int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_0^{3\pi/2} \left[(\sin t, \cos t, \sqrt[3]{(\cos t)^3 (\sin t)^3}) \cdot (-3 \cos^2 t \sin t, 3 \sin^2 t \cos t, 1) \right] dt \Rightarrow \\ \int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_0^{3\pi/2} (-3 \sin^2 t \cos^2 t + 3 \sin^2 t \cos^2 t + \cos t \sin t) dt \Rightarrow \\ \int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_0^{3\pi/2} \left(\frac{\sin 2t}{2} \right) dt = \frac{1}{2} \left(-\frac{\cos 2t}{2} \right)_0^{3\pi/2} = -\frac{1}{4} \left[\cos \left(2 \cdot \frac{3\pi}{2} \right) - \cos 0 \right] = -\frac{1}{4}(-1 - 1) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Άσκηση 4

Να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ της συνάρτησης $\vec{F}(x, y) = \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$

όπου Γ ο μοναδιαίος κύκλος με κέντρο το $(0, 0)$.

Λύση

Παρατηρούμε ότι δεν υπάρχει συνεχής επέκταση για την $\vec{F}: D = \left\{ \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\} \right\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ με

$$\vec{F}(x, y) = \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right) \text{ στο } (0, 0). \text{ Όμως, } \forall (x, y) \neq (0, 0): F_x = -\frac{y}{x^2 + y^2}, F_y = \frac{x}{x^2 + y^2},$$

συνεχείς ως ρητές συναρτήσεις των $x, y \Rightarrow \vec{F}$ συνεχής στο D . $(0, 0) \notin \Gamma$, τότε ο περιορισμός

$\vec{F}: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^2$ στην καμπύλη Γ αποτελεί $C(\Gamma)$ πεδίο. Ο μοναδιαίος κύκλος με

κέντρο $(0, 0)$ παραμετροποιείται ως εξής: $\vec{r}: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2: \vec{r}(t) = (\cos t, \sin t) \Rightarrow$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = (-\sin t, \cos t), \text{ δηλαδή } \vec{r} \in C^1([0, 2\pi]) \text{ και } \left\| \frac{d\vec{r}}{dt} \right\| = 1 \neq 0 \forall t \in [0, 2\pi] \text{ (λεία καμπύλη)}$$

$$\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \left[(\vec{F} \circ \vec{r}(t)) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \right] dt = \int_0^{2\pi} [(-\sin t, \cos t) \cdot (-\sin t, \cos t)] dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$$

Παρατηρούμε τα εξής :

η καμπύλη Γ είναι κλειστή, απλή και λεία, αλλά δεν ισχύει το πρώτο θεώρημα

του *Green*. Η $\vec{F}$ δεν είναι C^1 στο $\text{es}\Gamma = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1 \right\}$, εφόσον $(0, 0) \in \text{es}\Gamma$.

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{y}{x^2 + y^2} \right) \right] \hat{k} = \left[-x \frac{2y}{(x^2 + y^2)^2} - \left[-y \frac{2x}{(x^2 + y^2)^2} \right] \right] \hat{k} = \vec{0} = \text{το } \vec{F}$$

είναι αστρόβιλο πεδίο – αλλά $\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} \neq 0$

Άσκηση 5

Να αποδειχθεί ότι :

$$(i) \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} xy \right) = 0$$

$$(ii) \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \left(y \frac{2xy}{x^2 + y^2} \right) = 0$$

Λύση

$$(i) \quad f: D_f = \left\{ \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \right\} \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} xy, \quad (x,y) \neq (0,0), \text{ όμως το } (0,0) \text{ είναι σημείο}$$

συσσώρευσης του D , δηλαδή $\forall \varepsilon > 0: N_\varepsilon(\vec{0}) \cap D_f \neq \emptyset$. Για $\delta = \delta(\varepsilon) = \sqrt{\varepsilon} > 0: \|(x,y)\| < \delta \implies$

$$|f(x,y)| = \left| \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} xy \right| = \frac{|x^2 - y^2|}{x^2 + y^2} \cdot |x| |y| \leq \frac{|x^2| + |y^2|}{x^2 + y^2} \sqrt{x^2 + y^2}^2 \leq x^2 + y^2 < \delta^2 = \sqrt{\varepsilon}^2 = \varepsilon$$

$$\text{Άρα } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} xy \right) = 0$$

$$(ii) \quad f: D_f = \left\{ \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \right\} \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } f(x,y) = y \frac{2xy}{x^2 + y^2}, \quad (x,y) \neq (0,0), \text{ όμως το } (0,0) \text{ είναι σημείο}$$

συσσώρευσης του D , δηλαδή $\forall \varepsilon > 0: N_\varepsilon(\vec{0}) \cap D_f \neq \emptyset$. Για $\delta = \delta(\varepsilon) = \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}} > 0: \|(x,y)\| < \delta \implies$

$$|f(x,y)| = \left| y \frac{2xy}{x^2 + y^2} \right| = \frac{2|x| \cdot y^2}{x^2 + y^2} \leq \frac{2\sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2} (x^2 + y^2) \leq 2\sqrt{x^2 + y^2} < 2\delta^2 = 2\sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}^2 = \varepsilon$$

$$\text{Άρα } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(y \frac{2xy}{x^2 + y^2} \right) = 0$$

Άσκηση 6

$$\text{Να μελετηθεί ως προς την συνέχεια η συνάρτηση } f(x,y) = \begin{cases} \frac{2x^2 y}{x^4 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Λύση

$$(i) \quad f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } f(x,y) = \begin{cases} \frac{2x^2 y}{x^4 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$\forall (x,y) \neq (0,0): f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής ως ρητή συνάρτηση των x,y . Έστω ότι

$$\exists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(\frac{2x^2 y}{x^4 + y^2} \right) \in \mathbb{R}. \text{ Παρατηρούμε ότι για τον περιορισμό } g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ της } f \text{ στον άξονα των } x$$

$$\text{ισχύει } g(x) = f(x,0) = 0 \implies \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0 \text{ ενώ για τον περιορισμό } h: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R} \text{ της } f \text{ στην}$$

$$\text{παραβολή } y = x^2 \text{ ισχύει } h(x) = f(x, x^2) = \frac{2x^4}{x^4 + x^4} = \frac{2x^4}{2x^4} = 1 \implies \lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 1 \neq 0 \implies \text{Άτοπο.}$$

$$\text{Άρα } \nexists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(\frac{2x^2 y}{x^4 + y^2} \right), \text{ δηλαδή η } f \text{ παρουσιάζει στο } (0,0) \text{ ασυνέχεια δεύτερου είδους.}$$

Ομοίως, αποδεικνύεται με αρχή της μεταφοράς:

$$\text{Έστω ότι } \exists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(\frac{2x^2 y}{x^4 + y^2} \right) \in \mathbb{R}. \text{ Τότε } \forall \left(\vec{a_n} \right)_{n \in \mathbb{N}}, \text{ με } \vec{a_n} \neq \vec{0} \text{ και } \lim_{n \rightarrow \infty} \vec{a_n} = \vec{0} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(\vec{a_n}) = 0$$

θεωρούμε $\left(\vec{a_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ με $\vec{a_n} = \left(\frac{1}{n}, 0\right)$, $\forall n \in \mathbb{N} : \vec{a_n} \neq \vec{0}$, $\vec{a_n} \rightarrow (0, 0)$, $f\left(\vec{a_n}\right) = 0 \rightarrow 0$ και

$$\left(\vec{b_n}\right)_{n \in \mathbb{N}} \text{ με } \vec{b_n} = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\right), \forall n \in \mathbb{N} \quad \vec{b_n} \neq \vec{0}, \vec{b_n} \rightarrow (0, 0) \text{ και } f\left(\vec{b_n}\right) = \frac{\frac{2}{n^4}}{\frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^4}} = 1 \rightarrow 1 \neq 0$$

$$\text{Άτοπο} \implies \nexists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(\frac{2x^2y}{x^4 + y^2} \right)$$

Άσκηση 7

Δίνεται η συνάρτηση $f(x, y) = x^2 + 4y^2$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Να υπολογιστεί το $df(2, 3)$

Λύση

(i) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x, y) = x^2 + 4y^2 \in C(\mathbb{R}^2)$ με $f_x(x, y) = 2x$, $f_y(x, y) = 8y \in C(\mathbb{R}^2)$.

Τότε η $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$, άρα είναι διαφορίσιμη. $df_{(2,3)}(\vec{h}) = \vec{\nabla} f(2, 3) \cdot \vec{h} = (f_x(2, 3), f_y(2, 3)) \cdot \vec{h} \implies df_{(2,3)}(\vec{h}) = (4, 24) \cdot (h_1, h_2) = 4h_1 + 24h_2$.

Αναλυτικά:

Ορισμός διαφορικού για συναρτήσεις 2 μεταβλητών:

$$df(x, y): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \text{ γραμμική: } \lim_{\vec{h} \rightarrow \vec{0}} \frac{f(\vec{r} + \vec{h}) - f(\vec{r}) - df(x, y) \cdot \vec{h}}{||\vec{h}||} = 0 \quad (\text{A})$$

$$\text{Τότε } \exists a, b \in \mathbb{R} \quad df(x, y) = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$$

Μοναδικότητα γραμμικού τελεστή με ιδιότητα (A)

Έστω $\exists c, d \in \mathbb{R} : df(x, y) = \begin{pmatrix} c & d \end{pmatrix}$:

$$\lim_{\vec{h} \rightarrow \vec{0}} \frac{f(\vec{r} + \vec{h}) - f(\vec{r}) - (ah_1 + bh_2)}{||\vec{h}||} = \lim_{\vec{h} \rightarrow \vec{0}} \frac{f(\vec{r} + \vec{h}) - f(\vec{r}) - (ch_1 - dh_2)}{||\vec{h}||} = 0 \implies$$

$$\lim_{\vec{h} \rightarrow \vec{0}} \left[\frac{f(\vec{r} + \vec{h}) - f(\vec{r}) - (ah_1 + bh_2)}{||\vec{h}||} \right] - \lim_{\vec{h} \rightarrow \vec{0}} \left[\frac{f(\vec{r} + \vec{h}) - f(\vec{r}) - (ch_1 + dh_2)}{||\vec{h}||} \right] = 0 \implies$$

$$\lim_{\vec{h} \rightarrow \vec{0}} \left[\frac{f(\vec{r} + \vec{h}) - f(\vec{r}) - (ah_1 + bh_2)}{||\vec{h}||} - \frac{f(\vec{r} + \vec{h}) - f(\vec{r}) - (ch_1 + dh_2)}{||\vec{h}||} \right] = 0 \implies$$

$$\lim_{\vec{h} \rightarrow \vec{0}} \frac{(c-a)h_1 + (d-b)h_2}{||\vec{h}||} = 0. \text{ Από αρχή μεταφοράς } \forall (\vec{a_n})_{n \in \mathbb{N}} \text{ με } (0, 0) \neq \vec{a_n} = \left(0, \frac{1}{n}\right) \rightarrow (0, 0):$$

$$f\left(\vec{a_n}\right) \rightarrow 0. \text{ Έστω } c-a \neq 0 \text{ ή } d-b \neq 0. \text{ Θεωρούμε } (\vec{a_n})_{n \in \mathbb{N}} \text{ με } (0, 0) \neq \vec{a_n} = \left(0, \frac{1}{n}\right) \rightarrow (0, 0):$$

$$f\left(\vec{a_n}\right) \rightarrow d-b = 0 \text{ και } \left(\vec{b_n}\right)_{n \in \mathbb{N}} \text{ με } (0, 0) \neq \vec{b_n} = \left(\frac{1}{n}, 0\right) \rightarrow (0, 0): f(b_n) \rightarrow c-a = 0, \text{ άτοπο. Άρα}$$

$a = c$ και $b = d$, δηλαδή υπάρχει το πολύ μία γραμμική συνάρτηση με την παραπάνω ιδιότητα.

Για $df(x, y) := \vec{\nabla} f(x, y) = (f_x(x, y), f_y(x, y))$ και f συνάρτηση C^1 στο (x, y) :

$$\lim_{\vec{h} \rightarrow \vec{0}} \frac{f(\vec{r} + \vec{h}) - f(\vec{r}) - \vec{\nabla} f(\vec{r}) \cdot \vec{h}}{||\vec{h}||} = \lim_{\vec{h} \rightarrow \vec{0}} \frac{f(x+h_1, y+h_2) - f(x, y) - f_x(x, y)h_1 - f_y(x, y)h_2}{||\vec{h}||} =$$

$$= \lim_{\vec{h} \rightarrow \vec{0}} \frac{f(x+h_1, y+h_2) - f(x, y+h_2) - f_x(x, y)h_1 + f(x, y+h_2) - f(x, y) - f_y(x, y)h_2}{\|\vec{h}\|}$$

Παρατηρούμε ότι:

$$\begin{aligned} \lim_{\vec{h} \rightarrow \vec{0}} \frac{f(x+h_1, y+h_2) - f(x, y+h_2) - f_x(x, y)h_1}{\|\vec{h}\|} &= \\ &= \lim_{\vec{h} \rightarrow \vec{0}} \left\{ \left[\frac{f(x+h_1, y+h_2) - f(x, y+h_2)}{h_1} - f_x(x, y) \right] \frac{h_1}{\|\vec{h}\|} \right\} \end{aligned}$$

Από ορισμό και συνέχεια μερικών παραγώγων – έχουμε υποθέσει ότι η f είναι C^1 στο $(x, y) -$

$$\begin{aligned} \lim_{\vec{h} \rightarrow \vec{0}} \frac{f(x+h_1, y+h_2) - f(x, y+h_2)}{h_1} &= f_x(x, y) \implies \\ \lim_{\vec{h} \rightarrow \vec{0}} \left[\frac{f(x+h_1, y+h_2) - f(x, y+h_2)}{h_1} - f_x(x, y) \right] &= 0 \text{ και } 0 \leq \frac{|h_1|}{\|\vec{h}\|} \leq 1. \text{ Τότε} \\ \lim_{\vec{h} \rightarrow \vec{0}} \left[\frac{f(x+h_1, y+h_2) - f(x, y+h_2) - f_x(x, y)h_1}{\|\vec{h}\|} \right] &= 0. \end{aligned}$$

Ομοίως αποδεικνύεται ότι:

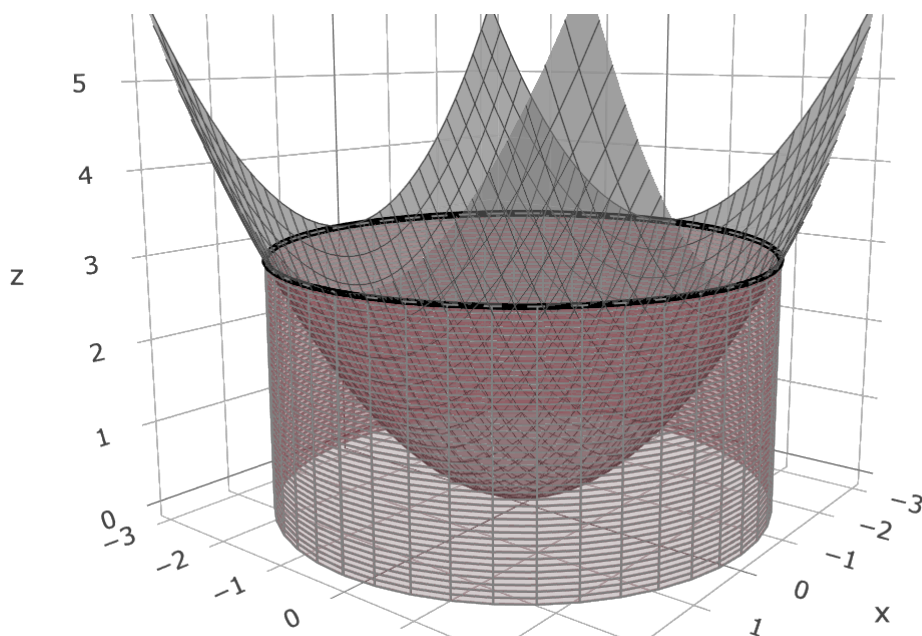
$$\lim_{\vec{h} \rightarrow \vec{0}} \frac{f(x, y+h_2) - f(x, y) - f_y(x, y)h_2}{\|\vec{h}\|} = \lim_{\vec{h} \rightarrow \vec{0}} \left\{ \left[\frac{f(x, y+h_2) - f(x, y) - f_y(x, y)h_2}{h_2} - f_y(x, y) \right] \frac{h_2}{\|\vec{h}\|} \right\} = 0.$$

$$\text{Τελικά, } \lim_{\vec{h} \rightarrow \vec{0}} \frac{f(\vec{r} + \vec{h}) - f(\vec{r}) - \vec{\nabla} f(\vec{r}) \cdot \vec{h}}{\|\vec{h}\|} = 0. \text{ Σύμφωνα με τα παραπάνω το διαφορικό της } f,$$

εφόσον υπάρχει, ορίζεται μονοσήμαντα ως $df(x, y)(\vec{h}) = \vec{\nabla} f(\vec{r}) \cdot \vec{h}$

Άσκηση 8

Να υπολογιστεί ο όγκος του στερεού B που βρίσκεται στο πρώτο ογδοημόριο ($x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$) και περιβάλλεται από τις επιφάνειες $x^2 + y^2 = 9, 3z = x^2 + y^2$.



Λύση

Η εξίσωση $x^2 + y^2 = 9, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ περιγράφει το τμήμα κυλίνδρου κυκλικής βάσης με $r = 3$ και άξονα περιστροφής zz' στο πρώτο ογδοημόριο ενώ η $3z = x^2 + y^2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ αντιστοιχεί σε τμήμα παραβολοειδούς με τον ίδιο άξονα περιστροφής.

Οι δυο επιφάνειες τέμνονται για $3z = 9 \implies z = 3$ κατά τμήμα κύκλου $x^2 + y^2 = 9, x \geq 0, y \geq 0$.

Παρατηρούμε ότι το B είναι στερεό εκ περιστροφής περί τον άξονα z, δηλαδή έχει κυλινδρική συμμετρία. Σε κυλινδρικές συντεταγμένες γράφεται

$$B = \left\{ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq z \leq 3, \sqrt{3z} \leq r \leq 3 \right\}. \text{ Τότε:}$$

$$V(B) = \iiint_B r dr d\theta dz = \int_0^{\pi/2} \int_0^3 \int_{\sqrt{3z}}^3 r dr dz d\theta = \int_0^{\pi/2} \int_0^3 \left(\frac{r^2}{2} \right)_{\sqrt{3z}}^3 dz d\theta \Rightarrow$$

$$V(B) = \left(\int_0^{\pi/2} d\theta \right) \left[\int_0^3 \left(\frac{9 - 3z}{2} \right) dz \right] = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} \left(9z - \frac{3z^2}{2} \right)_0^3 = \frac{\pi}{4} \left(27 - \frac{27}{2} \right) = \frac{27\pi}{8}$$

Αλλιώς παρατηρούμε $B_2 \subset B_1$ και $V(B) = V(B_1) - V(B_2) \Rightarrow$

$$V(B) = \int_0^{\pi/2} \int_0^3 \int_0^3 r dr dz d\theta - \int_0^{\pi/2} \int_0^3 \int_0^{\sqrt{3z}} r dr dz d\theta = \frac{\pi}{2} \cdot 3 \cdot \frac{3^2}{2} - \frac{\pi}{2} \int_0^3 \left(\frac{3z}{2} \right) dz \Rightarrow$$

$$V(B) = \frac{\pi}{4} \left[27 - \left(\frac{3z^2}{2} \right)_0^3 \right] = \frac{27\pi}{8}$$

ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙ & ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ_ΕΑΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2020

ΔΗΜΗΤΡΗΣ ΠΙΤΣΟΣ_ ΑΡ.ΜΗΤΡΩΟΥ: 1110201900303

Συμπληρωματικές ασκήσεις για το 10ο μάθημα

Άσκηση 1

Εξετάστε ως προς τη συνέχεια τις παρακάτω συναρτήσεις :

$$\begin{aligned} (i) f(x, y) &= \begin{cases} \frac{3x^2 - y^2}{x^2 + 3y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases} & (ii) f(x, y) &= \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + 2y^4}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \\ (iii) f(x, y) &= \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases} & (iv) f(x, y) &= \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right), & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \\ (v) f(x, y) &= \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases} & (v) f(x, y) &= \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} \sqrt[3]{y}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \end{aligned}$$

Λύση

$$(i) f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } f(x, y) = \begin{cases} \frac{3x^2 - y^2}{x^2 + 3y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases} . \text{ Παρατηρούμε ότι } \forall (x, y) \neq (0, 0):$$

f συνεχής ως ρητή συνάρτηση των x, y . Έστω $\exists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = a \in \mathbb{R}$. Τότε από αρχή

$$\text{μεταφοράς: } \forall \left(\vec{a_n} \right)_{n \in \mathbb{N}}, \vec{a_n} \neq \vec{0} \forall n \in \mathbb{N} \text{ με } \lim_{n \rightarrow \infty} \vec{a_n} = \vec{0}: f\left(\vec{a_n}\right) = a. \text{ Για } \vec{a_n} = \left(0, \frac{1}{n}\right) \neq \vec{0} \text{ με}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \vec{a_n} = 0, f\left(\vec{a_n}\right) = \frac{-\frac{1}{n^2}}{\frac{3}{n^2}} = -\frac{1}{3} \rightarrow -\frac{1}{3} \implies a = -\frac{1}{3}. \text{ Όμως, για } \vec{b_n} = \left(\frac{1}{n}, 0\right) \neq \vec{0} \text{ με } \lim_{n \rightarrow \infty} \vec{b_n} = 0,$$

$$f\left(\vec{b_n}\right) = \frac{\frac{3}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} = 3 \rightarrow 3 \implies a = 3, \text{ το οποίο είναι άτοπο } \implies \nexists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y). \text{ Τότε η } f$$

παρουσιάζει ασυνέχεια δεύτερου είδους (ουσιώδης) στο $(0, 0)$. Άρα η f είναι ασυνεχής.

$$(ii) f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + 2y^4}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases} . \text{ Παρατηρούμε ότι } \forall (x, y) \neq (0, 0):$$

f συνεχής ως ρητή συνάρτηση των x, y . Έστω $\exists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = a \in \mathbb{R}$. Τότε από αρχή

$$\text{μεταφοράς } \forall \left(\vec{a_n} \right)_{n \in \mathbb{N}}, \vec{a_n} \neq \vec{0} \forall n \in \mathbb{N} \text{ με } \lim_{n \rightarrow \infty} \vec{a_n} = \vec{0}: f\left(\vec{a_n}\right) = a. \text{ Για } \vec{a_n} = \left(0, \frac{1}{n}\right) \neq \vec{0},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \vec{a_n} = 0, f\left(\vec{a_n}\right) = 0 \rightarrow 0 \implies a = 0. \text{ Όμως, για } \vec{b_n} = \left(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n}\right) \neq \vec{0} \text{ με } \lim_{n \rightarrow \infty} \vec{b_n} = 0,$$

$$f\left(\vec{b_n}\right) = \frac{\frac{1}{n^4}}{\frac{1}{n^4} + \frac{2}{n^4}} = \frac{1}{3} \rightarrow \frac{1}{3} \implies a = \frac{1}{3}, \text{ το οποίο είναι άτοπο } \implies \nexists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y). \text{ Τότε η } f$$

παρουσιάζει ασυνέχεια δεύτερου είδους στο $(0,0)$. Άρα η f είναι ασυνεχής.

$$iii) f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}. \text{ Παρατηρούμε ότι } \forall (x,y) \neq (0,0):$$

f συνεχής ως ρητή συνάρτηση των x,y . Έστω $\varepsilon > 0$: για $\delta = \delta(\varepsilon) = \varepsilon > 0$: $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$||(x,y)|| < \delta: \left| \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| = \frac{|x||y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{x^2+y^2} = ||(x,y)|| < \varepsilon. \text{ Τότε}$$

$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$, δηλαδή η f είναι συνεχής στο $(0,0)$. Άρα, η f είναι συνεχής.

$$iv) f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right), & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}. \text{ Παρατηρούμε ότι}$$

$\forall (x,y) \neq (0,0)$ f συνεχής ως πράξεις (και σύνθεση) συνεχών συναρτήσεων. Έστω $\varepsilon > 0$:

για $\delta = \delta(\varepsilon) = \sqrt{\varepsilon} > 0$: $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$: $||(x,y)|| < \delta$:

$$\left| (x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) \right| = (x^2+y^2) \left| \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) \right| \leq x^2+y^2 = ||(x,y)||^2 < \varepsilon. \text{ Τότε}$$

$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$, δηλαδή η f είναι συνεχής στο $(0,0)$. Άρα, η f είναι συνεχής.

$$v) f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } f(x,y) = \begin{cases} xy \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}. \text{ Παρατηρούμε ότι } \forall (x,y) \neq (0,0): f$$

συνεχής ως ρητή συνάρτηση των x,y . Έστω $\varepsilon > 0$: για $\delta = \delta(\varepsilon) = \sqrt[3]{\varepsilon} > 0$: $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$||(x,y)|| < \delta: \left| xy \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \right| = |x||y| \frac{|x^2-y^2|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \sqrt{x^2+y^2} \sqrt{x^2+y^2} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = ||(x,y)||^3 < \varepsilon. \text{ Τότε}$$

$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$, δηλαδή η f είναι συνεχής στο $(0,0)$. Άρα, η f είναι συνεχής.

$$vi) f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} \sqrt[3]{y}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}. \text{ Παρατηρούμε ότι } \forall (x,y) \neq (0,0): f$$

συνεχής ως ρητή συνάρτηση των x,y . Έστω $\varepsilon > 0$: για $\delta = \delta(\varepsilon) = \sqrt[4]{\varepsilon^3} > 0$: $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$||(x,y)|| < \delta: \left| \frac{xy}{x^2+y^2} \sqrt[3]{y} \right| = \frac{|x||y|^{4/3}}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{\sqrt{x^2+y^2} \sqrt{x^2+y^2}^{4/3}}{\sqrt{x^2+y^2}} = ||(x,y)||^{4/3} < \varepsilon. \text{ Τότε}$$

$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$, δηλαδή η f είναι συνεχής στο $(0,0)$. Άρα, η f είναι συνεχής.

Άσκηση 2

Υπολογίστε στο σημείο $(0, 1)$ την παράγωγο (πίνακα *Jacobi*) της $\vec{f}(x, y) = (xy^2, ye^{x^2})$.

Λύση

$\vec{f}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ με $\vec{f}(x, y) = (xy^2, ye^{x^2})$ με συνιστώσες (συναρτήσεις) $P, Q: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,
 $P(x, y) = xy^2$, $Q(x, y) = ye^{x^2}$. $P, Q \in C(\mathbb{R}^2)$ ως γινόμενο και σύνθεση συνεχών συναρτήσεων.
 $P_x = y^2$, $P_y = 2xy$, $Q_x = 2xye^{x^2}$, $Q_y = e^{x^2}$, $P_x, P_y, Q_x, Q_y: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \in C(\mathbb{R}^2)$, άρα
 $\vec{f} \in C^1(\mathbb{R}^2) \Rightarrow \vec{f}$ διαφορίσιμη.

$$D_{\vec{f}}(x, y) = \left(\frac{\vec{\nabla} P}{\vec{\nabla} Q} \right) = \begin{pmatrix} P_x & P_y \\ Q_x & Q_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^2 & 2xy \\ 2xye^{x^2} & e^{x^2} \end{pmatrix}. \text{ Για } (x, y) \equiv (0, 1): D_{\vec{f}}(0, 1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Άσκηση 3

Υπολογίστε τις f_{xx} , f_{yy} των συναρτήσεων:

(i) $f(x, y) = e^{xy} \sin^2 x$

(ii) $f(x, y) = (x^2 + y^3) \ln(1 + y^2)$

Λύση

(i) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x, y) = e^{xy} \sin^2 x \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ ως σύνθεση και γινόμενο στοιχειδών
συναρτήσεων με $f_x(x, y) = ye^{xy} \sin^2 x + e^{xy} (2 \sin x \cos x) \Rightarrow f_x(x, y) = ye^{xy} \sin^2 x + e^{xy} \sin(2x) \Rightarrow$
 $f_x(x, y) = e^{xy} [y \sin^2 x + \sin(2x)]$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ και $f_{xx}(x, y) = (f_x(x, y))_x \Rightarrow$
 $f_{xx}(x, y) = ye^{xy} [y \sin^2 x + \sin(2x)] + e^{xy} [y \sin(2x) + 2 \cos(2x)] \Rightarrow$
 $f_{xx}(x, y) = e^{xy} [y^2 \sin^2 x + 2y \sin(2x) + 2 \cos(2x)] = e^{xy} [(y \sin x + 2 \cos x)^2 - 2]$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, διότι
 $y^2 \sin^2 x + 2y \sin(2x) + 2 \cos(2x) = y^2 \sin^2 x + 4y \sin x \cos x + 4 \cos^2 x + 2(2 \cos^2 x - 1) - 4 \cos^2 x \Rightarrow$
 $y^2 \sin^2 x + 2y \sin(2x) + 2 \cos(2x) = (y \sin x + 2 \cos x)^2 - 2$
Αντίστοιχα, $f_y(x, y) = xe^{xy} \sin^2 x$ και $f_{yy}(x, y) = x^2 e^{xy} \sin^2 x = e^{xy} (x \sin x)^2$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

(ii) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x, y) = (x^2 + y^3) \ln(1 + y^2) \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ ως άθροισμα, γινόμενο και σύνθεση
στοιχειωδών συναρτήσεων με $f_x(x, y) = 2x \ln(1 + y^2)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$f_{xx}(x, y) = 2 \ln(1 + y^2), (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ και } f_y(x, y) = 3y^2 \ln(1 + y^2) + (x^2 + y^3) \frac{2y}{1 + y^2}, (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

$$f_{yy}(x, y) = 6y \ln(1 + y^2) + 3y^2 \frac{2y}{1 + y^2} + 3y^2 \frac{2y}{1 + y^2} - (x^2 + y^3) \frac{2(1 + y^2) - 4y^2}{(1 + y^2)^2} \Rightarrow$$

$$f_{yy}(x, y) = 6y \ln(1 + y^2) + \frac{12y^3}{1 + y^2} - 2(x^2 + y^3) \frac{1 - y^2}{(1 + y^2)^2} \Rightarrow$$

$$f_{yy}(x, y) = 6y \ln(1 + y^2) + 2 \cdot \frac{6y^3(1 + y^2) - (x^2 + y^3)(1 - y^2)}{(1 + y^2)^2} \Rightarrow$$

$$f_{yy}(x, y) = 2 \left[3y \ln(1 + y^2) + \frac{6y^3 + 6y^5 - x^2 + x^2 y^2 - y^3 + y^5}{(1 + y^2)^2} \right] \Rightarrow$$

$$f_{yy}(x, y) = 2 \left[3y \ln(1 + y^2) + \frac{7y^5 + 5y^3 + x^2(y^2 - 1)}{(1 + y^2)^2} \right], (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Άσκηση 4

(a) Υπολογίστε τις f_{zx} των συναρτήσεων :

(i) $f(x, y, z) = \sin(xy)\cos(z^2)$

(ii) $f(x, y, z) = x^{y+z}$

(b) Υπολογίστε τις f_{yx} και την f_{zz} των συναρτήσεων :

(iii) $f(x, y, z) = z^2 \arctan(xy)$

(iv) $f(x, y, z) = ze^{x+y+z}$

Λύση

(i) $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x, y, z) = \sin(xy)\cos(z^2) \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ με $f_x(x, y, z) = y \cos(xy)\cos(z^2) \implies$
 $f_{zx}(x, y, z) = (f_x(x, y, z))_z = y \cos(xy) \left[-2z \sin(z^2) \right] = -2yz \cos(xy)\sin(z^2), (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

(ii) $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x, y, z) = x^{y+z} = e^{\ln x^{y+z}} = e^{(y+z)\ln x} \in C^\infty(D), D = (0, \infty) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Τότε
 $f_x(x, y, z) = (y+z)x^{y+z-1}$. Ομοίως με τον ισοδύναμο τύπο για την f παίρνουμε :

$$f_x(x, y) = \frac{y+z}{x} e^{(y+z)\ln x} \implies f_x(x, y) = (y+z) \frac{x^{y+z}}{x} = (y+z)x^{y+z-1}. \text{ Τότε}$$

$$f_{zx}(x, y, z) = x^{y+z-1} + (y+z)x^{y+z-1} \ln x \implies f_{zx}(x, y, z) = x^{y+z-1} [1 + (y+z)\ln x], x > 0.$$

Ομοίως, $f_{zx}(x, y, z) = \frac{1}{x} e^{(y+z)\ln x} + \frac{y+z}{x} e^{(y+z)\ln x} \ln x \implies f_{zx}(x, y, z) = \frac{x^{y+z}}{x} + \frac{y+z}{x} x^{y+z} \ln x \implies$

$$f_{zx}(x, y, z) = [(y+z)\ln x + 1]x^{y+z-1}, x > 0$$

(iii) $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x, y, z) = z^2 \arctan(xy) \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$. Τότε

$$f_x(x, y, z) = \frac{yz^2}{1 + (xy)^2}, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \implies f_{yx}(x, y, z) = \frac{z^2(1 + x^2 y^2) - yz^2(2x^2 y)}{(1 + x^2 y^2)^2} \implies$$

$$f_{yx}(x, y, z) = \frac{z^2 + x^2 y^2 z^2 - 2x^2 y^2 z^2}{(1 + x^2 y^2)^2} = \frac{z^2(1 - x^2 y^2)}{(1 + x^2 y^2)^2}, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

$$f_z(x, y, z) = 2z \arctan(xy), (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \implies f_{zz}(x, y, z) = 2 \arctan(xy), (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

(iv) $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x, y, z) = ze^{x+y+z} \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$. Τότε

$$f_x(x, y, z) = ze^{x+y+z}, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \implies f_{yx}(x, y, z) = ze^{x+y+z}, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

$$f_z(x, y, z) = (z+1)e^{x+y+z}, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \implies f_{zz}(x, y, z) = (z+2)e^{x+y+z}, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

Άσκηση 5

Εξετάστε αν είναι διαφορίσιμη στο σημείο $(0, 0)$ η συνάρτηση

$$\vec{f}(x, y) = \begin{cases} \left(\frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{xy^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right), & (x, y) \neq (0, 0) \\ (0, 0), & (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Λύση

$\vec{f}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ διαφορίσιμη στο $(0,0)$ αν και μόνο αν οι $P, Q: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$P(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}, \quad Q(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad \text{διαφορίσιμες στο } (0, 0).$$

(Έλεγχος συνέχειας)

Έστω P, Q διαφορίσιμες στο $(0,0) \implies P, Q$ συνεχείς στο $(0,0)$, το οποίο ισχύει:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} P(x, y) = 0 = P(0, 0) = Q(0, 0) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} Q(x, y), \text{ ε διότι}$$

$$\left| \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| = \frac{|x||y|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq \frac{\sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \|(x, y)\|$$

$$\left| \frac{xy^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| = \frac{|x|y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} (x^2 + y^2) = \|(x, y)\|^2.$$

$$\text{Για τις μερικές παραγώγους ισχύει: } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{P(h, 0) - P(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0 \in \mathbb{R} \implies P_x(0, 0) = 0$$

$$\text{και } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{P(0, h) - P(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0 \in \mathbb{R} \implies P_y(0, 0) = 0. \text{ Όμως, παρατηρούμε ότι:}$$

$$\lim_{\vec{h} \rightarrow \vec{0}} \left(\frac{P(\vec{h}) - P(\vec{0}) - \vec{\nabla} P(\vec{0}) \cdot \vec{h}}{\|\vec{h}\|} \right) = \lim_{\vec{h} \rightarrow \vec{0}} \left(\frac{\frac{h_1 h_2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \right) = \lim_{\vec{h} \rightarrow \vec{0}} \left(\frac{h_1 h_2}{h_1^2 + h_2^2} \right) \text{ δεν ορίζεται, διότι}$$

$$\text{αν } g(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}, \quad (x, y) \neq (0, 0) \text{ για } \vec{a}_n = \left(0, \frac{1}{n} \right) \neq \vec{0}, \quad \lim \vec{a}_n = \vec{0}, \quad f(\vec{a}_n) = 0 \rightarrow 0 \implies a = 0,$$

$$\text{ενώ για } \vec{b}_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right) \neq \vec{0} \text{ με } \lim \vec{b}_n = \vec{0}, \quad g(\vec{b}_n) = \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2}} = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2} \implies a = \frac{1}{2}, \text{ το οποίο είναι}$$

άτοπο. Άρα η P δεν είναι διαφορίσιμη στο $(0,0) \implies$ η $\vec{f}$ δεν είναι διαφορίσιμη στο $(0,0)$.

$$\text{Παρατηρούμε ότι για την } Q \text{ ισχύει: } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{Q(h, 0) - Q(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0 \in \mathbb{R} \implies Q_x(0, 0) = 0$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{Q(0, h) - Q(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0 \in \mathbb{R} \implies Q_y(0, 0) = 0$$

$$\lim_{\vec{h} \rightarrow \vec{0}} \left(\frac{Q(\vec{h}) - Q(\vec{0}) - \vec{\nabla} Q(\vec{0}) \cdot \vec{h}}{\|\vec{h}\|} \right) = \lim_{\vec{h} \rightarrow \vec{0}} \left(\frac{\frac{h_1 h_2^2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \right) = \lim_{\vec{h} \rightarrow \vec{0}} \left(\frac{h_1 h_2^2}{h_1^2 + h_2^2} \right) = 0$$

$$\left| \frac{h_1 h_2^2}{h_1^2 + h_2^2} \right| = \frac{|h_1| h_2^2}{h_1^2 + h_2^2} \leq \sqrt{h_1^2 + h_2^2} \frac{h_1^2 + h_2^2}{h_1^2 + h_2^2} = \|(h_1, h_2)\|. \text{ Η } Q \text{ είναι διαφορίσιμη στο } (0,0). \text{ Όμως,}$$

δεν έχει σημασία για την διαφορισιμότητα της $\vec{f}$, εφόσον η P δεν είναι διαφορίσιμη.

Άσκηση 6

Να βρεθεί η κατευθυνόμενη παράγωγος της συνάρτησης $f(x, y, z) = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$ κατά την κατεύθυνση

$\vec{a} = (1, 2, -1)$ στο σημείο (x_0, y_0, z_0) .

Λύση

$f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : xyz \neq 0 \right\}$ με $f(x, y, z) = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} \in C(D)$ ως άθροισμα

ρητών συναρτήσεων των x, y, z . (Παρατηρούμε ότι $f(x, y, z) = f(z, x, y) = f(y, z, x)$, διότι

$$f(z, x, y) = \frac{z}{x} + \frac{x}{y} + \frac{y}{z}, \quad f(y, z, x) = \frac{y}{z} + \frac{z}{x} + \frac{x}{y}, \quad \text{τότε αρκεί να υπολογίσουμε μία μερική}$$

παράγωγο και οι υπόλοιπες προκύπτουν με κυκλική μετάθεση των μεταβλητών

$$x \rightarrow y \rightarrow z). \quad f_x(x, y, z) = \frac{1}{y} - \frac{z}{x^2}, \quad f_y(x, y, z) = \frac{1}{z} - \frac{x}{y^2}, \quad f_z(x, y, z) = \frac{1}{x} - \frac{y}{z^2}, \quad (x, y, z) \in D$$

$f_x, f_y, f_z \in C(D) \implies f \in C^1(D) \implies f$ διαφορίσιμη με $df(x, y, z) = \vec{\nabla} f(x, y, z)$

$$\vec{\nabla} f(x, y, z) = \left(\frac{1}{y} - \frac{z}{x^2}, \frac{1}{z} - \frac{x}{y^2}, \frac{1}{x} - \frac{y}{z^2} \right) = \left(\frac{x^2 - yz}{yx^2}, \frac{y^2 - zx}{zy^2}, \frac{z^2 - xy}{xz^2} \right), \quad (x, y, z) \in D$$

$$f_{\hat{a}}(\vec{r}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\vec{r} + t\hat{a}) - f(\vec{r})}{t} \implies f_{\hat{a}}(\vec{r}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{df(\vec{r}) \cdot (t\hat{a})}{t} = \vec{\nabla} f(\vec{r}) \cdot \frac{\vec{a}}{||\vec{a}||} \implies$$

$$f_{\hat{a}}(\vec{r}) = \left(\frac{1}{y_0} - \frac{z_0}{x_0^2}, \frac{1}{z_0} - \frac{x_0}{y_0^2}, \frac{1}{x_0} - \frac{y_0}{z_0^2} \right) \cdot \frac{(1, 2, -1)}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}} \left(\frac{1}{y_0} - \frac{z_0}{x_0^2} + \frac{2}{z_0} - \frac{2x_0}{y_0^2} - \frac{1}{x_0} + \frac{y_0}{z_0^2} \right) \implies$$

$$f_{\hat{a}}(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{6}} \left(\frac{x_0 z_0 + 2x_0 y_0 - y_0 z_0}{x_0 y_0 z_0} + \frac{-y_0^2 z_0^3 - 2x_0^3 z_0^2 + x_0^2 z_0^3}{x_0^2 y_0^2 z_0^2} \right) \implies$$

$$f_{\hat{a}}(\vec{r}) = \frac{x_0^2 y_0 z_0^2 + 2x_0^2 y_0^2 z_0 - x_0 y_0^2 z_0^2 - y_0^2 z_0^3 - 2x_0^3 z_0^2 + x_0^2 z_0^3}{(x_0 y_0 z_0)^2 \sqrt{6}}$$

Άσκηση 7

Βρείτε την μέγιστη και ελάχιστη τιμή της κατευθυνομενης παραγώγου $f_u^{\vec{r}}(1, 2, 0)$ της συνάρτησης

$f(x, y, z) = x^2 z + y e^z + x z^3$ και την κατεύθυνση στην οποία λαμβάνονται αυτές οι τιμές.

Λύση

$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x, y, z) = x^2 z + y e^z + x z^3 \in C(\mathbb{R}^3)$ ως γινόμενο στοιχειδών συναρτήσεων με

$$f_x(x, y, z) = 2xz + z^3, \quad f_y(x, y, z) = e^z, \quad f_z(x, y, z) = x^2 + y e^z + 3xz^2, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

$f_x, f_y, f_z \in C(\mathbb{R}^3) \implies f \in C^1(\mathbb{R}^3) \implies f$ διαφορίσιμη με $df(x, y, z) = \vec{\nabla} f(x, y, z)$ και

$$\vec{\nabla} f(x, y, z) = (2xz + z^3, e^z, x^2 + y e^z + 3xz^2). \quad \text{Τότε } f_u^{\vec{r}}(\vec{r}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\vec{r} + t\hat{u}) - f(\vec{r})}{t} \implies$$

$$f_u^{\vec{r}}(\vec{r}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\vec{r} + t\hat{u}) - f(\vec{r}) - df(\vec{r}) \cdot (t\hat{u}) + df(\vec{r}) \cdot (t\hat{u})}{t} \implies$$

$$f_u^{\vec{r}}(\vec{r}) = \lim_{t \rightarrow 0} \left[\frac{f(\vec{r} + t\hat{u}) - f(\vec{r}) - df(\vec{r}) \cdot (t\hat{u})}{t} + \frac{df(\vec{r}) \cdot (t\hat{u})}{t} \right] \text{ και}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left[\frac{f(\vec{r} + t\hat{u}) - f(\vec{r}) - df(\vec{r}) \cdot (t\hat{u})}{t} \right] = \lim_{\vec{h} \rightarrow \vec{0}} \left[\frac{f(\vec{r} + \vec{h}) - f(\vec{r}) - df(\vec{r}) \cdot \vec{h}}{t} \right] = 0$$

$$f_u^{\vec{r}}(\vec{r}) = \lim_{t \rightarrow 0} \left[\frac{df(\vec{r}) \cdot (t\hat{u})}{t} \right] = \lim_{t \rightarrow 0} [df(\vec{r}) \cdot \hat{u}] = [\vec{\nabla} f(\vec{r})] \cdot \hat{u}. \quad \text{Τότε:}$$

$$|f_u^{\vec{r}}(1, 2, 0)| = |\vec{\nabla} f(1, 2, 0) \cdot \hat{u}| \leq ||(0, 1, 3)|| \quad (\text{ανισότητα Cauchy - Schwarz}) \implies$$

$$-\sqrt{10} \leq f_u^{\rightarrow}(1, 2, 0) \leq \sqrt{10} \text{ με } f_u^{\rightarrow}(1, 2, 0) = \max\{f_u^{\rightarrow}(1, 2, 0)\} = \sqrt{10} \text{ για } \widehat{u}_1 = \frac{(0, 1, 3)}{\|(0, 1, 3)\|} \Rightarrow$$

$$\widehat{u}_1 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}\right) \text{ κατεύθυνση μέγιστης τιμής κατευθυνόμενης παραγώγου και}$$

$$f_u^{\rightarrow}(1, 2, 0) = \min\{f_u^{\rightarrow}(1, 2, 0)\} = -\sqrt{10} \text{ για } \widehat{u}_2 = -\frac{(0, 1, 3)}{\|(0, 1, 3)\|} \Rightarrow \widehat{u}_2 = \left(0, -\frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$$

κατεύθυνση ελάχιστης τιμής κατευθυνόμενης παραγώγου.

Άσκηση 8

(a) Υπολογίστε την Λαπλασιανή της συνάρτησης $\vec{F}(x, y, z) = (x, y^2z, xz^3)$.

(b) Εξετάστε αν είναι συντηρητικό το πεδίο $\vec{F}(x, y, z) = (2xy, x^2 + ze^y, e^y)$.

Λύση

(a) $\vec{F}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ με $\vec{F}(x, y, z) = (x, y^2z, xz^3) \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ – πεδίο, εφόσον συνιστώσες συναρτήσεις

$P, Q, R: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ με $P(x, y, z) = x$, $Q(x, y, z) = y^2z$, $R(x, y, z) = xz^3$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ ως

πολυνώνυμα των x, y, z .

$$\vec{\Delta F} = (\Delta P, \Delta Q, \Delta R) = (0, 2z, 6xz)$$

$$\Delta P = \vec{\nabla} \cdot \vec{(\nabla P)} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left(\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial P}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = P_{xx} + P_{yy} + P_{zz}$$

Αντίστοιχα $\Delta Q = Q_{xx} + Q_{yy} + Q_{zz}$ και $\Delta R = R_{xx} + R_{yy} + R_{zz}$

$$P_x = 1 \Rightarrow P_{xx} = 0, P_y = 0 = P_z \Rightarrow P_{yy} = P_{zz} = 0$$

$$Q_x = 0 \Rightarrow Q_{xx} = 0, Q_y = 2yz \Rightarrow Q_{yy} = 2z, Q_z = y^2 \Rightarrow Q_{zz} = 0$$

$$R_x = z^3 \Rightarrow R_{xx} = 0, R_y = 0 \Rightarrow R_{yy} = 0, R_z = 3xz^2 \Rightarrow R_{zz} = 6xz$$

$$\Delta P = 0, \Delta Q = 2z, \Delta R = 6xz$$

(b) $\vec{F}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ με $\vec{F}(x, y, z) = (2xy, x^2 + ze^y, e^y) \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ – πεδίο εφόσον συνιστώσες

$P, Q, R: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ με $P(x, y, z) = 2xy$, $Q(x, y, z) = x^2 + ze^y$, $R(x, y, z) = e^y$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$P, Q, R \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ ως στοιχειώδεις συναρτήσεις των x, y, z .

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xy & x^2 + ze^y & e^y \end{vmatrix} = (e^y - e^y)\hat{i} - 0\hat{j} + (2x - 2x)\hat{k} = \vec{0}$$

Θεωρούμε $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$: $f(x, y, z) = \int (2xy)dx + g(y, z)$ με $f_y = Q$, $f_z = R$

$$f(x, y, z) = x^2y + g(y, z) \Rightarrow f_y = x^2 + \frac{\partial g}{\partial y} = x^2 + ze^y \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial y} = ze^y \Rightarrow g(y, z) = \int ze^y dy + h(z) \Rightarrow$$

$$g(y, z) = ze^y + h(z) \Rightarrow f(x, y, z) = x^2y + ze^y + h(z) \Rightarrow e^y + \frac{dh}{dz} = e^y \Rightarrow \frac{dh}{dz} = 0 \Rightarrow h(z) = c \Rightarrow$$

$$f(x, y, z) = x^2y + ze^y + c \text{ με } \vec{\nabla} f = (2xy, x^2 + ze^y, e^y), \text{ δηλαδή } \exists f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \in C^1(\mathbb{R}^3): \vec{F} = \vec{\nabla} f.$$

Άρα το πεδίο $\vec{F}$ είναι συντηρητικό.

ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙ & ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ_ΕΑΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2020

ΔΗΜΗΤΡΗΣ ΠΙΤΣΟΣ_ ΑΡ.ΜΗΤΡΩΟΥ: 1110201900303

11ο μάθημα

Άσκηση 1

Θεωρούμε την $f(x, y) = \begin{cases} \frac{-3xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$. Να δείξετε ότι οι μερικές παράγωγοι υπάρχουν στο

$(0, 0)$ αλλά η f δεν είναι διαφορίσιμη στο $(0, 0)$.

Λύση

(i) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x, y) = \begin{cases} \frac{-3xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ Έστω f διαφορίσιμη. Τότε f

συνεχής. $\forall (x, y) \neq (0, 0): f$ συνεχής ως ρητή συνάρτηση των x, y . Έστω

$\exists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = c \in \mathbb{R}$: λόγω της αρχής της μεταφοράς: $\forall \left(\vec{a_n} \right)_{n \in \mathbb{N}}, \vec{a_n} \neq \vec{0} \forall n \in \mathbb{N}$ με

$\lim_{n \rightarrow \infty} \vec{a_n} = \vec{0}: f\left(\vec{a_n}\right) \rightarrow c$. Για $\vec{a_n} = \left(0, \frac{1}{n}\right) \neq \vec{0}: \lim_{n \rightarrow \infty} \vec{a_n} = \vec{0}, f\left(\vec{a_n}\right) = 0 \rightarrow 0 \implies c = 0$. Όμως, για

$\vec{b_n} = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \neq \vec{0}: \lim_{n \rightarrow \infty} \vec{b_n} = \vec{0}, f\left(\vec{b_n}\right) = \frac{\frac{-3}{n^2}}{\frac{2}{n^2}} = -\frac{3}{2} \rightarrow -\frac{3}{2} \implies c = -\frac{3}{2} \neq 0$. Άρα $\nexists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$,

Η f παρουσιάζει ασυνέχεια (δεύτερου είδους, ουσιώδης) στο $(0, 0)$, δηλαδή η f δεν είναι συνεχής. Επομένως, η f δεν είναι διαφορίσιμη.

Η f είναι μερικώς παραγωγίσιμη, διότι:

$$f_x = \frac{-3y}{x^2 + y^2} - \frac{2x \cdot (-3xy)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{-3y(x^2 + y^2) + 6x^2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{-3y^3 + 3x^2y}{(x^2 + y^2)^2}, (x, y) \neq (0, 0)$$

$$f_y = \frac{-3x}{x^2 + y^2} - \frac{2y \cdot (-3xy)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{-3x(x^2 + y^2) + 6xy^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{-3x^3 + 3xy^2}{(x^2 + y^2)^2}, (x, y) \neq (0, 0)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0 = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} \implies f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0.$$

Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι $\nexists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f_x(x, y), \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f_y(x, y)$, οι f_x, f_y είναι ασυνεχείς στο $(0, 0)$.

$$\lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0,0)} \frac{f(h_1, h_2) - f(0, 0) - f_x(0, 0)h_1 - f_y(0, 0)h_2}{\|(h_1, h_2)\|} = \lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0,0)} \frac{-3h_1h_2}{\left(h_1^2 + h_2^2\right)^{3/2}} \text{ δεν ορίζεται, διότι}$$

$$\text{για } (0, 0) \neq (h_1, h_2) = \left(\frac{3}{n}, \frac{4}{n}\right) \rightarrow (0, 0): \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-3h_1h_2}{\left(h_1^2 + h_2^2\right)^{3/2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\frac{36}{n^2}}{\left(\frac{25}{n^2}\right)^{3/2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\frac{36}{n^2}}{\left(\frac{25}{n^2}\right)^{3/2}} = -\infty \notin \mathbb{R}.$$

Άρα η f δεν είναι διαφορίσιμη στο $(0, 0)$.

Άσκηση 2

Αν ισχύει η σχέση $x = u^2 - v^2$, $y = uv$ και η $f(x, y) = \frac{y}{x^2}$ να βρεθούν οι μερικές παράγωγοι πρώτης τάξης της f .

Λύση

$x, y: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f: D = \left\{ \mathbb{R}^2 - \{(x, y) : x = 0\} \right\} \rightarrow \mathbb{R}$ διαφορίσιμες ως στοιχειώδεις συναρτήσεις των u, v και x, y αντίστοιχα. Περιορίζουμε τις x, y στο $x^{-1}(D)$. Τότε $(f \circ \vec{r})(u, v) = f(x(u, v), y(u, v))$ διαφορίσιμη στο $x^{-1}(D) = \left\{ (u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 - v^2 \neq 0 \implies u \neq \pm v \right\}$ ως σύνθεση διαφορίσιμων συναρτήσεων. Μπορούμε να υπολογίσουμε τις μερικές παραγώγους της f ως προς u, v απευθείας :

$$\left. \begin{array}{l} f(x, y) = \frac{y}{x^2} \\ x(u, v) = u^2 - v^2 \\ y(u, v) = uv \end{array} \right\} \implies f(u, v) = \frac{y(u, v)}{[x(u, v)]^2} = \frac{uv}{(u^2 - v^2)^2} \implies$$
$$f_u = \frac{v(u^2 - v^2)^2 - uv \cdot 2(u^2 - v^2)2u}{(u^2 - v^2)^4} = \frac{u^2v - v^3 - 4u^2v}{(u^2 - v^2)^3} = -\frac{3u^2v + v^3}{(u^2 - v^2)^3}, u \neq \pm v$$
$$f_v = \frac{u(u^2 - v^2)^2 - uv \cdot 2(u^2 - v^2)(-2v)}{(u^2 - v^2)^4} = \frac{u^3 - uv^2 + 4uv^2}{(u^2 - v^2)^3} = \frac{u^3 + 3uv^2}{(u^2 - v^2)^3}, u \neq \pm v$$

είτε με τον κανόνα αλυσίδας :

$$f_u = f_x x_u + f_y y_u = -\frac{2y}{x^3} \cdot 2u + \frac{1}{x^2} \cdot v = \frac{-4yu + xv}{x^3} = \frac{-4uv \cdot u + (u^2 - v^2)v}{(u^2 - v^2)^3} = \frac{-3u^2v - v^3}{(u^2 - v^2)^3}, u \neq \pm v$$
$$f_v = f_x x_v + f_y y_v = -\frac{2y}{x^3} \cdot (-2v) + \frac{1}{x^2} \cdot u = \frac{4yv + xu}{x^3} = \frac{4uv \cdot v + (u^2 - v^2)u}{(u^2 - v^2)^3} = \frac{u^3 + 3uv^2}{(u^2 - v^2)^3}, u \neq \pm v$$

Άσκηση 3

Αν ισχύει η σχέση $x = u^2 + v^2$, $y = \frac{u}{v}$ και η $f(x, y) = 2xy$ να βρεθούν οι μερικές παράγωγοι πρώτης τάξης της f .

Λύση

$f, x: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, y: D = \left\{ \mathbb{R}^2 - \{(u, v) : v \neq 0\} \right\} \rightarrow \mathbb{R}$ διαφορίσιμες ως στοιχειώδεις συναρτήσεις των x, y και u, v αντίστοιχα. Περιορίζουμε την x στο D . Τότε $(f \circ \vec{r})(u, v) = f(x(u, v), y(u, v))$ διαφορίσιμη στο D ως σύνθεση διαφορίσιμων συναρτήσεων.

$$\left. \begin{array}{l} f(x, y) = 2xy \\ x(u, v) = u^2 + v^2 \\ y(u, v) = \frac{u}{v} \end{array} \right\} \implies f(u, v) = 2x(u, v)y(u, v) = 2(u^2 + v^2) \cdot \frac{u}{v} \implies$$
$$f_u = 4u \cdot \frac{u}{v} + 2 \frac{u^2 + v^2}{v} = \frac{6u^2 + 2v^2}{v}, v \neq 0$$

$$f_v = 4v \cdot \frac{u}{v} + 2(u^2 + v^2) \left(-\frac{u}{v^2} \right) = 2u - \frac{2u^3}{v^2} = \frac{2uv^2 - 2u^3}{v^2}, \quad v \neq 0$$

Αντίστοιχα, με κανόνα αλυσίδας :

$$f_u = f_x x_u + f_y y_u = 2y \cdot (2u) + 2x \cdot \frac{1}{v} = 4 \cdot \frac{u^2}{v} + 2(u^2 + v^2) \frac{1}{v} = \frac{6u^2}{v} + 2v = \frac{6u^2 + 2v^2}{v}, \quad v \neq 0$$

$$f_v = f_x x_v + f_y y_v = 2y \cdot (2v) + 2x \cdot \left(-\frac{u}{v^2} \right) = 4u - 2(u^2 + v^2) \cdot \frac{u}{v^2} = 2u - \frac{2u^3}{v^2} = \frac{2uv^2 - 2u^3}{v^2}, \quad v \neq 0$$

Άσκηση 4

Να βρεθεί η κατευθυνόμενη παράγωγος της συνάρτησης $f(x, y, z) = e^{x^2+y^2+z^2}$ στο σημείο $(-1, 1, 1)$ κατά κατεύθυνση $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$.

Λύση

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f \in C^\infty(\mathbb{R}^3) \quad \text{με} \quad \vec{\nabla} f(x, y, z) = 2e^{x^2+y^2+z^2}(x, y, z) \implies \vec{\nabla} f(-1, 1, 1) = 2e^3(-1, 1, 1)$$

διότι $f_x = 2xe^{x^2+y^2+z^2}$, $f_y = 2ye^{x^2+y^2+z^2}$, $f_z = 2ze^{x^2+y^2+z^2} \in C^1(\mathbb{R}^3)$. Τότε

$$f_a^{\rightarrow}(-1, 1, 1) = \vec{\nabla} f(-1, 1, 1) \cdot \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} = 2e^3(-1, 1, 1) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, -1) = \frac{2e^3}{\sqrt{3}}(-1 + 1 - 1) = -\frac{2e^3}{\sqrt{3}}$$

$$f\left(-1 - \frac{h}{\sqrt{3}}, 1 + \frac{h}{\sqrt{3}}, 1 + \frac{h}{\sqrt{3}}\right) - f(-1, 1, 1)$$

$$\text{Αναλυτικά: } f_a^{\rightarrow}(-1, 1, 1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(-1 - \frac{h}{\sqrt{3}}, 1 + \frac{h}{\sqrt{3}}, 1 + \frac{h}{\sqrt{3}}\right) - f(-1, 1, 1)}{h}$$

Όμως, η f είναι διαφορίσιμη. Τότε :

$$\lim_{(h_1, h_2, h_3) \rightarrow (0,0,0)} \frac{f(-1 + h_1, 1 + h_2, 1 + h_3) - f(-1, 1, 1) - \vec{\nabla} f(-1, 1, 1) \cdot (h_1, h_2, h_3)}{h} = 0$$

$$\text{για } (h_1, h_2, h_3) = \left(-\frac{h}{\sqrt{3}}, \frac{h}{\sqrt{3}}, \frac{h}{\sqrt{3}}\right) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0:$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(-1 - \frac{h}{\sqrt{3}}, 1 + \frac{h}{\sqrt{3}}, 1 + \frac{h}{\sqrt{3}}\right) - f(-1, 1, 1) - \vec{\nabla} f(-1, 1, 1) \cdot \left[h\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}\right)\right]}{h} = 0$$

$$\text{Παρατηρούμε ότι } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\vec{\nabla} f(-1, 1, 1) \cdot \left[h\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}\right)\right]}{h} = \vec{\nabla} f(-1, 1, 1) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}\right) \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Τότε } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(-1 - \frac{h}{\sqrt{3}}, 1 + \frac{h}{\sqrt{3}}, 1 + \frac{h}{\sqrt{3}}\right) - f(-1, 1, 1)}{h} = \vec{\nabla} f(-1, 1, 1) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{2e^3}{\sqrt{3}}$$

Άσκηση 5

Να υπολογιστεί ο όγκος που σχηματίζεται από το παραβολοειδές $z = x^2 + y^2$ και το επίπεδο $z = 6$.

Λύση

$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = z = x^2 + y^2 \geq 0$. Η $G_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2\}$ τέμνει το επίπεδο

$z = 6$ κατά τον κύκλο $\left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 6 \\ z = 6 \end{array} \right\}$. Τότε $V(B) = \int \int \int_B dV = \int \int \int_B dV \implies$

$$V(B) = \int_0^{2\pi} \int_0^6 \int_0^{\sqrt{z}} r dr dz d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^6 \left(\frac{r^2}{2} \right)_{r=0}^{r=\sqrt{z}} dz d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^6 \left(\frac{z}{2} \right) dz d\theta = \frac{1}{2} \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \left(\frac{z^2}{2} \right)_0^6 \Rightarrow$$

$$V(B) = \frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot \frac{6^2}{2} = 18\pi$$

Επίσης, μπορεί να υπολογιστεί ως στερεό εκ περιστροφής με την αρχή *Cavalieri* :

$$V(B) = \int_0^6 A(z) dz = \int_0^6 \pi r^2(z) dz = \int_0^6 \pi z dz = \pi \left(\frac{z^2}{2} \right)_0^6 = 18\pi$$

Άσκηση 5

Να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_{\Gamma} y ds$ όπου Γ είναι η καμπύλη με παραμετρικές

εξισώσεις $x(t) = t$, $y(t) = \sqrt{t}$, $2 \leq t \leq 6$.

Λύση

$\vec{r}: [2, 6] \rightarrow \mathbb{R}^2: \vec{r}(t) = (x(t), y(t)) = (t, \sqrt{t})$, $2 \leq t \leq 6$, συνεχής, παραγωγίσιμη $\Rightarrow$

$$\vec{r}'(t) = \left(1, \frac{1}{2\sqrt{t}} \right) \Rightarrow \|\vec{r}'(t)\| = \frac{ds}{dt} = \sqrt{1 + \frac{1}{4t}} = \sqrt{\frac{4t+1}{4t}} = \frac{\sqrt{4t+1}}{2\sqrt{t}} \text{ και } f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = y$$

$f \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Τότε ορίζεται η $f \circ \vec{r}: [2, 6] \rightarrow \mathbb{R}$, ο περιορισμός της f επί της καμπύλης $\vec{r}$, συνεχής συνάρτηση ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων, άρα ολοκληρώσιμη στο $[2, 6]$ με

$$\int_{\Gamma} y ds = \int_{\Gamma} (f \circ \vec{r})(t) \cdot \frac{ds}{dt} dt = \int_2^6 (f \circ \vec{r})(t) \cdot \|\vec{r}'(t)\| dt = \int_2^6 \left[y(t) \cdot \frac{ds}{dt} \right] dt \Rightarrow$$

$$\int_{\Gamma} y ds = \int_2^6 \left[\sqrt{t} \cdot \left(\frac{\sqrt{4t+1}}{2\sqrt{t}} \right) \right] dt = \frac{1}{2} \cdot \int_2^6 (\sqrt{4t+1}) dt = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} (4t+1)^{3/2} \right]_2^6 \Rightarrow$$

$$\int_{\Gamma} y ds = \frac{1}{12} (25^{3/2} - 9^{3/2}) = \frac{125 - 27}{12} = \frac{98}{12} = \frac{49}{6}$$

Ασκήσεις τρίτου μαθήματος Ανάλυσης 2

Μιλτιάδης Τηραΐδης

17 Απριλίου 2020

Άσκηση 1

Έστω $(\vec{a}_\nu)$ μια ακολουθία του $\mathbb{R}^n$ και $(a_{i\nu})$, $i = 1, 2, \dots, n$ οι συνιστώσες ακολουθίες της $(\vec{a}_\nu)$ και $(\vec{a}) = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. Να δείξετε ότι τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

- $\vec{a}_\nu \rightarrow \vec{a}$
- $a_{i\nu} \rightarrow a_i$ για $i=1,2,\dots,n$

Λύση

Αρχικά θα αποδείξουμε ότι αν $\vec{a}_\nu \rightarrow \vec{a}$ τότε $a_{i\nu} \rightarrow a_i$, $i = 1, 2, \dots, n$

Έστω $a_{j\nu} \rightarrow a'_j \neq a_j$ με a_j μια τυχαία συνιστώσα ακολουθία. Γνωρίζουμε ότι $\vec{a}_\nu = (a_{1\nu}, a_{2\nu}, \dots, a_{j\nu}, \dots, a_{n\nu}) \rightarrow \vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_j, \dots, a_n)$.

Όμως $a_{j\nu} \rightarrow a'_j$. Οπότε, λόγω της μοναδικότητας του ορίου ακολουθίας έχουμε $a_j = a'_j$ το οποίο είναι άτοπο. Άρα αν $\vec{a}_\nu \rightarrow \vec{a}$ τότε $a_{i\nu} \rightarrow a_i$.

Τώρα, θα αποδείξουμε ότι αν $a_{i\nu} \rightarrow a_i$ τότε $\vec{a}_\nu \rightarrow \vec{a}$, $i = 1, 2, \dots, n$

Έστω ότι $(\vec{a}_\nu) \rightarrow \vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a'_j, \dots, a_n)$ με $a'_j \neq a_j$.

Γνωρίζουμε ότι $a_{i\nu} \rightarrow a_i$ για $i = 1, 2, \dots, n$

Άρα έχουμε ότι $\vec{a}_\nu = (a_{1\nu}, a_{2\nu}, \dots, a_{j\nu}, \dots, a_{n\nu}) \rightarrow \vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_j, \dots, a_n)$ και λόγω της μοναδικότητας του ορίου $a_j = a'_j$ το οποίο είναι άτοπο.

Άρα αν $\vec{a}_\nu \rightarrow \vec{a}$ τότε $a_{i\nu} \rightarrow a_i$, $i = 1, 2, \dots, n$

Οπότε έχουμε αποδείξει ότι οι δύο ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι.

Άσκηση 2

Να δείξετε ότι κάθε συγκλίνουσα ακολουθία $(\vec{a}_\nu)$ του $\mathbb{R}^n$ είναι και φραγμένη.

Λύση

α) τρόπος

Αφού $(\vec{a}_\nu)$ συγκλίνουσα, τότε εξ'ορισμού $\lim_{\nu \rightarrow +\infty} (\vec{a}_\nu) = \vec{a}$, $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$

$\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$. Γνωρίζουμε ότι αν $(\vec{a}_\nu) \rightarrow \vec{a}$ τότε $a_{i\nu} \rightarrow a_i$, $i = 1, 2, \dots, n$
 $\|\vec{a}\| = \sqrt{(a_1)^2 + (a_2)^2 + \dots + (a_n)^2}$ Θέτω $M = \max(\|\vec{a}_1\|, \|\vec{a}_2\|, \dots, \|\vec{a}_n\|, \|\vec{a}\|)$
Τότε, $\|\vec{a}_n\| \leq M \forall n \in \mathbb{N}$ Άρα η $(\vec{a}_\nu)$ είναι φραγμένη.

β) τρόπος

Πρώτα θα αποδείξουμε ότι $||\vec{a}| - |\vec{b}|| \leq ||\vec{a} - \vec{b}||$ χρησιμοποιώντας την τριγωνική ανισότητα. Αρκεί να δείξουμε ότι $||\vec{a}| - |\vec{b}|| \leq ||\vec{a} - \vec{b}||$ και $-||\vec{a} - \vec{b}|| \leq ||\vec{a}| - |\vec{b}||$. Έχουμε

$$\begin{aligned} ||\vec{a}| &= ||(\vec{a} - \vec{b}) + \vec{b}|| \leq ||\vec{a} - \vec{b}|| + ||\vec{b}|| \Rightarrow ||\vec{a}| \leq ||\vec{a} - \vec{b}|| + ||\vec{b}|| \Rightarrow \\ &||\vec{a}| - |\vec{b}|| \leq ||\vec{a} - \vec{b}|| \quad (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ||\vec{b}| &= ||(\vec{b} - \vec{a}) + \vec{a}|| \leq ||\vec{b} - \vec{a}|| + ||\vec{a}|| \Rightarrow ||\vec{b}| \leq ||\vec{b} - \vec{a}|| + ||\vec{a}|| \Rightarrow \\ ||\vec{b}| - |\vec{a}| &\leq ||\vec{b} - \vec{a}|| \Rightarrow ||\vec{a}| - |\vec{b}|| \geq -||\vec{b} - \vec{a}|| = -||\vec{a} - \vec{b}|| \Rightarrow \\ ||\vec{a}| - |\vec{b}|| &\geq -||\vec{a} - \vec{b}|| = -||\vec{a} - \vec{b}|| \quad (2) \end{aligned}$$

Από τις (1) και (2) έχουμε αποδείξει το ζητούμενο.

Τώρα θα δείξουμε ότι κάθε συγκλίνουσα ακολουθία $(\vec{a}_\nu)$ του $\mathbb{R}^n$ είναι και φραγμένη. Αφού η $(\vec{a}_\nu)$ είναι φραγμένη τότε $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall \nu > n_0 ||\vec{a}_\nu - \vec{a}|| < \varepsilon$

$$\begin{aligned} ||\vec{a}_\nu - \vec{a}|| < \varepsilon &\Rightarrow |||\vec{a}_\nu| - |\vec{a}|| \leq ||\vec{a}_\nu - \vec{a}|| \Rightarrow ||\vec{a}_\nu| - |\vec{a}|| \leq ||\vec{a}_\nu - \vec{a}|| < \varepsilon \Rightarrow \\ &||\vec{a}_\nu| < |\vec{a}| + \varepsilon \quad \forall \nu > n_0 \end{aligned}$$

Θέτουμε $M = \max\{|\vec{a}_1|, |\vec{a}_2|, \dots, |\vec{a}_{n_0}|, |\vec{a}| + \varepsilon\}$. Άρα $||\vec{a}_\nu| \leq M \quad \forall \nu \in \mathbb{N}$

Άσκηση 3

Έστω $(\vec{a}_\nu)$ και $(\vec{b}_\nu)$ συγκλίνουσες ακολουθίες του $\mathbb{R}^n$ και $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$ με $\vec{a}_\nu \rightarrow \vec{a}$ και $\vec{b}_\nu \rightarrow \vec{b}$. Τότε ισχύει $\vec{a}_\nu + \vec{b}_\nu \rightarrow \vec{a} + \vec{b}$.

Λύση

Αφού η $(\vec{a}_\nu)$ είναι συγκλίνουσα, τότε για $\varepsilon > 0 \exists n_1 \in \mathbb{N} : \text{για } n > n_1 ||\vec{a}_n - \vec{a}|| < \varepsilon$ (1)

Όμοια για την $(\vec{b}_\nu)$, για $\varepsilon > 0 \exists n_2 \in \mathbb{N} : \text{για } n > n_2 ||\vec{b}_n - \vec{b}|| < \varepsilon$ (2)

Τώρα, για $N = \max\{n_1, n_2\}$ έχουμε:

$$\begin{aligned} (1) + (2) &\Rightarrow ||\vec{a}_n - \vec{a}|| + ||\vec{b}_n - \vec{b}|| < 2\varepsilon \Rightarrow \\ ||(\vec{a}_n - \vec{a}) + (\vec{b}_n - \vec{b})|| &\leq ||\vec{a}_n - \vec{a}|| + ||\vec{b}_n - \vec{b}|| < 2\varepsilon \Rightarrow \\ ||(\vec{a}_n + \vec{b}_n) - (\vec{a} + \vec{b})|| &< 2\varepsilon \quad \text{Άρα } \vec{a}_\nu + \vec{b}_\nu \rightarrow \vec{a} + \vec{b}. \end{aligned}$$

Άσκηση 4

Να δείξετε ότι κάθε φραγμένη ακολουθία $(\vec{a}_\nu)$ του $\mathbb{R}^n$ περιέχει μία συγκλίνουσα υποακολουθία.

Λύση

Γνωρίζουμε ότι το θεώρημα Bolzano-Weierstrass ισχύει για ακολουθίες πραγματικών αριθμών ($n = 1$). Άρα, λόγω του θεωρήματος Bolzano-Weierstrass, κάθε συνιστώσα ακολουθία της $(\vec{a}_\nu)$ έχει μια συγκλίνουσα υποακολουθία. Άρα, αφού κάθε συνιστώσα ακολουθία έχει συγκλίνουσα υποακολουθία, ισοδύναμα μπορούμε να πούμε ότι η $(\vec{a}_\nu)$ έχει συγκλίνουσα υποακολουθία.

Ασκήσεις έβδομου μαθήματος ανάλυσης 2

Μιλτιάδης Τηραϊδής (AM 201900187)

9 Μαΐου 2020

Άσκηση 1

Υπολογίστε τα I_x, I_y, I_o του τριγωνικού χωρίου $O\hat{A}B$ με κορυφές $O(0,0)$, $A(1,0)$, $B(1,1)$ πάνω στο οποίο κατανέμεται μάζα αμελητέου πάχους πυκνότητας $\delta(x,y) = x + y^2$

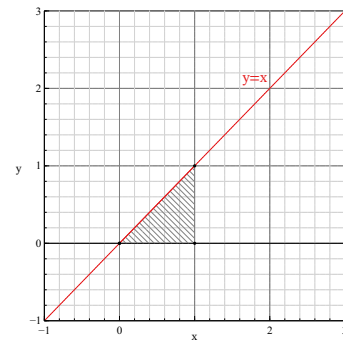
Λύση

Αρχικά, θα σχεδιάσουμε την γραφική παράσταση για να βρούμε το σύνολο D στο οποίο θα ολοκληρώσουμε.

Μπορούμε να δούμε λοιπόν ότι $D = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$ έχουμε λοιπόν:

$$\begin{aligned} I_x &= \int \int_D y^2 \delta(x,y) dx dy = \int_0^1 \int_0^x y^2 (x + y^2) dy dx \\ &= \int_0^1 \int_0^x (y^2 x + y^4) dy dx = \int_0^1 \left[\frac{y^3}{3} x + \frac{y^5}{5} \right]_0^x dx \\ &= \int_0^1 \left(\frac{x^4}{3} + \frac{x^5}{5} \right) dx = \left[\frac{x^5}{15} + \frac{x^6}{30} \right]_0^1 = \frac{1}{15} + \frac{1}{30} = \frac{3}{30} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$I_x = \frac{1}{10}$$



$$\begin{aligned} I_y &= \int \int_D x^2 \delta(x,y) dx dy = \int_0^1 \int_0^x x^2 (x + y^2) dy dx = \int_0^1 \int_0^x (x^3 + y^2 x^2) dy dx \\ &= \int_0^1 \left[x^3 y + \frac{y^3}{3} x^2 \right]_0^x dx = \int_0^1 \left(x^4 + \frac{x^5}{3} \right) dx = \left[\frac{x^5}{5} + \frac{x^6}{18} \right]_0^1 = \frac{1}{5} + \frac{1}{18} = \frac{18+5}{90} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$I_y = \frac{23}{90}$$

$$I_o = I_x + I_y = \frac{1}{10} + \frac{23}{90} = \frac{23+9}{90} = \frac{32}{90} = \frac{16}{45}$$

Άσκηση 2

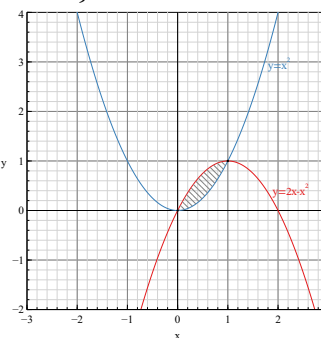
Βρείτε την μάζα μιας λεπτής πλάκας πυκνότητας $\delta(x, y) = x + 1$ που φράσσεται από τις καμπύλες $y = x^2$, $y = -x^2 + 2x$

Λύση

Πάλι, σχεδιάζουμε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων μας για να δούμε ποιά είναι το σύνολο D στο οποίο θα ολοκληρώσουμε:

Μπορούμε να δούμε λοιπόν ότι $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 2x - x^2\}$

$$\begin{aligned} m &= \iint_D \delta(x, y) dx dy = \int_0^1 \int_{x^2}^{2x-x^2} (x+1) dy dx \\ &= \int_0^1 [yx + \frac{y^2}{2}]_{x^2}^{2x-x^2} dx = \int_0^1 \left((2x-x^2)x + 2x - x^3 - 2x^2 \right) dx \\ &= \int_0^1 (-2x^3 + 2x) dx = [x^2 - \frac{2}{4}x^4]_0^1 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$



Άσκηση 4

Να υπολογιστεί το $I = \int \int_B (e^x + x) \sin y dx dy$ και σαν x-απλο και σαν y-απλο, όπου $B = [1, 2] \times [0, \frac{\pi}{2}]$

Λύση

α) σαν y-απλο

$$\begin{aligned} I &= \int \int_B (e^x + x) \sin y dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_1^2 (e^x + x) \sin y dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin y \left[e^x + \frac{x^2}{2} \right]_1^2 dy \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin y (e^2 + 2 - e - \frac{1}{2}) dy = \left[-\cos y (e^2 - e + \frac{3}{2}) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = e^2 - e + \frac{3}{2} \end{aligned}$$

β) σαν x-απλο

$$\begin{aligned} I &= \int \int_B (e^x + x) \sin y dx dy = \int_1^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (e^x + x) \sin y dy dx = \int_1^2 (e^x + x) [-\cos y]_0^{\frac{\pi}{2}} dx \\ &= \int_1^2 (e^x + x)(0 - (-1)) dx = \left[e^x + \frac{x^2}{2} \right]_1^2 = e^2 + \frac{4}{2} - e - \frac{1}{2} = e^2 - e + \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Ασκήσεις όγδοου μαθήματος Ανάλυσης 2

Μιλτιάδης Τηραϊδής (AM: 201900187)

21 Μαΐου 2020

Άσκηση 1

Έστω $f : D \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ και $\vec{F} : D \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ C^2 στο D . Να δείξετε ότι $\nabla \times (\nabla f) = \vec{0}$ και $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) = 0$

Λύση

$$\bullet \nabla \times (\nabla f) = \vec{0}$$

$$\nabla \times (\nabla f) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix} = \hat{i} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \right) + \hat{j} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} \right) + \hat{k} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)$$

Όμως, αφού η f είναι C^2 στο D , ισχύει το Θεώρημα Clairant. Δηλαδή:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \quad \forall i, j \in \{1, 2, 3\} \quad (x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z)$$

$$\text{Άρα } \nabla \times (\nabla f) = \hat{i}0 + \hat{j}0 + \hat{k}0 = \vec{0}$$

$$\bullet \nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) = 0$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) = \nabla \cdot \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \nabla \cdot \left[\hat{i} \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) + \hat{j} \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) + \hat{k} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \right] \Rightarrow$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) = \frac{\partial F_3}{\partial y \partial x} - \frac{\partial F_2}{\partial z \partial x} + \frac{\partial F_1}{\partial z \partial y} - \frac{\partial F_3}{\partial x \partial y} + \frac{\partial F_2}{\partial x \partial z} - \frac{\partial F_1}{\partial y \partial z} = 0$$

Άσκηση 2

Να δείξετε ότι κάθε συντηρητικό διανυσματικό πεδίο $\vec{F}(P, Q, R) : d \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ είναι αστρόβιλο

Λύση

Για να είναι αστρόβιλο το πεδίο $\vec{F}$ πρέπει $\nabla \times \vec{F} = \vec{0}$. Αφού το $\vec{F}$ είναι συντηρητικό μπορεί να γραφτεί ως $\nabla \Phi$. Έχουμε:

$$\nabla \times \vec{F} = \nabla \times (\nabla \Phi) = \vec{0} \quad (\text{Από άσκηση 1})$$

Άρα ισχύει το ζητούμενο.

Συμπληρωματικές Ασκήσεις 9ου μαθήματος Ανάλυσης 2

Μιλτιάδης Τηραϊδής

18 Ιουνίου 2020

Άσκηση 1

Να υπολογιστεί η κατευθυνόμενη παράγωγος $f_{\vec{u}}(\vec{a})$ της $f(x, y, z) = xye^{x^2+y^2+z^2}$ στο σημείο $\vec{a} = (0, 1, 1)$ ως προς την κατεύθυνση $\vec{u} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$

Λύση

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 0^2} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 1 \quad \text{Άρα το } \vec{u} \text{ είναι μοναδιαίο}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= ye^{x^2+y^2+z^2} + 2x^2ye^{x^2+y^2+z^2} & \frac{\partial f}{\partial y} &= xe^{x^2+y^2+z^2} + 2y^2xe^{x^2+y^2+z^2} \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= 2xyze^{x^2+y^2+z^2} \end{aligned}$$

Αφού υπάρχουν οι μερικοί παράγωγοι της f και είναι συνεχείς, η f είναι διαφορίσιμη. Οπότε, απο γνωστό θεώρημα έχουμε ότι

$$f_{\vec{u}}(\vec{a}) = \nabla f(\vec{a}) \cdot \vec{u} = (1 \cdot e^{0+1+1} + 0, 0 + 0, 0) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}e^2$$

Άσκηση 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x, y, z) = x + y^2 + z^3$.

- i) Να βρεθεί για ποιές κατευθύνσεις η κατευθυνόμενη παράγωγος της συνάρτησης f στο σημείο $(0, 0, 0)$ παίρνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή.
- ii) Να βρεθεί για ποιές κατευθύνσεις η κατευθυνόμενη παράγωγος της συνάρτησης f στο σημείο $(1, 1, 1)$ παίρνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή.

Λύση

i)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1 \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 3z^2$$

Αφού υπάρχουν οι μερικοί παράγωγοι της f και είναι συνεχείς, η f είναι διαφορίσιμη. Απο γνωστό θεώρημα, η κατευθυνόμενη παράγωγος γίνεται μέγιστη όταν τα διανύσματα $\nabla f(\vec{a})$, $\vec{u}$ είναι ομόρροπα και παράλληλα, ενώ γίνεται ελάχιστη όταν τα διανύσματα είναι αντίρροπα.

Αρχικά, βρίσκουμε πότε τα διανύσματα είναι παράλληλα, δηλαδή πότε ισχύει $\nabla f(0, 0, 0) \times \vec{u} = \vec{0}$

$$\nabla f(0, 0, 0) \times \vec{u} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ u_x & u_y & u_z \end{vmatrix} = \hat{i} \cdot 0 - \hat{j}(u_z - 0) + \hat{k}(u_y - 0) = \vec{0}$$

Άρα πρέπει $\vec{u} = (u_x, 0, 0)$ για να είναι παράλληλα. Όμως, το $\vec{u}$ είναι διάνυσμα κατεύθυνσης, οπότε πρέπει να είναι και μοναδιαίο.

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{u_x^2} = 1 \Rightarrow |u_x| = 1$$

Έτσι, όταν $u_x = 1$ τα $\nabla f(0, 0, 0)$, $\vec{u}$ είναι ομόρροπα και έχουμε μέγιστο, ενώ όταν $u_x = -1$ τα $\nabla f(0, 0, 0)$, $\vec{u}$ είναι αντίρροπα και έχουμε ελάχιστο.

ii)

Πάλι ψάχνουμε πότε τα διανύσματα $\nabla f(1, 1, 1)$, $\vec{u}$ είναι παράλληλα:

$$\nabla f(1, 1, 1) \times \vec{u} = \vec{0} \Rightarrow \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ u_x & u_y & u_z \end{vmatrix} = \hat{i}(2u_z - 3u_y) - \hat{j}(u_z - 3u_x) + \hat{k}(u_y - 2u_x) = \vec{0}$$

Άρα πρέπει να ισχύει:

$$\begin{cases} 2u_z - 3u_y = 0 \\ u_z - 3u_x = 0 \\ u_y - 2u_x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 \cdot 3u_x - 3 \cdot 2u_x = 0 \\ u_z = 3u_x \\ u_y = 2u_x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ u_z = 3u_x \\ u_y = 2u_x \end{cases}$$

Οπότε $\vec{u} = (u_x, 2u_x, 3u_x)$ και αφού $\vec{u}$ κατεύθυνση τότε:

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{u_x^2 + (2u_x)^2 + (3u_x)^2} = \sqrt{14}|u_x| = 1 \Rightarrow |u_x| = \frac{1}{\sqrt{14}}$$

Αφού $\nabla f(1, 1, 1) = (1, 2, 3)$, τα $\nabla f(1, 1, 1)$, $\vec{u}$ είναι ομόρροπα (και έχουμε μέγιστο) όταν $u_x = \frac{1}{\sqrt{14}}$ ενώ είναι αντίρροπα (και έχουμε ελάχιστο) όταν $u_x = -\frac{1}{\sqrt{14}}$

Άσκηση 3

Να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ της συνάρτησης

$$\vec{F}(x, y, z) = (\sin z, \cos z, \sqrt[3]{xy})$$

Όπου $\Gamma = \left\{ \vec{r}(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t, t) : t \in \left[0, \frac{3\pi}{2}\right] \right\}$

Λύση

Η Γ είναι C^1 . Έχουμε $\vec{r}'(t) = (-3\cos^2 t \sin t, 3\cos t \sin^2 t, 1)$

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_0^{3\pi/2} \vec{F}(\vec{r}(t)) \vec{r}'(t) dt = \int_0^{3\pi/2} (\cos^3 t, \sin^3 t, \sqrt[3]{\cos^3 t \sin^3 t}) \cdot (-3\cos^2 t \sin t, 3\cos t \sin^2 t, 1) dt \\ &= \int_0^{3\pi/2} (-3\sin^2 t \cos^2 t + 3\sin^2 t \cos^2 t + \sqrt[3]{\cos^3 t \sin^3 t}) dt = \int_0^{3\pi/2} \sin t \cos t dt = \frac{1}{2} \int_0^{3\pi/2} \sin 2t dt \\ &= -\frac{1}{2} [\cos 2t]_0^{3\pi/2} = -\frac{1}{2} (\cos(3\pi/2) - \cos 0) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Άσκηση 4

Να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ της συνάρτησης

$$\vec{F}(x, y) = \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right) = (P, Q)$$

Όπου Γ ο μοναδιαίος κύκλος με κέντρο $(0, 0)$.

Λύση

$$\Gamma = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$$

Το χωρίο D που περικλύεται από την καμπύλη Γ είναι απλό και συνεκτικό χωρίο και η Γ είναι κατα τμήματα C^1 καμπύλη και θετικά προσανατολισμένη. Επομένως, ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Green και έχουμε:

$$I = \int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int \int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int \int_D \left(\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} \right) dx dy$$

Τώρα, εφαρμόζουμε μετασχηματισμό σε πολικές συντεταγμένες:

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta \quad x^2 + y^2 = r^2 \quad \text{με} \quad 0 \leq r \leq 1 \quad \text{και} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^1 r \left(\frac{4r \cos \theta r \sin \theta}{r^2} \right) dr d\theta = \int_0^{2\pi} \cos \theta \sin \theta [r^2]_0^1 d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sin(2\theta) d\theta = -\frac{1}{2} [\cos(2\theta)]_0^{2\pi} = 0$$

Άσκηση 5

Να αποδειχθεί ότι

$$i) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} xy = 0 \quad ii) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2xy}{x^2 + y^2} y = 0$$

Λύση

i)

Έστω $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} xy$ και τυχαίο $\varepsilon > 0$. Θα βρούμε $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$: για $\|(x, y) - (0, 0)\| = \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$ να ισχύει $|\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} xy - 0| < \varepsilon$. Έχουμε:

$$\left| \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} xy \right| = \frac{|x^2 - y^2| \cdot |xy|}{x^2 + y^2} \leq \frac{x^2 |xy|}{x^2 + y^2} \leq |xy| \leq x^2 + y^2 < \delta^2$$

Άρα αρκεί να διαλέξουμε $\delta^2 = \varepsilon$.

Έστω $f(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2} y$ και τυχαίο $\varepsilon > 0$. Θα βρούμε $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$: για $\|(x, y) - (0, 0)\| = \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$ να ισχύει $|\frac{2xy}{x^2 + y^2} y - 0| < \varepsilon$. Έχουμε:

$$\left| \frac{2xy}{x^2 + y^2} y \right| = \frac{2|x|y^2}{x^2 + y^2} \leq 2|x| \leq 2\sqrt{x^2 + y^2} < 2\delta$$

Άρα αρκεί να διαλέξουμε $2\delta = \varepsilon$.

Άσκηση 6

Να μελετηθεί ως προς την συνέχεια η συνάρτηση

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2x^2y}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Λύση

Για $(x, y) \neq 0$ η $f(x, y)$ είναι συνεχής.

$$f(x, 0) = \frac{2x^2 \cdot 0}{x^2 + 0} = 0 \rightarrow 0 \quad \text{για} \quad (x, 0) \rightarrow (0, 0)$$

$$f(x, x^2) = \frac{2x^2 \cdot x^2}{x^2 + x^4} = 1 \rightarrow 1 \quad \text{για} \quad (x, x^2) \rightarrow (0, 0)$$

Άρα η f δεν είναι συνεχής στο $(0, 0)$ καθώς το $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ δεν υπάρχει.

Άσκηση 7

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x, y) = x^2 + 4y^2 \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Να υπολογιστεί το $df(2, 3)$

Λύση

Η f είναι διαφορίσιμη καθώς οι μερικές παράγωγοι

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \quad \text{και} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 8y$$

υπάρχουν και είναι συνεχείς. Επίσης, $\nabla f(x, y) = (2x, 8y)$ και $\nabla f(2, 3) = (4, 24)$. Άρα

$$df(2, 3)(x, y) = \nabla f(2, 3) \cdot (x, y) = (4, 24) \cdot (x, y) = 2x + 24y$$

Άσκηση 8

Να υπολογιστεί ο όγκος του στερεού B που βρίσκεται στο πρώτο ογδομήριο $(x, y, z \geq 0)$ και περιβάλλεται από τις επιφάνειες $x^2 + y^2 = 9$, $3z = x^2 + y^2$

Λύση

Εφαρμόζουμε μετασχηματισμό σε κυλινδρικές συντεταγμένες:

$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta \quad z = \frac{r^2}{3} \quad \text{με} \quad 0 \leq r \leq 3, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad \frac{r^2}{3} \leq z \leq 3$$

$$I = \int \int \int_B dx dy dz = \int_0^{\pi/2} \int_0^3 \int_{r^2/2}^3 r dz dr d\theta = \int_0^{\pi/2} \int_0^3 r \left(3 - \frac{r^2}{2} \right) dr d\theta = \int_0^{\pi/2} \left[\frac{3}{2} r^2 - \frac{r^3}{9} \right]_0^3 d\theta \Rightarrow$$

$$I = \frac{3}{2} 9 [\theta]_0^{\pi/2} = \frac{27\pi}{4}$$

Εύρητα 3 (συνέχεια)

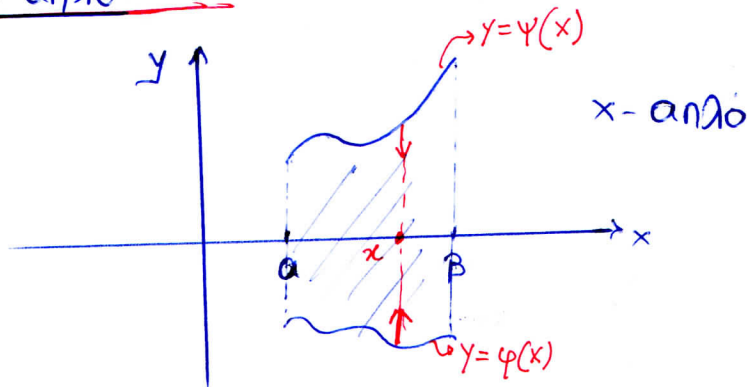
Διηρώ ολουήρα

$$D \subseteq \mathbb{R}^2$$

i) $D = \{(x, y) : a \leq x \leq b, \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$

$\varphi, \psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ σωχείς

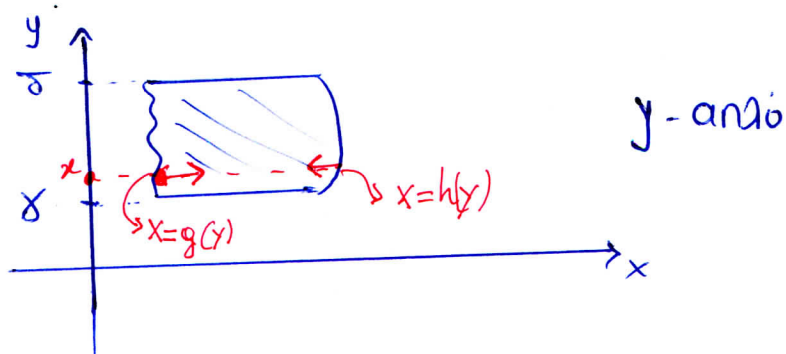
x-αηλώ



ii) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \delta \leq y \leq \delta, g(y) \leq x \leq h(y)\}$

$g, h : [\delta, \delta] \rightarrow \mathbb{R}$ σωχείς

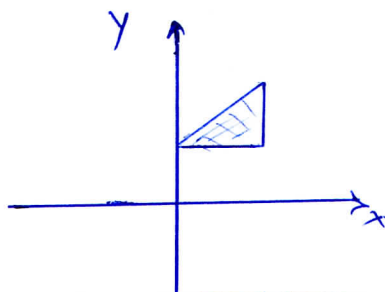
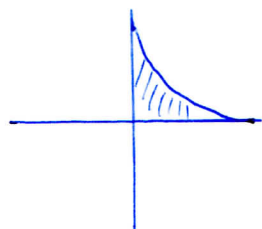
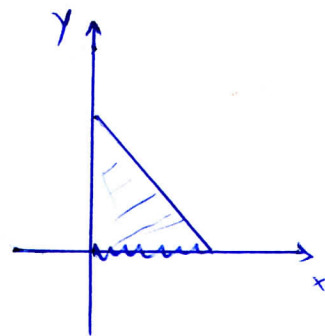
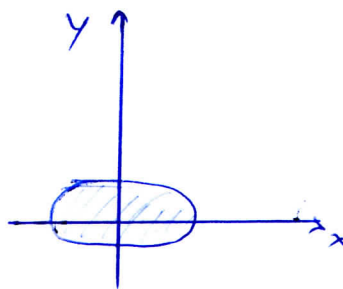
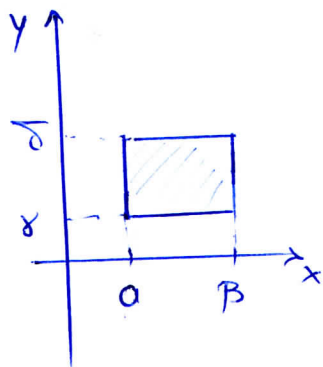
y-αηλώ



iii) D είναι x και y αηλώ

D αηλώ





Αντίστροφα



'0x1 x-αδλ0
'0x1 y-αδλ0

Θ. Fubini

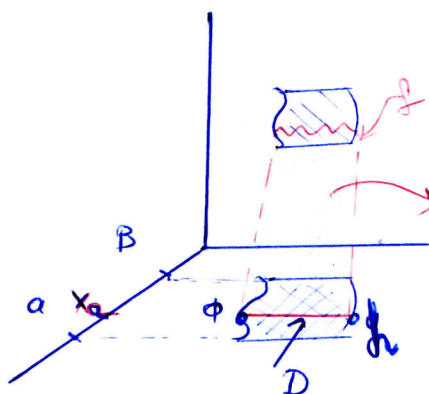
$f: D \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής

i) D x-αντί $\int_D f(x,y) dx dy = \int_a^β \left(\int_{\phi(x)}^{y(x)} f(x,y) dy \right) dx$

ii) D y-αντί

$$\int_D f(x,y) dx dy = \int_\alpha^\delta \left(\int_{g(y)}^{h(y)} f(x,y) dx \right) dy$$

$f=1$, $\int_D 1 dx dy = \text{εμβαδόν του } D$



B_{x_0}
 $\phi(x_0)$ $y(x_0)$

$\int_{\phi(x_0)}^{y(x_0)} f(x_0, y) dy = \text{εμβαδόν } B(x_0)$



$$f \geq 0, \quad \mathcal{I}(f, D) = \{(x, y, z) : (x, y) \in D, 0 \leq z \leq f(x, y)\}$$

$$V(\mathcal{I}(f, D)) = \iint_D f(x, y) dx dy$$

όγκος
στερεώ

$$f=1, \quad V(\mathcal{I}(f, D)) = A(D)$$

Άσκηση:

$$1) \quad I = \iint_B (e^x \sin y + x \sin y) dx dy, \quad B = [1, 2] \times [0, \pi/2]$$

$$I = \int_0^{\pi/2} \left(\int_1^2 (e^x \sin y + x \sin y) dx \right) dy = \int_1^2 \left(\int_0^{\pi/2} (e^x \sin y + x \sin y) dy \right) dx$$

$$I = \int_0^{\pi/2} \left(e^x \sin y + \frac{x^2}{2} \sin y \right) \Big|_{x=1}^2 dy$$

$$I = \int_0^{\pi/2} \left(e^2 - e \right) \sin y + \frac{3}{2} \sin y dy = \left(e^2 - e + \frac{3}{2} \right) \int_0^{\pi/2} \sin y dy$$

$$I = \left(e^2 - e + \frac{3}{2} \right) \left(-\cos y \Big|_0^{\pi/2} \right)$$

$$I = e^2 - e + 3/2$$



$$2) I = \int_1^2 \int_0^{2x} (6x + 6y + 6) \, dx \, dy$$

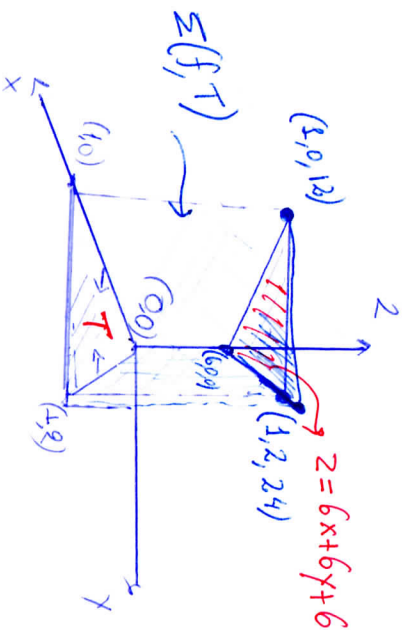
$$T = \{ (x, y) : 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 2x \} \quad \underline{x - \text{axis}}$$

$$I = 6 \int_0^1 \left(\int_0^{2x} (x + y + 1) \, dy \right) dx$$

$$I = 6 \int_0^1 \left(xy + \frac{y^2}{2} + y \right) \bigg|_{y=0}^{2x} dx$$

$$I = 6 \int_0^1 \left(2x^2 + \frac{(2x)^2}{2} + 2x \right) dx$$

$$I = 6 \int_0^1 (4x^2 + 2x) \, dx = 6 \left[\frac{4}{3} x^3 + x^2 \right]_{x=0}^1 = 6 \left(\frac{4}{3} + 1 \right) = 14$$



$$V \left(\int_1^2 \int_0^{2x} (6x + 6y + 6) \, dx \, dy \right) = 14$$



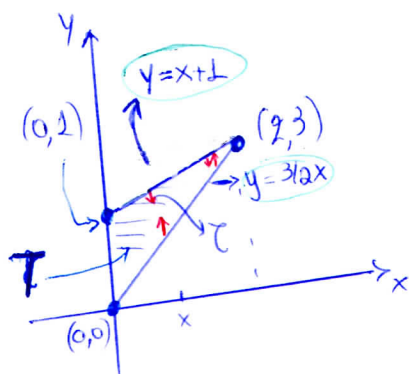
-172-

Ορίζουμε ως μάζα του D το $M = \iint_D \delta(x,y) dx dy$ όπου

$\delta(x,y)$ = πυκνότητα μάζας στο (x,y) / Συν 2) υπολογίζουμε
 ως βάρος του τριγωνικού ηλ.
 T με πυκνότητα $\delta(x,y) = 6x + 6y$.

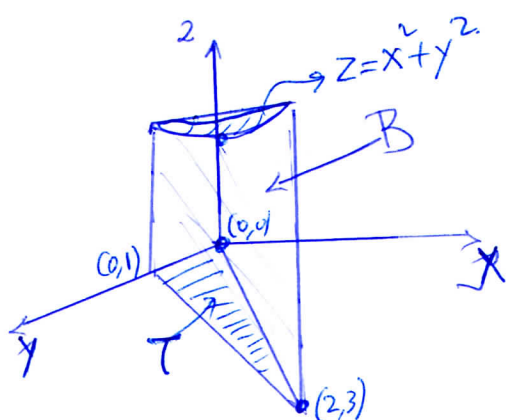
3) $I = \iint_T (x^2 + y^2) dx dy$

T τρίγωνο με κορυφές $A(0,0)$, $B(0,1)$, $\Gamma(2,3)$



$$T = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 2, \frac{3}{2}x \leq y \leq x+1\}$$

$$I = \int_0^2 \left(\int_{\frac{3}{2}x}^{x+1} (x^2 + y^2) dy \right) dx = \dots = 17/6$$



$$z = x^2 + y^2$$

$$V(B) = \iint_T (x^2 + y^2) dx dy$$

Άλλες διαρωώσεις της 3)

Να υπολογιστεί ο όγκος του B.

$$B = \{(x,y,z) : (x,y) \in T, 0 \leq z \leq x^2 + y^2 = f(x,y)\}$$

ή μάζα του T με $\delta(x,y) = x^2 + y^2$



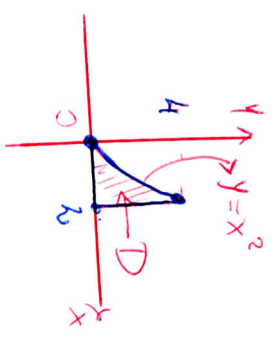
$$4) I = \int_D \int_D xy \, dx \, dy$$

1) περιβάλλεται από την $y=x^2$, $x=2$, $y=0$.

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq x^2\}$$

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 4, \sqrt{y} \leq x \leq 2\}$$

Προσέχουμε το σημείο που περιέχεται στην οριογραμμή $y=x^2$.



$$I = \int_0^2 \left(\int_0^{x^2} xy \, dy \right) dx = \dots = \frac{16}{3}$$

Αλλαγή της σειράς Ολοκλήρωσης

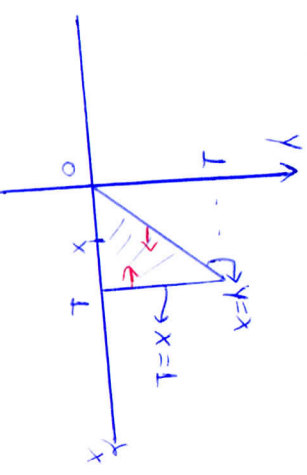


(Τα y είναι ανεξάρτητα των x)

$$4) I = \int_0^1 \left(\int_y^2 e^{-x^2} dx \right) dy$$

$$D = \{(x,y) : 0 \leq y \leq 1, y \leq x \leq 2\}$$

$$= \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$$



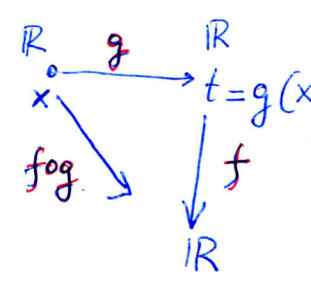
$$I = \int_0^1 \left(\int_0^x e^{-x^2} dy \right) dx = \int_0^1 x \cdot e^{-x^2} dx = \left[-\frac{1}{2} e^{-x^2} \right]_0^1 = -\frac{1}{2} (1 - e^{-1})$$

* $\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 e^{-x^2} dx$ Δεν υπολογίζεται, δηλ. δεν υπάρχει ολοκλήρωση
 $\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 x^n dx$ εύκολα γιατί $f(x) = e^{-x^2}$ (βλ. και αντιστροφή Taylor)
 $(g(x) = x^n)$

2) $I = \int_0^1 \left(\int_y^1 n f(x^2) dx \right) dy = \int_0^1 \left(\int_0^x n f(x^2) dy \right) dx =$
 $= \int_0^1 \left(\int_0^x n f(x^2) dy \right) dx = \int_0^1 x \cdot n f(x^2) dx = \left[-\frac{1}{2} 6n(x^2) \right]_0^1 = \frac{1}{2} (1 - 6n)$

Αλλαγή συντεταγμένων στο $\mathbb{R}^2$

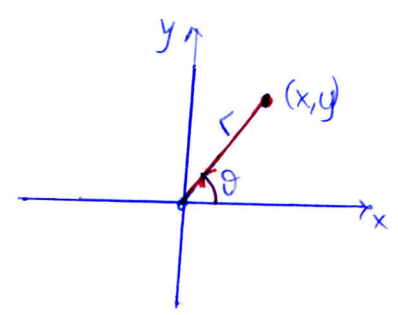
$$\int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(x)) g'(x) dx = \int_a^b f(t) dt \quad \begin{cases} (g' > 0) \\ (t = g(x)) \end{cases}$$



$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, (g' > 0)$ (Αλλαγή μεταβλητής $t = g(x)$)

Πολικός μετασχηματισμός
 $\vec{\tau}: [0, +\infty] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$$\vec{\tau}(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$$



$$\vec{J}_{\vec{\tau}}(r, \theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}$$

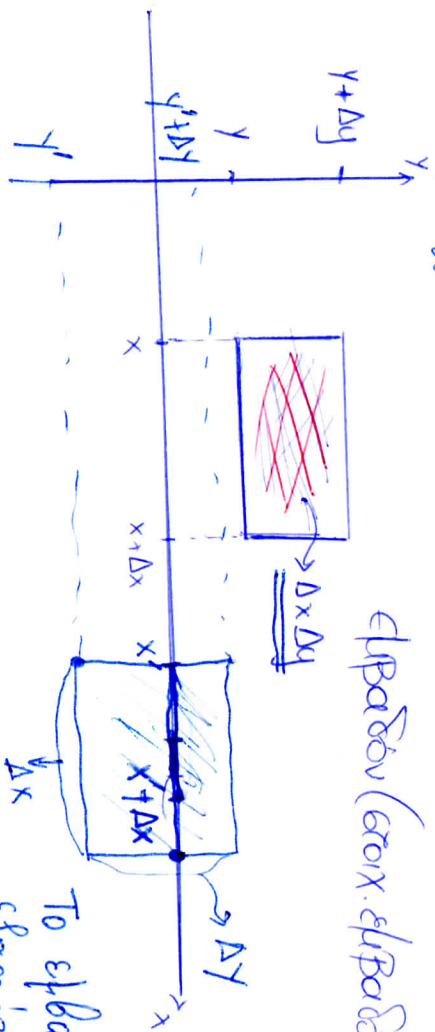
$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)}$ = ορίζεται ως $\vec{J}_{\vec{\tau}}(r, \theta)$

$$\boxed{\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = r}$$

$$\boxed{\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{\vec{\tau}^{-1}(D)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) \cdot r \cdot dr \cdot d\theta}$$

Τύπος αλλαγής συντεταγμένων
δισκού στο καρτεσιανό σύστημα
(από x-y σε r-θ)



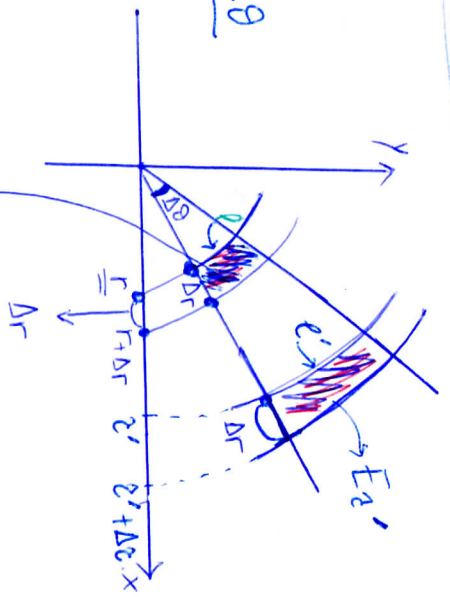


εμβαδόν (στον εμβαδόν) σε καρτ. συντελ.
 $\Delta x, \Delta y$ εμβαδ.

$$E = \frac{\Delta x \cdot \Delta y}{\Delta x \cdot \Delta y}$$

Το εμβαδόν είναι ορθογώνιο
 εμβαδόν από τα $\Delta x, \Delta y$
 και όχι από τις κορυφές
 του.

Κοιτάμε να $\Delta \epsilon, \Delta \theta$
 εναλλάξ

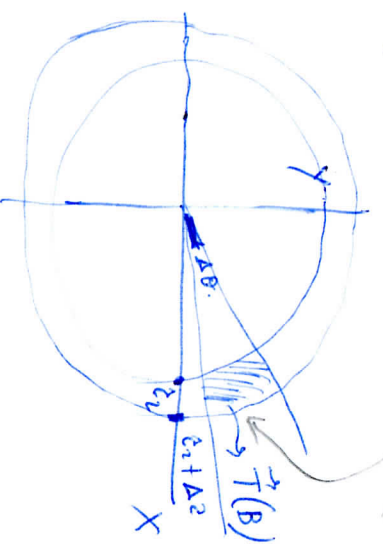
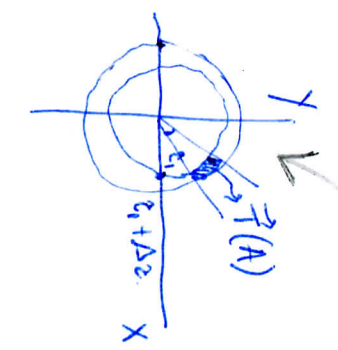


$$E_2 \approx (\Delta r) \cdot \Delta \theta = \Delta \epsilon \cdot \Delta \theta$$

Ενώ $E_2 \approx (\Delta \epsilon) \cdot \Delta \theta = (\Delta \epsilon) \cdot (\Delta \theta) = \Delta \epsilon \cdot \Delta \theta$.
 Παρατηρούμε ότι το "εναλλάξ", εμβαδόν κλειστών να $\Delta \epsilon, \Delta \theta$ εναλλάξ
 μετατρέπεται, ανάλογα με τις "κορυφές" του.



$$\vec{r}(x, y)$$



Περιεχόμενα

1	Ολοκληρώματα	1
1.1	Τριπλό Ολοκλήρωμα	1

Κεφάλαιο 1

Ολοκληρώματα

1.1 Τριπλό Ολοκλήρωμα

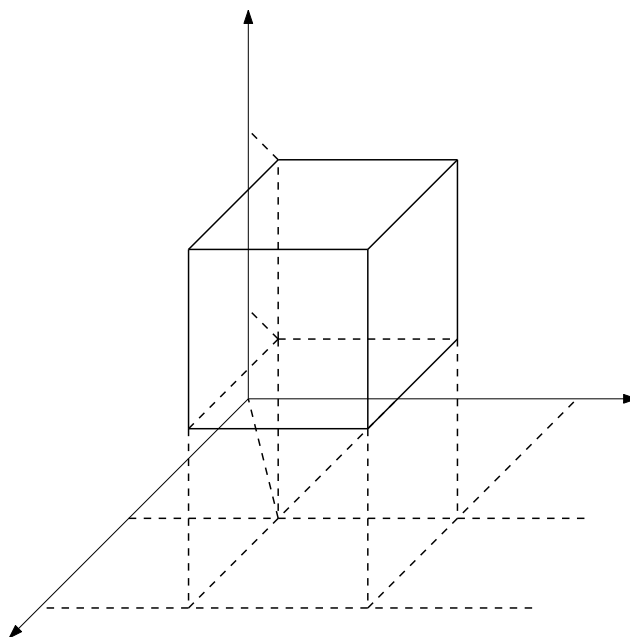
I. Πάνω σε ορθογώνιο του $\mathbb{R}^3$

Έστω

$$R = [\alpha_1, \beta_1] \times [\alpha_2, \beta_2] \times [\alpha_3, \beta_3]$$

ένα κλειστό ορθογώνιο (παραλληλεπίπεδο) του $\mathbb{R}^3$ και μία φραγμένη συνάρτηση :

$$f : R \longrightarrow \mathbb{R}$$



Το τριπλό ολοκλήρωμα πάνω στο ορθογώνιο $R \subseteq \mathbb{R}^3$ ορίζεται όπως ορίστηκε το διπλό ολοκλήρωμα πάνω σε ορθογώνιο του $\mathbb{R}^2$. Συγκεκριμένα θεωρούμε μία διαμέριση του R , ως εξής:

$$P = P_{\xi\eta\zeta} = \{R_{ijk} : i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, m, k = 1, 2, \dots, l\}$$

όπου

$$R_{ijk} = [\xi_{i-1}, \xi_i] \times [\eta_{j-1}, \eta_j] \times [\zeta_{k-1}, \zeta_k]$$

είναι τα ορθογώνια του $\mathbb{R}^3$, που ορίζονται από τις διαμερίσεις:

$$\begin{aligned} P_\xi &= \{\alpha_1 = \xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n = \beta_1\}, \quad \text{με } \xi_0 < \xi_1 < \dots < \xi_n, \\ P_\eta &= \{\alpha_2 = \eta_0, \eta_1, \dots, \eta_m = \beta_2\}, \quad \text{με } \eta_0 < \eta_1 < \dots < \eta_m, \\ P_\zeta &= \{\alpha_3 = \zeta_0, \zeta_1, \dots, \zeta_l = \beta_3\}, \quad \text{με } \zeta_0 < \zeta_1 < \dots < \zeta_l, \end{aligned}$$

των διαστημάτων $[\alpha_1, \beta_1]$, $[\alpha_2, \beta_2]$, $[\alpha_3, \beta_3]$ αντίστοιχα.

Η λεπτότητα $\lambda(P)$ της διαμέρισης P ορίζεται:

$$\lambda(P) = \max\{\rho(R_{ijk}) : i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, m, k = 1, 2, \dots, l\},$$

όπου

$$\rho(R_{ijk}) = \sqrt{(\xi_i - \xi_{i-1})^2 + (\eta_j - \eta_{j-1})^2 + (\zeta_k - \zeta_{k-1})^2}$$

είναι το μήκος της διαγωνίου του ορθογωνίου R_{ijk} .

Θεωρούμε μία φραγμένη συνάρτηση

$$f : R \longrightarrow \mathbb{R}$$

και για τη διαμέριση $P = P_{\xi\eta\zeta}$ ορίζουμε τα αθροίσματα:

$$\begin{aligned} U(f, P) &:= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^l M_{ijk} V(R_{ijk}) \quad : \text{άνω άθροισμα} \\ L(f, P) &:= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^l m_{ijk} V(R_{ijk}) \quad : \text{κάτω άθροισμα} \end{aligned}$$

όπου

$$\begin{aligned} M_{ijk} &= \sup\{f(x, y, z) : (x, y, z) \in R_{ijk}\} \\ m_{ijk} &= \inf\{f(x, y, z) : (x, y, z) \in R_{ijk}\} \\ V(R_{ijk}) &= (\xi_i - \xi_{i-1})(\eta_j - \eta_{j-1})(\zeta_k - \zeta_{k-1}) \quad : \text{όγκος του } R_{ijk}. \end{aligned}$$

Επίσης ορίζουμε

$$\begin{aligned}\int_R^- f d(V) &:= \inf_P U(f, P) && : \text{Άνω ολοκλήρωμα} \\ \int_{-R} f d(V) &:= \sup_P L(f, P) && : \text{Κάτω ολοκλήρωμα}\end{aligned}$$

Ορισμός

Η συνάρτηση f λέγεται ολοκληρώσιμη στο ορθογώνιο $R \subseteq \mathbb{R}^3$, όταν ισχύει

$$\int_R^- f d(V) = \int_{-R} f d(V) = \lambda$$

Ο αριθμός λ είναι το τριπλό ολοκλήρωμα της f στο ορθογώνιο R και συμβολίζεται

$$\int \int \int_R f(x, y, z) d(V) \text{ ή } \int \int \int_R f(x, y, z) dx dy dz.$$

Οι ιδιότητες των διπλών ολοκληρωμάτων (αλλά και των απλών) αποδεικνύεται ότι ισχύουν και εδώ.

Ο υπολογισμός ενός τριπλού ολοκληρώματος πάνω στο ορθογώνιο R του $\mathbb{R}^3$, γίνεται, όπως του διπλού ολοκληρώματος με τη βοήθεια των (τριπλών) διαδοχικών ολοκληρωμάτων.

Για τη συνάρτηση $f : R \rightarrow \mathbb{R}$, $R \subseteq \mathbb{R}^3$, υποθέτουμε ότι υπάρχουν τα διπλά διαδοχικά ολοκληρώματα:

$$\begin{aligned}F_{23}(x) &= \int_{\alpha_2}^{\beta_2} \int_{\alpha_3}^{\beta_3} f(x, y, z) dz dy, && x \in [\alpha_1, \beta_1] \\ F_{32}(x) &= \int_{\alpha_3}^{\beta_3} \int_{\alpha_2}^{\beta_2} f(x, y, z) dy dx, && x \in [\alpha_1, \beta_1] \\ F_{13}(y) &= \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \int_{\alpha_3}^{\beta_3} f(x, y, z) dz dx, && y \in [\alpha_2, \beta_2]\end{aligned}$$

κ.λ.π. (6 συνολικά συνδυασμοί).

Αν οι συναρτήσεις F_{23} , F_{32} , κ.λ.π. είναι ολοκληρώσιμες στα αντίστοιχα διαστήματα, τότε ορίζονται τα τριπλά διαδοχικά ολοκληρώματα. Π.χ.

$$\begin{aligned}\int_{\alpha_1}^{\beta_1} \int_{\alpha_2}^{\beta_2} \int_{\alpha_3}^{\beta_3} f(x, y, z) dz dy dx &= \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \left[\int_{\alpha_2}^{\beta_2} \int_{\alpha_3}^{\beta_3} f(x, y, z) dz dy \right] dx, \\ \int_{\alpha_2}^{\beta_2} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \int_{\alpha_3}^{\beta_3} f(x, y, z) dz dx dy &= \int_{\alpha_2}^{\beta_2} \left[\int_{\alpha_1}^{\beta_1} \int_{\alpha_3}^{\beta_3} f(x, y, z) dz dx \right] dy.\end{aligned}$$

Αποδεικνύεται το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα 1.1.1. Αν η $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής, τότε υπάρχει το τριπλό ολοκλήρωμα της f στο R και όλα τα τριπλά διαδοχικά ολοκληρώματα και ισχύει:

$$\begin{aligned} \int \int_R \int f(x, y, z) dx dy dz &= \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \int_{\alpha_2}^{\beta_2} \int_{\alpha_3}^{\beta_3} f(x, y, z) dz dy dx = \\ &= \int_{\alpha_2}^{\beta_2} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \int_{\alpha_3}^{\beta_3} f(x, y, z) dz dx dy = \\ &= \dots \end{aligned}$$

Παραδείγματα

1) Να υπολογίσετε το (τριπλό) διαδοχικό ολοκλήρωμα

$$I = \int_0^1 \int_1^2 \int_1^3 x z e^{y+z} dx dz dy$$

Λύση

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \int_1^2 \left[\frac{1}{2} x^2 z e^{y+z} \right]_1^3 dz dy = \\ &= \int_0^1 \int_1^2 4 z e^{y+z} dz dy = \\ &= 4 \int_0^1 [z e^{y+z} - e^{y+z}]_1^2 dy = \\ &= 4 \int_0^1 e^{y+2} dy = \\ &= 4 [e^{y+2}]_0^1 = \\ &= 4(e^3 - e^2). \end{aligned}$$

II. Πάνω σε φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^3$

Έστω $B \subseteq \mathbb{R}^3$, B : φραγμένο και $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ φραγμένη.

B : φραγμένο $\Rightarrow \exists$ κλειστό ορθογώνιο $R : B \subseteq R$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$\tilde{f}(x, y, z) = \begin{cases} f(x, y, z), & (x, y, z) \in B \\ 0, & (x, y, z) \in R - B \end{cases}$$

Ορισμός

Η συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη στο $B \Leftrightarrow \eta \tilde{f}$ είναι ολοκληρώσιμη στο R .

Αποδεικνύεται ότι

$$\int \int \int_R \tilde{f}(x, y, z) dx dy dz = \int \int_{R_1} \int \tilde{f}(x, y, z) dx dy dz$$

$\forall$ κλειστό ορθογώνιο $R_1 : B \subseteq R_1$, δηλαδή το ολοκλήρωμα της $\tilde{f}$ είναι ανεξάρτητο του R (αρκεί να περιέχει το B).

Ορίζουμε:

Τριπλό ολοκλήρωμα της f στο B :

$$\int \int \int_B f(x, y, z) dx dy dz = \int \int \int_R \tilde{f}(x, y, z) dx dy dz$$

Όγκος V του B :

$$V(B) = \int \int \int_B dx dy dz$$

Απλά σύνολα

Έστω $B \subseteq \mathbb{R}^3$:

$$B : xy - \text{απλό} \Leftrightarrow$$

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D, \omega_1(x, y) \leq z \leq \omega_2(x, y)\},$$

όπου $D : x - \text{απλό} \subseteq \mathbb{R}^2$, $\omega_1, \omega_2 : D \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχείς.

Δηλαδή

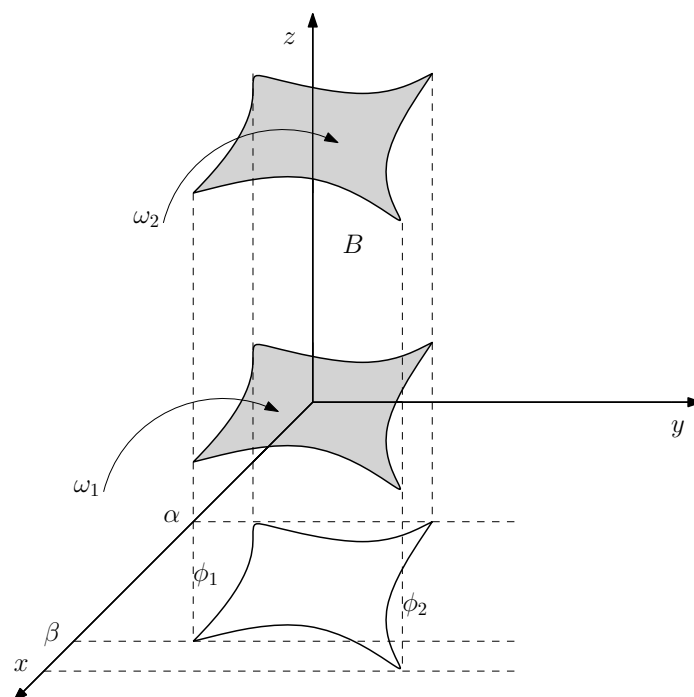
$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :$$

$$\alpha \leq x \leq \beta, \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x), \omega_1(x, y) \leq z \leq \omega_2(x, y)\},$$

$$\phi_1, \phi_2 : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R} \text{ συνεχείς.}$$

Ανάλογα ορίζονται τα σύνολα: $yx - \text{απλό}$, $xz - \text{απλό}$, $\dots$.

Το $B \subseteq \mathbb{R}^3$ λέγεται απλό σύνολο αν είναι συγχρόνως: $xy - \text{απλό}$, $xz - \text{απλό}$, $\dots$, π.χ. η σφαίρα.



Θεώρημα 1.1.2. (Fubini) Έστω $f : B \rightarrow \mathbb{R}$, $B \subseteq \mathbb{R}^3$, συνεχής και φραγμένη. Αν B είναι xy -απλό, τότε υπάρχει το τριπλό ολοκλήρωμα $\int \int_B \int f(x, y, z) dx dy dz$ και ισχύει:

$$\int \int_B \int f(x, y, z) dx dy dz = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} \int_{\omega_1(x, y)}^{\omega_2(x, y)} f(x, y, z) dz dy dx$$

Ομοίως, αν το B είναι xz -απλό, τότε

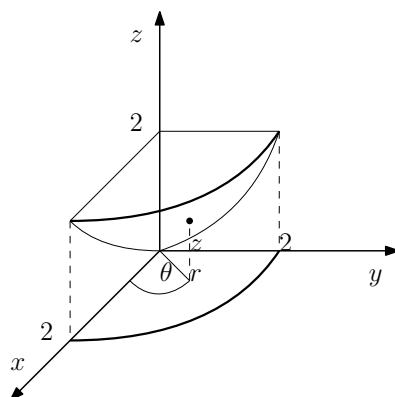
Ασκήσεις

1) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $I = \int \int_B \int (x^2 + y^2) dx dy dz$, όπου B είναι το στερεό που περιβάλλεται από την επιφάνεια $x^2 + y^2 = 2z$ (παραβολοειδές) και το επίπεδο $z = 2$.

Λύση

Τομή των επιφανειών:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2z \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = 4.$$



Χρησιμοποιούμε κυλινδρικές συντεταγμένες:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = 2 \end{cases}$$

Εξίσωση παραβολοειδούς: $r^2 = 2z$

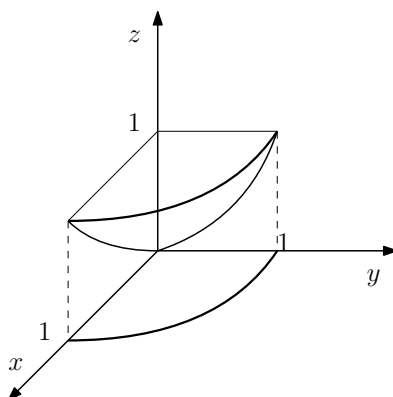
$$\begin{cases} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq r \leq 2 \\ \frac{r^2}{2} \leq z \leq 2 \end{cases}$$

Επομένως:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_{\frac{r^2}{2}}^2 r^2 r dz dr d\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \left(2r^3 - \frac{r^5}{2} \right) dr d\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{2r^4}{4} - \frac{r^6}{12} \right]_0^2 d\theta = \\ &= \frac{16\pi}{3}. \end{aligned}$$

2) Να υπολογιστεί ο όγκος του στερεού Β, που περιβάλλεται από το επίπεδο $z = 0$, το παραβολοειδές $z = x^2 + y^2$ και τον κύλινδρο $x^2 + y^2 = 1$.

Λύση



Αν B_1 είναι το μέρος του στερεού B που βρίσκεται στην πρώτη στερεά γωνία, τότε: $V(B) = 4V(B_1)$, όπου $V(B_1) = \int \int_{B_1} \int dx dy dz$.

Εφαρμόζουμε τον κυλινδρικό μετασχηματισμό και έχουμε:

$$\begin{aligned} V(B_1) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \int_0^{r^2} r dz dr d\theta = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 r^3 dr d\theta = \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \\ &= \frac{\pi}{8}. \end{aligned}$$

$$\text{Άρα } V(B) = 4 * \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2}.$$

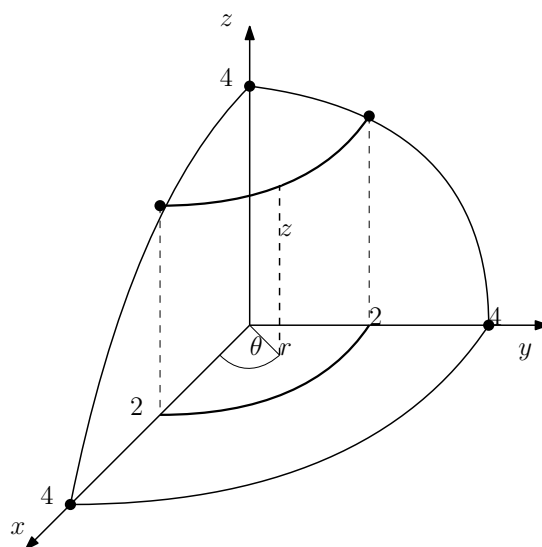
3) Να βρεθεί ο όγκος του στερεού B που βρίσκεται μέσα στη σφαίρα $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ και μέσα στον κύλινδρο $x^2 + y^2 = 4$.

Λύση

Αν B_1 είναι το μέρος του στερεού B που περιέχεται στην πρώτη στερεά γωνία, τότε: $V(B) = 8V(B_1)$.

Σε κυλινδρικές συντεταγμένες οι εξισώσεις των επιφανειών είναι:

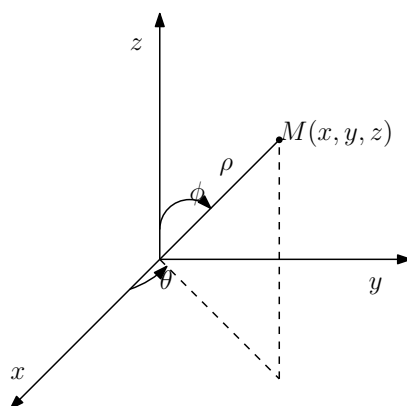
$$\begin{cases} z = \sqrt{16 - r^2} : & \text{σφαίρας} \\ r = 2 : & \text{κύλινδρου} \end{cases}$$



Είναι

$$\begin{aligned}
 V(B_1) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 \int_0^{\sqrt{16-r^2}} r dz dr d\theta = \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 r \sqrt{16-r^2} dr d\theta = \\
 &= -\frac{1}{2} \frac{2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[(16-r^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^2 d\theta = \\
 &= \frac{\pi}{6} \left(16^{\frac{3}{2}} - 12^{\frac{3}{2}} \right).
 \end{aligned}$$

Σφαιρικός μετασχηματισμός



$$\vec{T} : \begin{cases} x = \rho \cos \theta \sin \phi, & 0 \leq \theta < 2\pi \\ y = \rho \sin \theta \sin \phi, & 0 \leq \phi < \pi \\ z = \rho \cos \phi, & 0 \leq \rho < \infty \end{cases}$$

$f : B \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ ολοκλ.

$\vec{T} : G \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \vec{T}(G) = B$ σφαιρικός μετασχηματισμός

$$\det(J\vec{T}(\rho, \theta, \phi)) = -\rho^2 \sin \phi$$

$$\begin{aligned} \int \int_B \int f(x, y, z) dx dy dz &= \\ \int \int_G \int f(\rho \cos \theta \sin \phi, \rho \sin \theta \sin \phi, \rho \cos \phi) \rho^2 \sin \phi d\rho d\theta d\phi &= \\ V(B) = \int \int_G \int \rho^2 \sin \phi d\rho d\theta d\phi &= \end{aligned}$$

Όγκος ελλειψοειδούς: $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = 1, \alpha, \beta, \gamma > 0$.

$$\begin{cases} x = \alpha \rho \cos \theta \sin \phi \\ y = \alpha \rho \sin \theta \sin \phi \\ z = \alpha \rho \cos \phi \end{cases} \Rightarrow$$

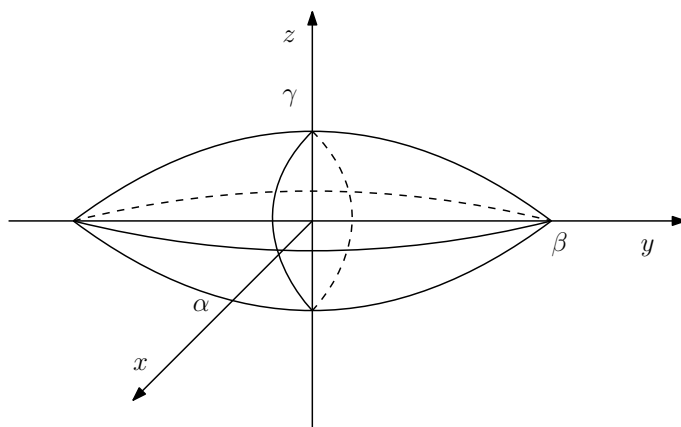
$$\begin{cases} J\vec{T}(\rho, \theta, \phi) = -\alpha\beta\gamma\rho^2 \sin \phi \\ V(B) = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^1 \rho^2 \sin \phi \alpha\beta\gamma d\rho d\phi d\theta = \frac{4}{3}\pi\alpha\beta\gamma \end{cases}$$

4) Να υπολογιστεί ο όγκος του ελλειψοειδούς $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = 1$.

Λύση

Εφαρμόζουμε το μετασχηματισμό:

$$\begin{cases} x = \alpha \rho \cos \theta \sin \phi, & 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ y = \beta \rho \sin \theta \sin \phi, & 0 \leq \phi \leq \pi \\ z = \gamma \rho \cos \phi, & 0 \leq \rho \leq 1 \end{cases}$$



Η εξίσωση του ελλειψοειδούς γίνεται $\rho = 1$ και η ορίζουσα του μετασχηματισμού:

$$\left| \det \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, \phi)} \right| = \alpha\beta\gamma\rho^2 \sin \phi$$

$$V(B) = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^1 \alpha\beta\gamma\rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta = \dots = \frac{4}{3}\pi\alpha\beta\gamma.$$

Περιεχόμενα

1	Ολοκληρώματα	1
1.1	Διπλό Ολοκλήρωμα	1

Κεφάλαιο 1

Ολοκληρώματα

1.1 Διπλό Ολοκλήρωμα

I. Πάνω σε ορθογώνιο

Έστω

$$f : R = [\alpha, \beta] \times [\gamma, \delta] \longrightarrow \mathbb{R}$$

μία φραγμένη συνάρτηση στο ορθογώνιο R . Ορίζουμε μία διαμέριση του ορθογωνίου R , ως εξής:

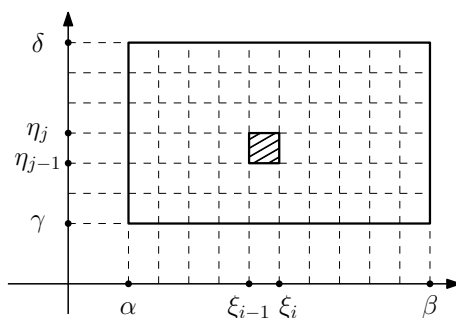
$$Px = \{\alpha, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}, \beta\}, \quad \text{με } \alpha = \xi_0 < \xi_1 < \dots < \xi_{n-1} < \xi_n = \beta$$

$$Py = \{\gamma, n_1, n_2, \dots, n_{m-1}, \delta\}, \quad \text{με } \gamma = n_0 < n_1 < \dots < n_{m-1} < n_m = \delta$$

διαμερίσεις των διαστημάτων $[\alpha, \beta]$, $[\gamma, \delta]$, αντίστοιχα, δηλαδή

$$[\alpha, \beta] = \bigcup_{i=1}^n [\xi_{i-1}, \xi_i], \quad [\gamma, \delta] = \bigcup_{j=1}^m [n_{j-1}, n_j]$$

Το σύνολο



$$\{R_{ij} : 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\},$$

όπου

$$R_{ij} = [\xi_{i-1}, \xi_i] \times [n_{j-1}, n_j]$$

είναι μία διαμέριση του ορθογωνίου R .

Έστω

$$A(R_{ij}) : \text{το εμβαδόν του } R_{ij} = (\xi_i - \xi_{i-1})(n_j - n_{j-1})$$

και

$$M_{ij} = \sup_{R_{ij}} f(x, y), \quad m_{ij} = \inf_{R_{ij}} f(x, y)$$

Αν P μία τυχούσα διαμέριση του R , ορίζουμε:

$$U(f, P) := \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m M_{ij} A(R_{ij}) \quad : \text{άνω άθροισμα}$$

$$L(f, P) := \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m m_{ij} A(R_{ij}) \quad : \text{κάτω άθροισμα}$$

Επίσης ορίζουμε (αποδεικνύεται ότι υπάρχουν)

$$\int_R^- f d(A) := \inf_P U(f, P) \quad : \text{άνω ολοκλήρωμα της } f \text{ στο } R.$$

$$\int_{-R} f d(A) := \sup_P L(f, P) \quad : \text{κάτω ολοκλήρωμα της } f \text{ στο } R.$$

Ορισμός

Η f θα λέγεται ολοκληρώσιμη στο ορθογώνιο R , όταν

$$\int_R^- f d(A) = \int_{-R} f d(A)$$

Ο αριθμός $\int_R^- f d(A) = \int_{-R} f d(A)$ λέγεται διπλό ολοκλήρωμα της f στο R και συμβολίζεται

$$\int \int_R f d(A) \text{ ή } \int \int_R f(x, y) dx dy$$

Ιδιότητες του διπλού ολοκληρώματος

Έχει τις ίδιες ιδιότητες με το (απλό) ορισμένο ολοκλήρωμα.

π.χ.

ι.

$$\begin{aligned} & \int \int_D (\lambda_1 f_1(x, y) + \lambda_2 f_2(x, y)) dx dy = \\ & = \lambda_1 \int \int_D f_1(x, y) dx dy + \lambda_2 \int \int_D f_2(x, y) dx dy \end{aligned}$$

ii.

$$\left| \int \int_D f(x, y) dx dy \right| \leq \int \int_D |f(x, y)| dx dy$$

Αν $D = \cup_{k=1}^{\ell} D_k$, D_k : κλ. ορθ., ανά δύο δεν έχουν κοινά εσωτερικά σημεία, τότε

$$\int \int_D f(x, y) dx dy = \sum_{k=1}^{\ell} \int \int_{D_k} f(x, y) dx dy$$

Διαδοχικά ολοκληρώματα

Ορίζονται ως

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} \int_{\gamma}^{\delta} f(x, y) dy dx &= \int_{\alpha}^{\beta} \left[\int_{\gamma}^{\delta} f(x, y) dy \right] dx \\ \int_{\gamma}^{\delta} \int_{\alpha}^{\beta} f(x, y) dx dy &= \int_{\gamma}^{\delta} \left[\int_{\alpha}^{\beta} f(x, y) dx \right] dy \end{aligned}$$

με την υπόθεση ότι υπάρχουν τα επιμέρους (απλά) ορισμένα ολοκληρώματα.

Θεώρημα 1.1.1. Έστω

$$f : D = [\alpha, \beta] \times [\gamma, \delta] \longrightarrow \mathbb{R} \text{ συνεχής}$$

τότε υπάρχουν: $\int \int_D f(x, y) dx dy$, $\int_{\alpha}^{\beta} \int_{\gamma}^{\delta} f(x, y) dy dx$, $\int_{\gamma}^{\delta} \int_{\alpha}^{\beta} f(x, y) dx dy$ και είναι ίσα.

II. Σε φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$

Έστω

$$f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

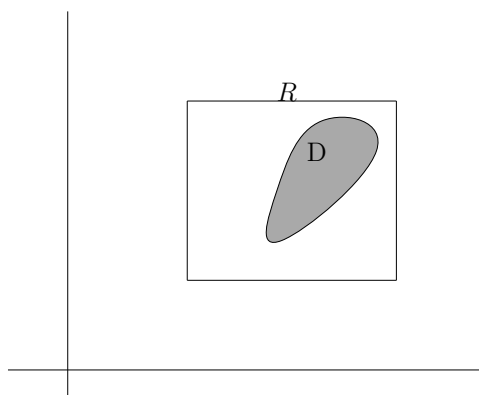
φραγμένη συνάρτηση, ορισμένη στο φραγμένο σύνολο $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Έστω R κλειστό ορθογώνιο του $\mathbb{R}^2$ τέτοιο ώστε $D \subseteq R$ (το R υπάρχει, αφού D φραγμένο). Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$\bar{f} : R \longrightarrow \mathbb{R}$$

όπου

$$\bar{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & (x, y) \in D \\ 0, & (x, y) \in R - D \end{cases}$$

δηλαδή η $\bar{f}$ είναι μία επέκταση της f στο R , προφανώς φραγμένη.

**Ορισμός**

Η συνάρτηση f λέγεται ολοκληρώσιμη στο D όταν η $\bar{f}$ είναι ολοκληρώσιμη στο R και ορίζουμε

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_R \bar{f}(x, y) dx dy$$

Αποδεικνύεται ότι το ολοκλήρωμα $\iint_D f(x, y) dx dy$ είναι ανεξάρτητο από το ορθογώνιο R .

Θεώρημα 1.1.2. Αν η $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής, τότε είναι ολοκληρώσιμη στο R .

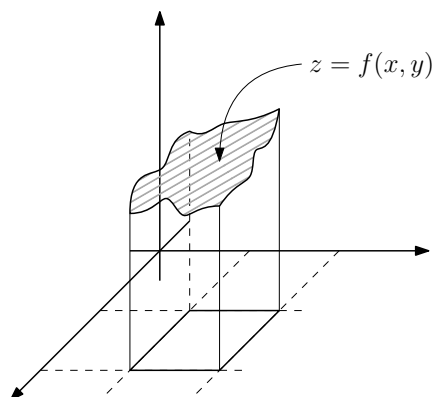
Το διπλό ολοκλήρωμα παριστάνει γεωμετρικά τα εξής:

$$(i) \iint_R dx dy = \text{εμβαδόν του } R$$

$$(ii) \iint_R f(x, y) dx dy = \text{όγκος του στερεού } \Sigma(f, R), \text{ όπου } \Sigma(f, R) \text{ είναι το στερεό:}$$

Παραδείγματα

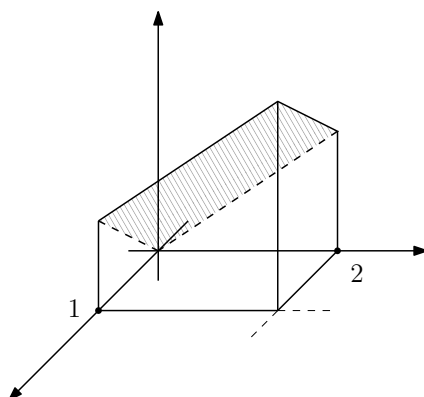
$$1) D = [0, 1] \times [2, 3], f(x, y) = x^2 y + y \cos(\pi x)$$



$$\begin{aligned}
 \int \int_D f(x, y) dx dy &= \int_0^1 \int_2^3 (x^2 y + y^3 \cos(\pi x)) dx dy = \\
 &= \int_0^1 \left[x^2 \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{4} \cos(\pi x) \right]_2^3 dx = \\
 &= \int_0^1 \left(\frac{5}{2} x^2 + \frac{65}{4} \cos(\pi x) \right) dx = \\
 &= \left[\frac{5}{6} x^3 - \frac{65}{4\pi} \cos(\pi x) \right]_0^1 = \\
 &= \frac{5}{6}
 \end{aligned}$$

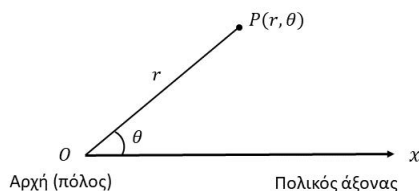
2) Να βρεθεί ο όγκος του στερεού $\Sigma(f, R)$, όπου $D = [0, 1] \times [0, 2]$, $f(x, y) = x + y$

$$\begin{aligned}
 V &= \int \int_D f(x, y) dx dy = \int_0^1 \int_0^2 (x + y) dy dx = \int_0^1 \left[xy + \frac{y^2}{2} \right]_0^2 dx = \\
 &= \int_0^1 (2x + 2) dx = [x^2 + 2x]_0^1 = 3.
 \end{aligned}$$



Πολικές Συντεταγμένες

Έστω O ο πόλος. Με αφετηρία το O σχεδιάζουμε τον πολικό άξονα, κατά αντιστοιχία με τον θετικό ημιάξονα x στις Καρτεσιανές συντεταγμένες. Ένα τυχαίο σημείο P του επιπέδου μπορεί να περιγραφεί από ένα ζεύγος πολικών συντεταγμένων (r, θ) , όπου το r δείχνει την κατευθυνόμενη απόσταση του P από το O και το θ δείχνει την κατευθυνόμενη γωνία του $\overrightarrow{OP}$ με τον πολικό άξονα ($\theta > 0$ όταν διαγράφεται αριστερόστροφα και $\theta < 0$ όταν διαγράφεται δεξιόστροφα).



Συσχετισμός πολικών και καρτεσιανών συντεταγμένων

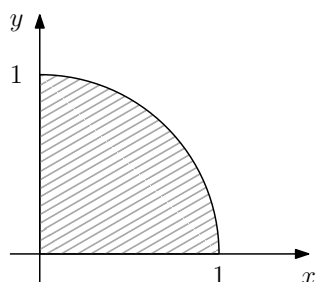
$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad x^2 + y^2 = r^2, \quad \frac{y}{x} = \tan \theta$$

Ασκήσεις

1) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $I = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} (x^2 + y^2) dx dy$

Λύση

$$D : 0 \leq y \leq 1, \quad 0 \leq x \leq \sqrt{1-y^2}$$



Εφαρμόζουμε τον πολικό μετασχηματισμό:

$$\vec{T}: \begin{cases} x = r \cos \theta, & 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ y = r \sin \theta, & 0 \leq r \leq 1. \end{cases}$$

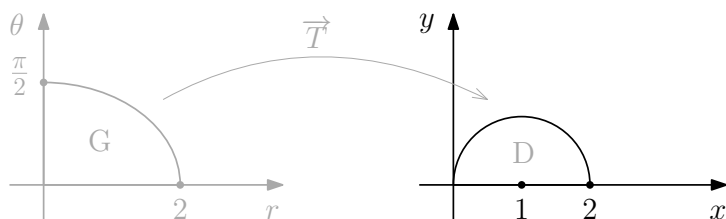
$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 r^2 r dr d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^1 d\theta = \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{\pi}{8}.$$

2) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $I = \int_2^0 \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} \sqrt{x^2+y^2} dy dx$

Λύση

$$D: 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq \sqrt{2x-x^2}$$

$$\text{Αν } y = \sqrt{2x-x^2} \Rightarrow (x-1)^2 + y^2 = 1$$



Εφαρμόζουμε τον πολικό μετασχηματισμό:

$$\vec{T}: \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

Η εξίσωση του ημικυκλίου σε πολικές συντεταγμένες είναι: $r^2 = 2r \cos \theta$, δηλαδή $r = 2 \cos \theta$.

Άρα $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ και $0 \leq r \leq 2 \cos \theta$.

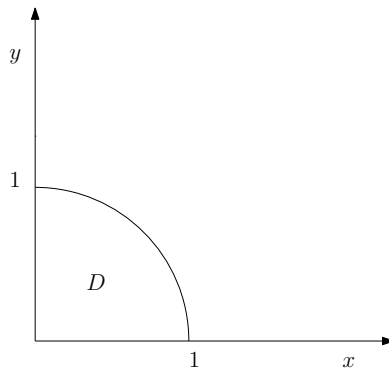
$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\cos\theta} r r dr d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [r^3]_0^{2\cos\theta} d\theta = \frac{8}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta d\theta = \\
&= \frac{8}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta(1 - \sin^2\theta) d\theta = \frac{8}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta d\theta - \frac{8}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta d\sin\theta = \\
&= \left[\frac{8}{3} \sin\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[\frac{8}{3} \frac{\sin^3\theta}{3} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{8}{3} - \frac{8}{9} = \frac{16}{9}.
\end{aligned}$$

3) Να υπολογιστεί το διπλό ολοκλήρωμα: $\int \int_D \sqrt{1-x^2} dx dy$, όπου $D = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$ που βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο και περιέχεται μεταξύ των αξόνων Ox , Oy και της περιφέρειας του κύκλου $x^2 + y^2 = 1$.

Λύση

Παρατηρούμε ότι το D είναι απλό σύνολο, δηλαδή

$$\begin{aligned}
D &= \{(x, y) : x \in [0, 1] \text{ και } 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\} = \\
&= \{(x, y) : y \in [0, 1] \text{ και } 0 \leq x \leq \sqrt{1-y^2}\}
\end{aligned}$$



Έτσι έχουμε:

$$\begin{aligned}
\int \int_D \sqrt{1-x^2} dx dy &= \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2} dy dx = \\
&= \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \sqrt{1-x^2} dx dy
\end{aligned}$$

Το πρώτο διαδοχικό ολοκλήρωμα υπολογίζεται ευκολότερα ως εξής:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2} dy dx &= \int_0^1 [\sqrt{1-x^2} y]_0^{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^1 (1-x^2) dx = \\
&= \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

Σημείωση:

Ο υπολογισμός του ολοκληρώματος $\int \sqrt{1-x^2} dx$ μπορεί να γίνει εάν εφαρμόσουμε το μετασχηματισμό: $x = \frac{2t}{t^2+1}$, $t \in (-1, 1)$ ή $x = \sin t$.

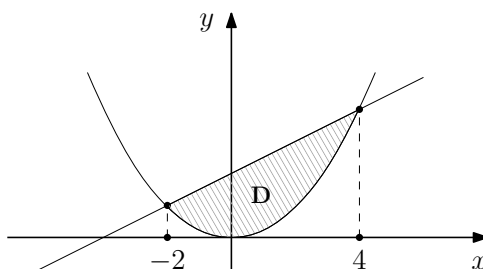
Θεώρημα 1.1.3. Έστω

$f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ συνεχής στο D (x -απλό) ή υπάρχουν πεπερασμένα σημεία ασυνέχειας,

τότε υπάρχουν τα: $\int \int_D f(x, y) dx dy$, $\int_{\alpha}^{\beta} \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y) dy dx$ και είναι ίσα.

Εφαρμογή

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int \int_D x \cos y dx dy$, όπου D είναι το υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ που βρίσκεται μεταξύ της παραβολής $y = \frac{x^2}{4}$ και της ευθείας $x - 2y + 4 = 0$.



Το D είναι x -απλό:

$$D = \{(x, y) : x \in [-2, 4] \text{ και } \frac{x^2}{4} \leq y \leq \frac{x}{2} + 2\}$$

$$\begin{aligned} \int \int_D x \cos y dx dy &= \int_{-2}^4 \int_{\frac{x^2}{4}}^{\frac{x}{2}+2} x \cos y dy dx = \int_{-2}^4 [x \sin y]_{\frac{x^2}{4}}^{\frac{x}{2}+2} dx = \\ &= \int_{-2}^4 \left[x \sin\left(\frac{x}{2} + 2\right) - x \sin \frac{x^2}{4} \right] dx \end{aligned}$$

Ασκήσεις

1) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $I = \int \int_D \frac{x+y}{x^2+y^2} dx dy$, όπου

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq \alpha^2, x^2 + y^2 \leq \beta^2, y \geq 0\}$$

Λύση

Εφαρμόζουμε τον πολικό μετασχηματισμό:

$$\vec{T} : \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

Από

$$x^2 + y^2 \geq \alpha^2 \Rightarrow r^2 \geq \alpha^2 \Rightarrow r \geq \alpha$$

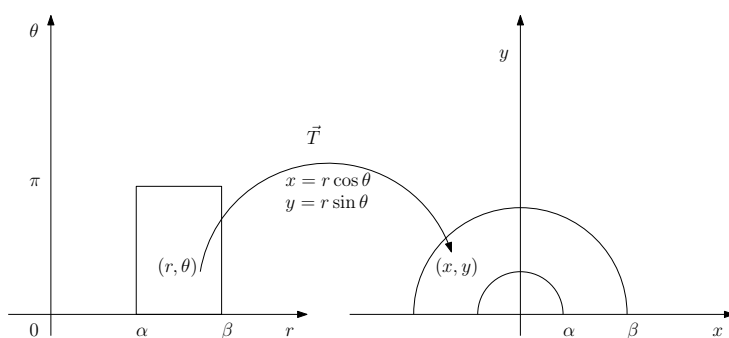
$$x^2 + y^2 \leq \beta^2 \Rightarrow r^2 \leq \beta^2 \Rightarrow r \leq \beta$$

Άρα

$$\alpha \leq r \leq \beta .$$

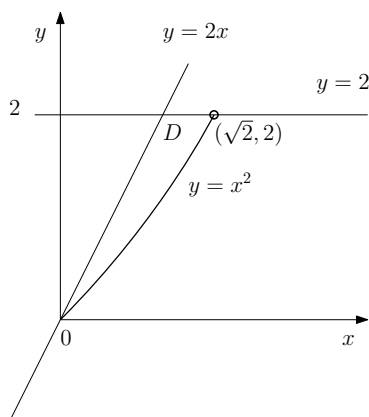
Από

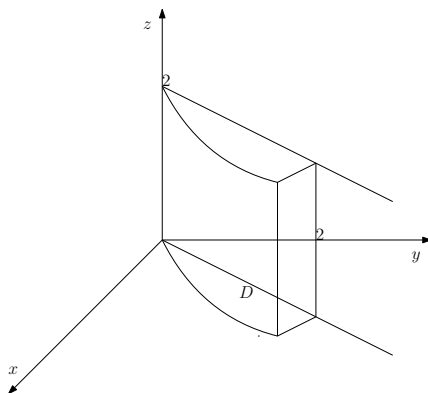
$$y \geq 0 \Rightarrow r \sin \theta \geq 0 \Rightarrow 0 \leq \theta \leq \pi .$$



$$\begin{aligned} \int \int_D \frac{x+y}{x^2+y^2} dx dy &= \int_0^\pi \int_\alpha^\beta \frac{r \cos \theta + r \sin \theta}{r^2} r dr d\theta = \\ &= \int_0^\pi \int_\alpha^\beta (\cos \theta + \sin \theta) dr d\theta = 2(\beta - \alpha) \end{aligned}$$

2) Να βρεθεί το εμβαδόν $A(D)$ του συνόλου D που περικλείεται από την παραβολή $y = x^2$ και τις ευθείες $y = 2$, $y = 2x$. Επίσης, να υπολογισθεί ο όγκος του στερεού $\Sigma(f, D)$ όπου $f(x, y) = 2 - \frac{3x+4y}{6}$.





Το σύνολο D είναι y -απλό:

$$D = \{(x, y) : y \in [0, 2] \text{ και } \frac{y}{2} \leq x \leq \sqrt{y}\}$$

$$\begin{aligned} A(D) &= \int \int_D dx dy = \int_0^2 \int_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{y}} dx dy = \int_0^2 \left(\sqrt{y} - \frac{y}{2} \right) dy = \\ &= \left[\frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}} - \frac{y^2}{4} \right]_0^2 = \frac{4\sqrt{2}}{3} - 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V &= \int_D \int \left[2 - \frac{3x+4y}{6} \right] dx dy = \int_0^2 \int_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{y}} \left(2 - \frac{3x+4y}{6} \right) dx dy = \\ &= \int_0^2 \left[2x - \frac{x^2}{4} - \frac{2y}{3} x \right]_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{y}} dy = \\ &= \int_0^2 \left(2\sqrt{y} - \frac{y}{4} - \frac{2y^{\frac{3}{2}}}{3} - y + \frac{y^2}{16} + \frac{y^2}{3} \right) dy = \frac{56\sqrt{2}}{15} - \frac{26}{3}. \end{aligned}$$

3) Να υπολογιστεί το εμβαδόν του συνόλου $D \subseteq \mathbb{R}^2$ που περιβάλλεται από τις καμπύλες με εξισώσεις:

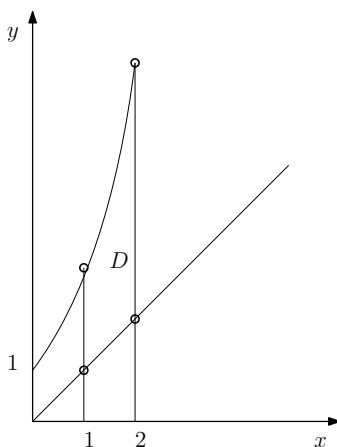
$$y = e^x, \quad y = x, \quad x = 1, \quad x = 2.$$

Επίσης, να υπολογιστεί και ο όγκος του στερεού $\Sigma(f, D)$, όπου $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x, y) = x + y + 1$.

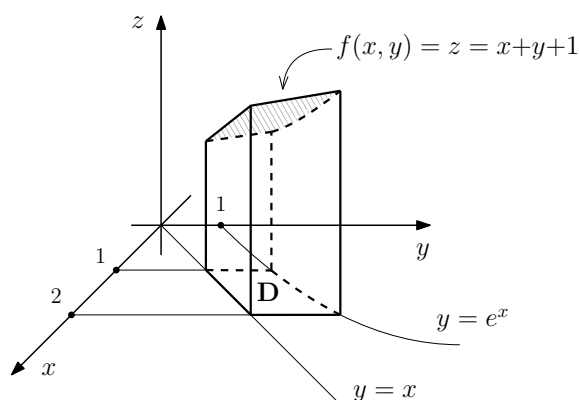
Λύση

Το σύνολο D είναι x -απλό:

$$D = \{(x, y) : 1 \leq x \leq 2, x \leq y \leq e^x\}.$$



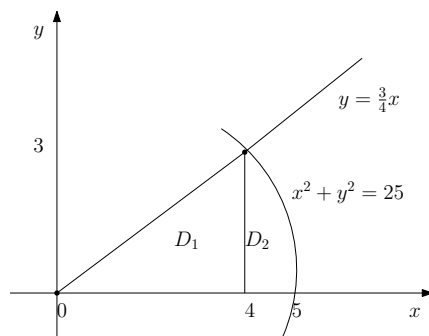
$$\begin{aligned} A(D) &= \iint_D dx dy = \int_1^2 \int_x^{e^x} dy dx = \int_1^2 (e^x - x) dx = \\ &= \left[e^x - \frac{x^2}{2} \right]_1^2 = e^2 - e - \frac{3}{2} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} V &= \iint_D (x + y + 1) dx dy = \int_1^2 \int_x^{e^x} (x + y + 1) dy dx = \\ &= \int_1^2 \left[xy + \frac{y^2}{2} + y \right]_x^{e^x} dx = \int_1^2 (xe^x + e^x + \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{3}{2}x^2 - x) dx = \\ &= \dots = \frac{e^4 + 7e^2}{4} - e - 5 \end{aligned}$$

4) Να υπολογιστεί το διπλό ολοκλήρωμα $I = \iint_D x dx dy$ όπου :

$$D = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 25, -3x + 4y \leq 0\}.$$

Λύση

Το σύνολο D είναι y -απλό:

$$D = \{(x, y) : 0 \leq y \leq 3, \frac{4}{3}y \leq x \leq \sqrt{25 - y^2}\}.$$

$$\begin{aligned} \iint_D x dx dy &= \int_0^3 \int_{\frac{4}{3}y}^{\sqrt{25-y^2}} x dx dy = \frac{1}{2} \int_0^3 [x^2]_{\frac{4}{3}y}^{\sqrt{25-y^2}} dy = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^3 (25 - y^2 - \frac{16}{9}y^2) dy = \frac{1}{2} \left[25y - \frac{25}{9} \frac{y^3}{3} \right]_0^3 = \\ &= \frac{1}{2} (75 - 25) = 25. \end{aligned}$$

Άλλος τρόπος

Το D είναι και στοιχειώδες σύνολο: $D = D_1 \cup D_2$, όπου

$$D_1 = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq \frac{3}{4}x\},$$

$$D_2 = \{(x, y) : 4 \leq x \leq 5, 0 \leq y \leq \sqrt{25 - x^2}\} \text{ και } x - \text{απλό}.$$

Έτσι:

$$\begin{aligned} \iint_D x dx dy &= \iint_{D_1} x dx dy + \iint_{D_2} x dx dy = \\ &= \int_0^4 \int_0^{\frac{3}{4}x} x dy dx + \int_4^5 \int_0^{\sqrt{25-x^2}} x dy dx = \\ &= \dots = 16 + 9 = 25. \end{aligned}$$

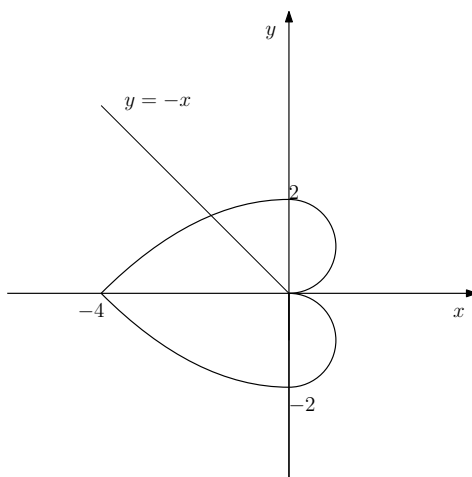
5) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $I = \iint_D y dx dy$ όπου D είναι η καρδιοειδής $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 2\sqrt{x^2 + y^2} - 2x\}$.

ΛύσηΓια $y = 0$:

$$x^2 + 2x \pm 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x(x+4) = 0 \\ x^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = -4$$

Για $x = 0$:

$$y^2 = \pm 2y \Leftrightarrow \begin{cases} y(y+2) = 0 \\ y(y-2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = 0 \text{ ή } y = -2 \text{ ή } y = 2$$



Εφαρμόζουμε τον πολικό μετασχηματισμό:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta, & 0 \leq \theta \leq \frac{3}{4}\pi \\ y = r \sin \theta, & 0 \leq r \leq 2(1 - \cos \theta) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{3}{4}\pi} \int_0^{2(1-\cos\theta)} r^2 \sin \theta dr d\theta = \frac{8}{3} \int_0^{\frac{3}{4}\pi} (1 - \cos \theta)^3 d(1 - \cos \theta) = \\ &= \frac{8}{3} \left[\frac{(1 - \cos \theta)^4}{4} \right]_0^{\frac{3}{4}\pi} = \frac{8}{3 \cdot 4} \left[\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^4 \right] = \frac{2}{3} \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^4 \end{aligned}$$

Λημνίσκος: $(x^2 + y^2)^2 = 2(x^2 - y^2)$

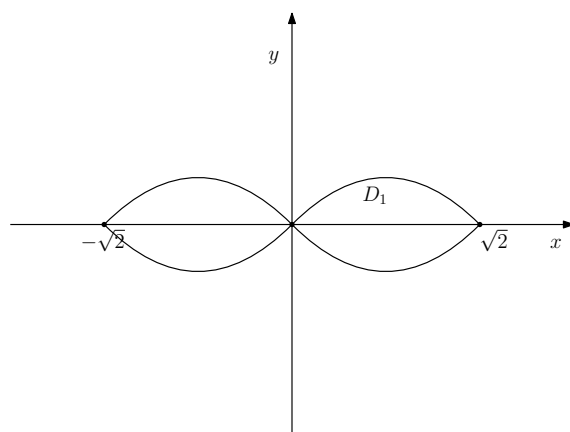
Εφαρμόζουμε τον πολικό μετασχηματισμό:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \Rightarrow$$

$$r^4 = 2r(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \Rightarrow r^2 = 2 \cos 2\theta$$

Για $y = 0$:

$$x^4 = 2x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{2} \end{cases}$$



$$A(D) = 4A(D_1)$$

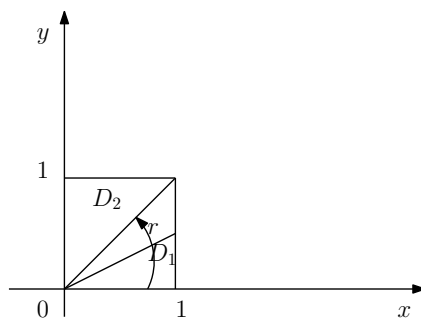
$$A(D_1) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\sqrt{2 \cos 2\theta}} r dr d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2 \cos 2\theta d\theta = \frac{1}{2} [\sin 2\theta]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}.$$

$$A(D) = 2$$

$$x^2 \geq y^2 \Rightarrow \tan \theta \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$$

6) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $I = \iint_D (1 + x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}} dx dy$
όπου D είναι το τετράγωνο: $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$.

Λύση



$$D = D_1 \cup D_2$$

$$I = I_1 + I_2 = \int \int_{D_1} (1 + x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}} dx dy + \int \int_{D_2} (1 + x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}} dx dy$$

$$D_1 : \begin{cases} x = r \cos \theta, & 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \\ x = r \sin \theta, & 0 \leq r \leq \frac{1}{\cos \theta} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{1}{\cos \theta}} (1 + r^2)^{-\frac{3}{2}} r dr d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\frac{1}{-\frac{1}{2}} (1 + r^2)^{-\frac{1}{2}} \right]_0^{\frac{1}{\cos \theta}} d\theta = \\ &= - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\left(1 + \frac{1}{\cos^2 \theta} \right)^{-\frac{1}{2}} - 1 \right] d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[1 - \frac{\cos \theta}{\sqrt{2 - \sin^2 \theta}} d\theta \right] = \\ &= \frac{\pi}{4} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d \sin \theta}{\sqrt{2 - \sin^2 \theta}} = \frac{\pi}{4} - \left[\arcsin \frac{\sin \theta}{\sqrt{2}} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \\ &= \frac{\pi}{4} - \arcsin \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2}} + \arcsin 0 = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{1}{\sin \theta}} (1 + r^2)^{-\frac{3}{2}} r dr d\theta = \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{-\frac{1}{2}} (1 + r^2)^{-\frac{1}{2}} \right]_0^{\frac{1}{\sin \theta}} d\theta = \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left[1 - \frac{\sin \theta}{(1 + \sin^2 \theta)^{\frac{1}{2}}} \right] d\theta = \frac{\pi}{4} + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d \cos \theta}{\sqrt{2 - \cos^2 \theta}} = \\ &= \frac{\pi}{4} + \left[\arcsin \frac{\cos \theta}{\sqrt{2}} \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12} \end{aligned}$$

Άρα

$$I = I_1 + I_2 = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{12} \Leftrightarrow I = \frac{\pi}{6}$$

7) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $I = \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$

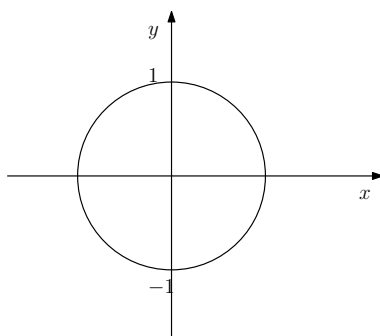
Λύση

Είναι

$$\begin{cases} -1 \leq y \leq 1 \\ -\sqrt{1-y^2} \leq x \leq \sqrt{1-y^2} \Rightarrow x^2 \leq 1-y^2 \Rightarrow x^2 + y^2 \leq 1 \end{cases}$$

Εφαρμόζουμε τον πολικό μετασχηματισμό:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$



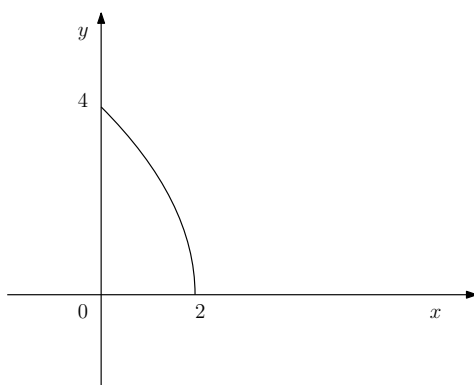
Άρα

$$x^2 + y^2 \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq r \leq 1 \text{ και } 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 e^{-r^2} r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \left[-\frac{1}{2} e^{-r^2} \right]_0^1 d\theta = \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (e^{-1} - 1) d\theta = \frac{1 - e^{-1}}{2} 2\pi = \pi \left(1 - \frac{1}{e}\right) \end{aligned}$$

8) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $I = \int_0^2 \int_0^{4-x^2} \frac{x e^{2y}}{4-y} dy dx$

Λύση



Είναι

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq y \leq 4 - x^2 \\ y = -x^2 + 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq y \leq 4 \\ 0 \leq x \leq \sqrt{4-y} \end{cases}$$

Άρα

$$\begin{aligned} I &= \int_0^4 \int_0^{\sqrt{4-y}} \frac{e^{2y}}{4-y} x dx dy = \int_0^4 \left[\frac{e^{2y}}{4-y} \frac{x^2}{2} \right]_0^{\sqrt{4-y}} dy = \\ &= \int_0^4 \frac{e^{2y}(4-y)}{2(4-y)} dy = \frac{1}{4} [e^{2y}]_0^4 = \frac{1}{4} (e^{8y} - 1) \end{aligned}$$

9) Υπολογίστε το εμβαδόν του επιπέδου χωρίου που βρίσκεται στο εσωτερικό του Λημνίσκου: $(x^2 + y^2)^2 = \alpha(x^2 - y^2)$

Λύση

Εφαρμόζουμε τον πολικό μετασχηματισμό:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \Rightarrow r^4 = \alpha^2 r^2 \cos 2\theta \Rightarrow r^2 = \alpha^2 \cos 2\theta$$

Είναι

$$A(D) = 4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\alpha \sqrt{\cos 2\theta}} r dr d\theta = 2\alpha^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\theta d\theta = \alpha^2 [\sin 2\theta]_0^{\frac{\pi}{4}} = \alpha^2.$$

10) Να αποδείξετε ότι ισχύει: $\frac{4}{3} \leq \int_D e^{xy} dx dy \leq \frac{4}{3} e^2$, όπου

$$D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 + x^2\}.$$

Λύση

Είναι

$$\begin{aligned} \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 + x^2 \end{cases} &\Rightarrow 0 \leq xy \leq 1 + x^2 \Rightarrow e^0 \leq e^{xy} \leq e^{1+x^2} \xrightarrow{x \leq 1} \\ &\Rightarrow e^0 \leq e^{xy} \leq e^2 \Rightarrow 1 \leq e^{xy} \leq e^2 \end{aligned}$$

Είναι

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^{1+x^2} e^{xy} dy dx &\geq \int_0^1 \int_0^{1+x^2} dy dx = \int_0^1 \int_0^{1+x^2} dy dx = \int_0^1 [y]_0^{1+x^2} dx = \\ &= \int_0^1 (1+x^2) dx = \left[x + \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Και

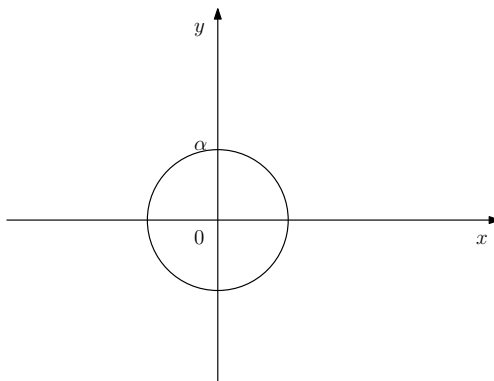
$$\begin{aligned}\int_0^1 \int_0^{1+x^2} e^{xy} dy dx &\leq \int_0^1 \int_0^{1+x^2} e^2 dy dx = \int_0^1 \int_0^{1+x^2} e^2 dy dx = \\ &= \int_0^1 e^2 [y]_0^{1+x^2} dx = \\ &= \int_0^1 e^2 (1+x^2) dx = \\ &= e^2 \left[x + \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = e^2 \frac{4}{3}\end{aligned}$$

Δηλαδή

$$\frac{4}{3} \leq \int \int_D e^{xy} dx dy \leq \frac{4}{3} e^2$$

11) Να υπολογίσετε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα :

$$I = \int_0^\alpha \int_0^{\sqrt{\alpha^2 - y^2}} (\alpha^2 - y^2)^{\frac{3}{2}} dy dx$$



Υπολογίζεται με αλλαγή τάξης ολοκλήρωσης

Αν x -απλό τότε υπολογίζεται δύσκολα.

Αν y -απλό τότε :

$$D = \{(x, y) : 0 \leq y \leq \alpha, 0 \leq x \leq \sqrt{\alpha^2 - y^2}\}.$$

Είναι

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\alpha \int_0^{\sqrt{\alpha^2-y^2}} (\alpha^2 - y^2)^{\frac{3}{2}} dx dy = \int_0^\alpha \left[x (\alpha^2 - y^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^{\sqrt{\alpha^2-y^2}} dy = \\ &= \int_0^\alpha (\alpha^2 - y^2)^2 dy = \\ &= \int_0^\alpha (\alpha^4 + y^4 - 2\alpha^2 y^2) dy = \\ &= \left[\alpha^4 y + \frac{y^5}{5} - \frac{2}{3} \alpha^2 y^3 \right]_0^\alpha = \\ &= \alpha^5 + \frac{\alpha^5}{5} - \frac{2}{3} \alpha^5 = \\ &= \frac{8\alpha^5}{15}. \end{aligned}$$

Εύρητα 3 (συνέχεια)

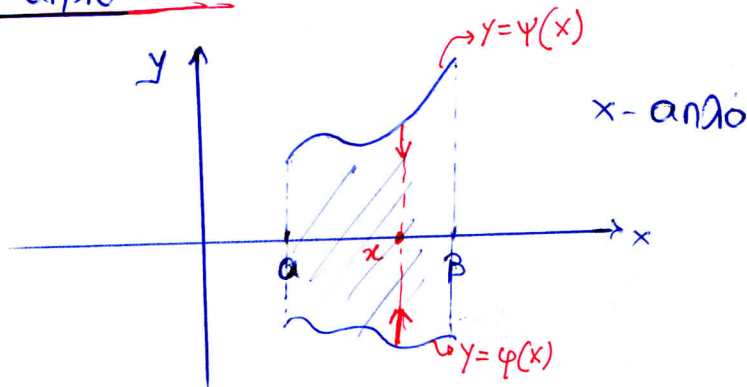
Διηγό ολουήραμα

$$D \subseteq \mathbb{R}^2$$

i) $D = \{(x, y) : a \leq x \leq b, \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$

$\varphi, \psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχείς

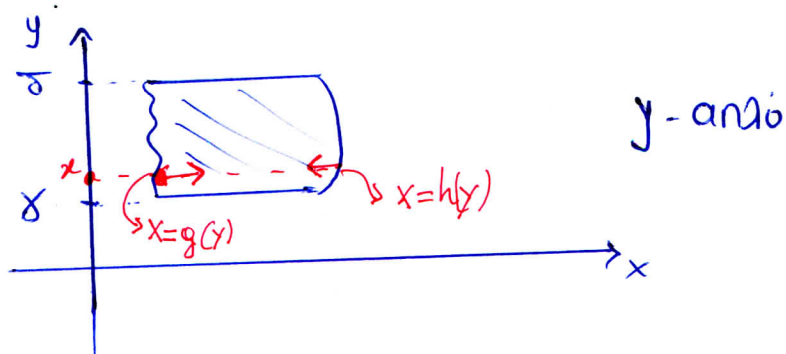
x-ανλό



ii) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \delta \leq y \leq \delta, g(y) \leq x \leq h(y)\}$

$g, h : [\delta, \delta] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχείς

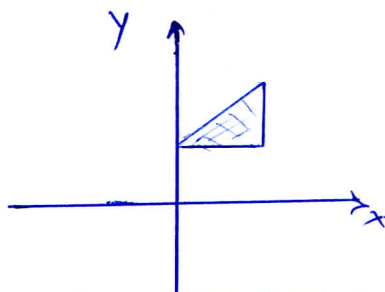
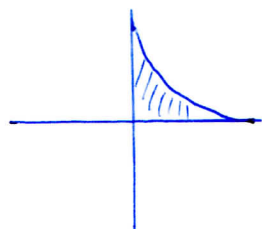
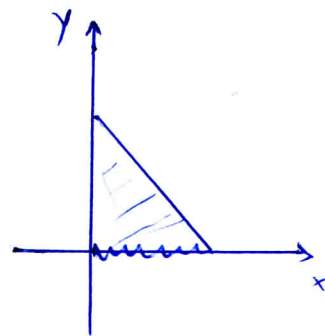
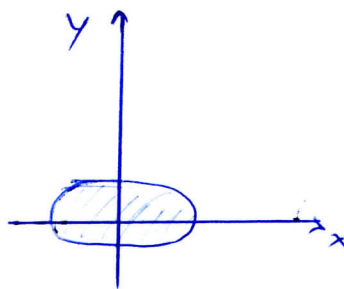
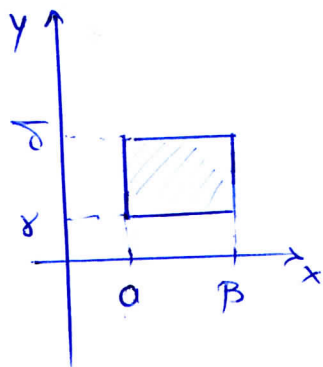
y-ανλό



iii) D είναι x και y ανλό

D ανλό





Αντίστροφα



'0x1 x-αδλ0
'0x1 y-αδλ0

Θ. Fubini

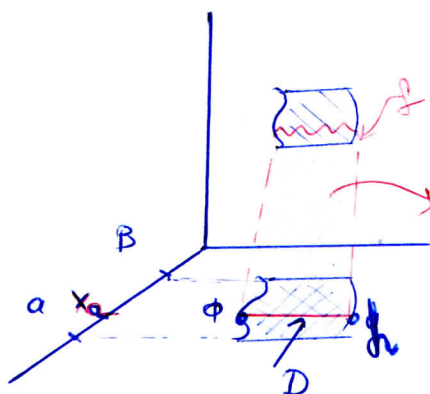
$f: D \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής

i) D x-αντίστροφα
$$\int_D f(x,y) dx dy = \int_a^β \left(\int_{\phi(x)}^{y(x)} f(x,y) dy \right) dx$$

ii) D y-αντίστροφα

$$\int_D f(x,y) dx dy = \int_\alpha^\delta \left(\int_{g(y)}^{h(y)} f(x,y) dx \right) dy$$

✓ $f=1$, $\int_D 1 dx dy = \text{εμβαδόν του } D$



B_{x_0}
 $\phi(x_0)$ $y(x_0)$

$$\int_{\phi(x_0)}^{y(x_0)} f(x_0, y) dy = \text{εμβαδόν } B(x_0)$$



$$f \geq 0, \quad \mathcal{I}(f, D) = \{(x, y, z) : (x, y) \in D, 0 \leq z \leq f(x, y)\}$$

$$V(\mathcal{I}(f, D)) = \iint_D f(x, y) dx dy$$

όγκος
στερεώ

$$f=1, \quad V(\mathcal{I}(f, D)) = A(D)$$

Άσκηση:

$$1) \quad I = \iint_B (e^x \sin y + x \sin y) dx dy, \quad B = [1, 2] \times [0, \pi/2]$$

$$I = \int_0^{\pi/2} \left(\int_1^2 (e^x \sin y + x \sin y) dx \right) dy = \int_1^2 \left(\int_0^{\pi/2} (e^x \sin y + x \sin y) dy \right) dx$$

$$I = \int_0^{\pi/2} \left(e^x \sin y + \frac{x^2}{2} \sin y \right) \Big|_{x=1}^2 dy$$

$$I = \int_0^{\pi/2} \left((e^2 - e) \sin y + \frac{3}{2} \sin y \right) dy = \left(e^2 - e + \frac{3}{2} \right) \int_0^{\pi/2} \sin y dy$$

$$I = \left(e^2 - e + \frac{3}{2} \right) \left(-\cos y \Big|_0^{\pi/2} \right)$$

$$I = e^2 - e + 3/2$$



$$2) I = \int_1^2 \int_0^{2x} (6x + 6y + 6) \, dx \, dy$$

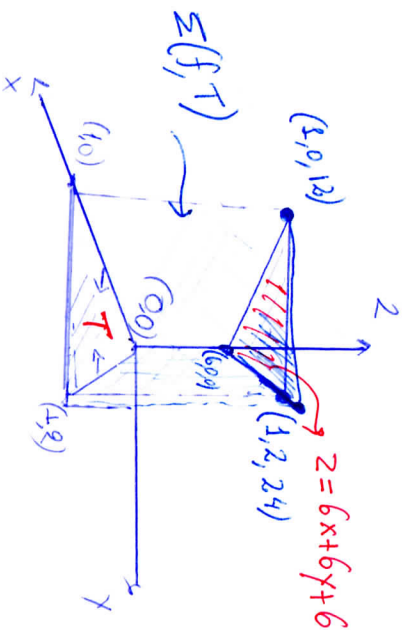
$$T = \{ (x, y) : 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 2x \} \quad \underline{\underline{x - axis}}$$

$$I = 6 \int_0^1 \left(\int_0^{2x} (x + y + 1) \, dy \right) dx$$

$$I = 6 \int_0^1 \left(xy + \frac{y^2}{2} + y \right) \bigg|_{y=0}^{2x} dx$$

$$I = 6 \int_0^1 \left(2x^2 + \frac{(2x)^2}{2} + 2x \right) dx$$

$$I = 6 \int_0^1 (4x^2 + 2x) \, dx = 6 \left[\frac{4}{3} x^3 + x^2 \right]_{x=0}^1 = 6 \left(\frac{4}{3} + 1 \right) = 14$$



$$V \left(\int_1^2 \int_0^{2x} (6x + 6y + 6) \, dx \, dy \right) = 14$$



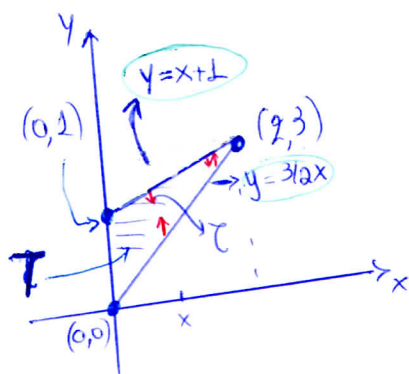
-172-

Ορίζουμε ως μάζα του D το $M = \iint_D \delta(x,y) dx dy$ όπου

$\delta(x,y)$ = πυκνότητα μάζας στο (x,y) / Συμ 2) υπολογίζουμε
 ως βάρος του τριγωνικού ηλ.
 T με πυκνότητα $\delta(x,y) = 6x + 6y$.

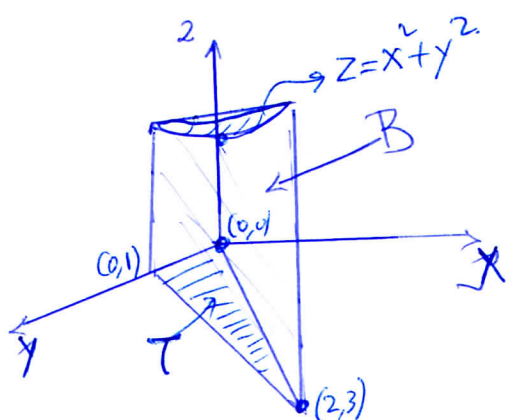
3) $I = \int_T \int (x^2 + y^2) dx dy$

T τρίγωνο με κορυφές $A(0,0)$, $B(0,1)$, $\Gamma(2,3)$



$$T = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 2, \frac{3}{2}x \leq y \leq x+1\}$$

$$I = \int_0^2 \left(\int_{\frac{3}{2}x}^{x+1} (x^2 + y^2) dy \right) dx = \dots = 17/6$$



$$z = x^2 + y^2$$

$$V(B) = \int_T \int (x^2 + y^2) dx dy$$

Άλλες διακρίσεις της 3)

Να υπολογιστεί ο όγκος του B .

$$B = \{(x,y,z) : (x,y) \in T, 0 \leq z \leq x^2 + y^2 = f(x,y)\}$$

ή μάζα του T με $\delta(x,y) = x^2 + y^2$



4) $I = \int_D \int_D xy \, dx \, dy$

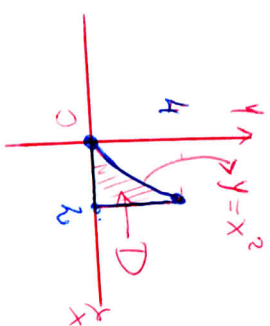
1) περιβάλλον από την $y=x^2, x=2, y=0$.

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq x^2\}$

Προσέχουμε το σημείο που ορίζεται από την συνάρτηση $y=x^2$

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 4, \sqrt{y} \leq x \leq 2\}$

$y=0$ and $y=4$



$I = \int_0^2 \left(\int_0^{x^2} xy \, dy \right) dx = \dots = \frac{16}{3}$

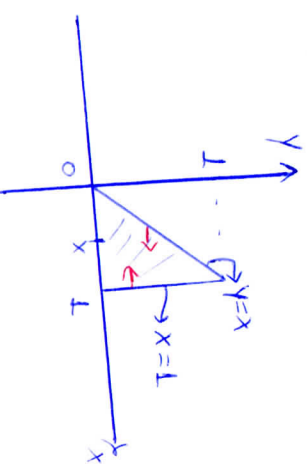
Αλλαγή της σειράς ολοκλήρωσης

(τα ην υπολογίζαμε πριν)

4) $I = \int_0^1 \left(\int_y^2 e^{-x^2} dx \right) dy$

$D = \{(x,y) : 0 \leq y \leq 1, y \leq x \leq 2\}$

$= \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$



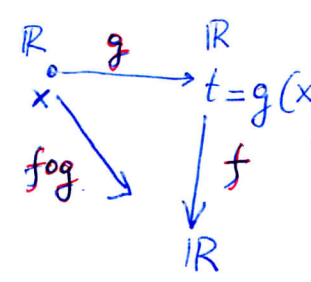
$I = \int_0^1 \left(\int_0^x e^{-x^2} dy \right) dx = \int_0^1 x \cdot e^{-x^2} dx = \left[-\frac{1}{2} e^{-x^2} \right]_0^1 = -\frac{1}{2} (1 - e^{-1})$

* $\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 e^{-x^2} dx$ Δεν υπολογίζεται, δηλ. δεν υπάρχει ολοκλήρωση
 * $\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 x^n dx$ εύκολα υπολογίζεται $f(x) = e^{-x^2}$ (βλ. και αντιστροφή Taylor)
 $g(x) = x^n$

2) $I = \int_0^1 \left(\int_y^1 n f(x^2) dx \right) dy = \int_0^1 \left(\int_0^x n f(x^2) dy \right) dx =$
 $= \int_0^1 \left(\int_0^x n f(x^2) dy \right) dx = \int_0^1 x \cdot n f(x^2) dx = \left[-\frac{1}{2} 6n(x^2) \right]_0^1 = \frac{1}{2} (1 - 6n)$

Αλλαγή συντεταγμένων στο $\mathbb{R}^2$

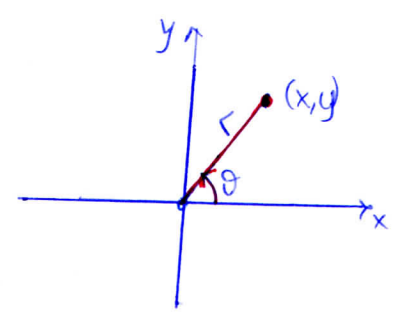
$$\int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(x)) g'(x) dx = \int_a^b f(t) dt \quad \begin{cases} (g' > 0) \\ (t = g(x)) \end{cases}$$



$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, (g' > 0)$ (Αλλαγή μεταβλητής $t = g(x)$)

Πολικός μετασχηματισμός
 $\vec{\tau}: [0, +\infty] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$$\vec{\tau}(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$$



$$\vec{J}_{\vec{\tau}}(r, \theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}$$

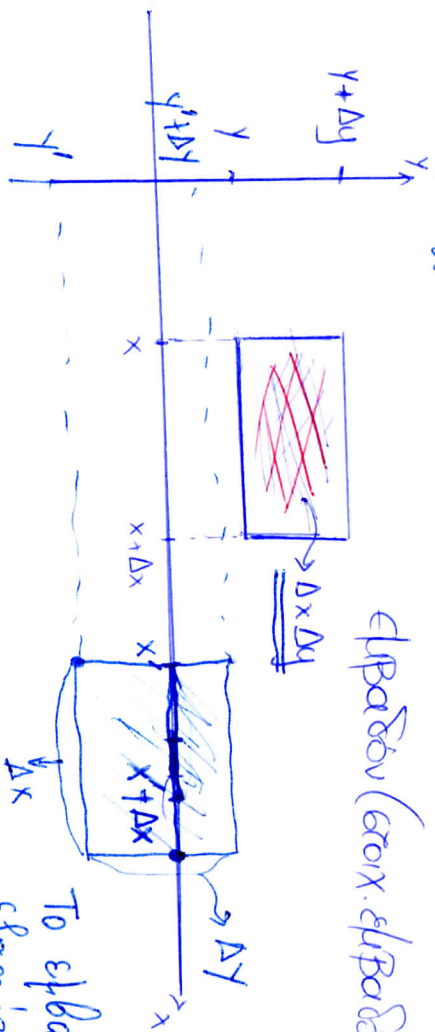
$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)}$ = ορίζεται ως $\vec{J}_{\vec{\tau}}(r, \theta)$

$$\boxed{\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = r}$$

$$\boxed{\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{\vec{\tau}^{-1}(D)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) \cdot r \cdot dr \cdot d\theta}$$

Τύπος αλλαγής συντεταγμένων
δισκού στο καρτεσιανό σύστημα
(από x-y σε r-θ)



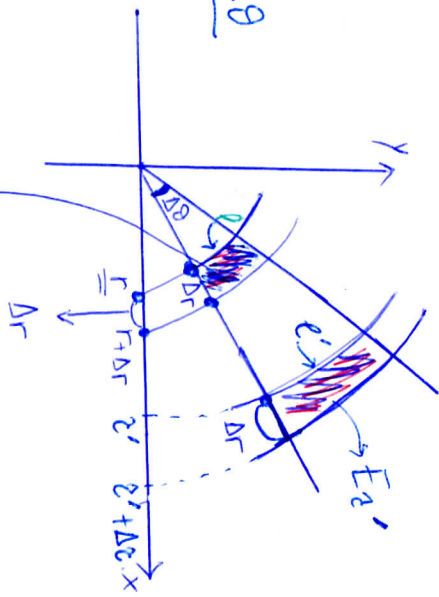


εμβαδόν (στον εμβαδόν) σε καρτ. συντελ.
 $\Delta x, \Delta y$ εμβαδ.

$$E = \frac{\Delta x \cdot \Delta y}{\Delta x \cdot \Delta y}$$

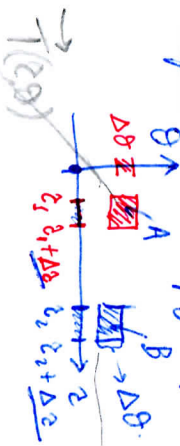
Το εμβαδόν είναι ορθογώνιο
 εμβαδόν από τα $\Delta x, \Delta y$
 και όχι από τις κορυφές
 του.

Κοιτάμε να $\Delta \epsilon, \Delta \theta$
 εναλλάξ

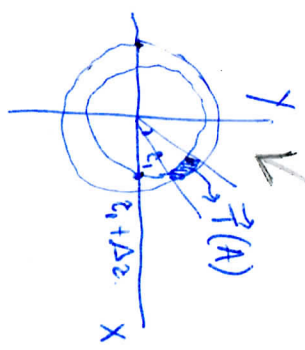


$$E_2 \approx (\Delta r) \cdot \Delta \theta = \Delta \epsilon \cdot \Delta \theta$$

Ενώ $E_2 \approx (\Delta \epsilon) \cdot \Delta \theta = (\Delta \epsilon) \cdot (\Delta \theta) = \Delta \epsilon \cdot \Delta \theta$.
 Παρατηρούμε ότι οι "βελανιδιές", εμβαδόν κρατώντας να $\Delta \epsilon, \Delta \theta$ εναλλάξ
 μεταβλητά, ανάλογα με τις "κορυφές" τους.

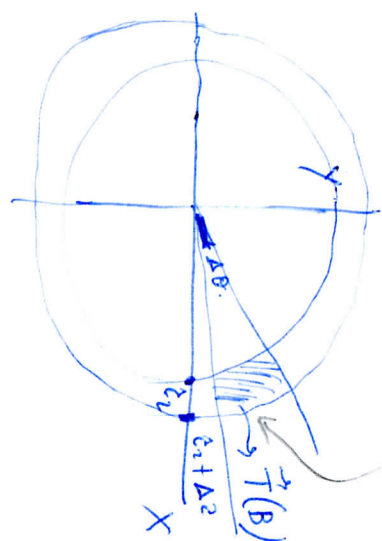


$$\vec{r}(\epsilon, \theta)$$



$$\vec{r}(A)$$

$$\vec{r}(B)$$



Διηλεκτά ολοκληρώματα

Ολοκληρώματα πάνω από ορθογώνιο χωρίο:

$$\text{Αν } R = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d \}$$

και η $f: R \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής, τότε

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy$$

(Θεώρημα Fubini)

Παράδειγμα 1

$$\text{Αν } R = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2, \quad -1 \leq y \leq 1 \},$$

τότε

$$\iint_R (1 - 6x^2y) dx dy = \int_{-1}^1 \left[\int_0^2 (1 - 6x^2y) dx \right] dy$$

$$= \int_{-1}^1 \left[x - 2x^3y \right]_{x=0}^2 dy = \int_{-1}^1 (2 - 16y) dy$$

$$= \left[2y - 8y^2 \right]_{-1}^1 = 2 - 8 + 2 + 8 = 4$$

Επαληθεύστε ότι το αποτέλεσμα θα ήταν

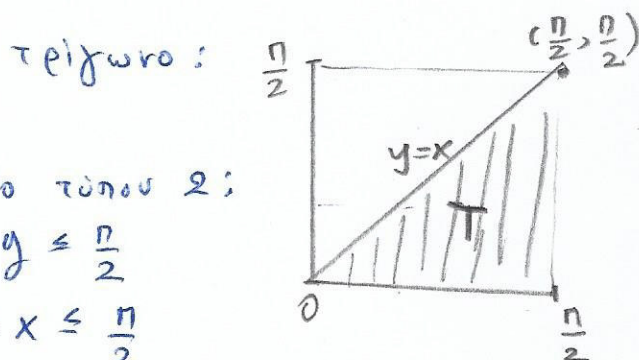
το ίδιο, αν ολοκληρώναμε πρώτα ως προς y
και μετά ως προς x .

Ολοκλήρωμα ορισμένο σε 1η ορθογώνιο χωρίο

Παράδειγμα 2

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I = \iint_T (x^3 y + \cos x) dx dy, \quad \text{όπου } T \text{ το}$$



Το T εκφράζεται
 ως χωρίο τύπου 1: $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$
 $0 \leq y \leq x$ ή ως χωρίο τύπου 2:
 $0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$
 $y \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

Επιλέγοντας την πρώτη έκφραση, έχουμε:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^x (x^3 y + \cos x) dy \right) dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{x^3 y^2}{2} + y \cos x \right]_{y=0}^x dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{x^5}{2} + x \cos x \right) dx \stackrel{*}{=} \left[\frac{x^6}{12} + x \sin x + \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi^6}{64 \cdot 12} + \frac{\pi}{2} - 1 \end{aligned}$$

* Είπαμε με ολοκλήρωση κατά μέρη: $\int x \cos x dx = \int x (\sin x)' dx = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x$

Παράδειγμα 3

Βρείτε τον όγκο του τετραέδρου που φράσσεται από τα επίπεδα $y=0$, $z=0$, $x=0$ και

$$y - x + z = 1.$$

Λύση

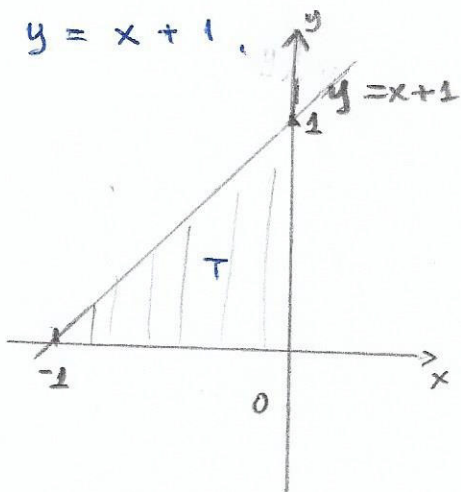
Ο ζητούμενος όγκος δίνεται από το ολοκλήρωμα της συνάρτησης $f(x,y) = x - y + 1$

(της οποίας το γράφημα είναι το επίπεδο $P: y - x + z = 1$)

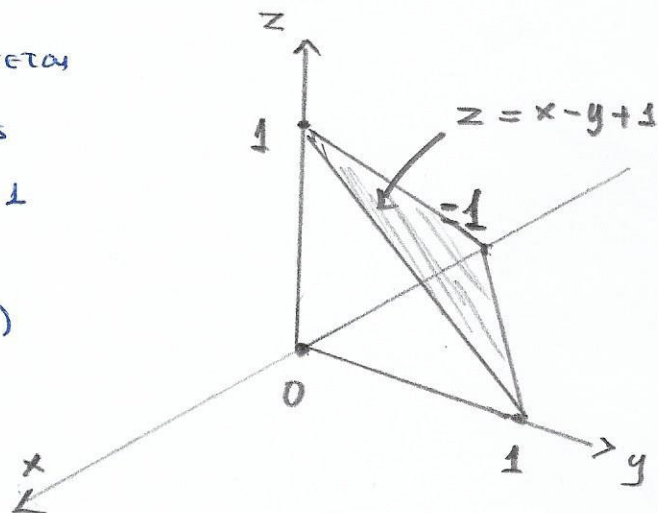
πάρω από το χωρίο T που ορίζεται από τους άξονες x 'ς και y 'ς και την τομή του επιπέδου P με το xy επίπεδο:

Για $z=0$ έχουμε

$$y = x + 1.$$



$$T: \begin{aligned} -1 &\leq x \leq 0 \\ 0 &\leq y \leq x+1 \end{aligned}$$

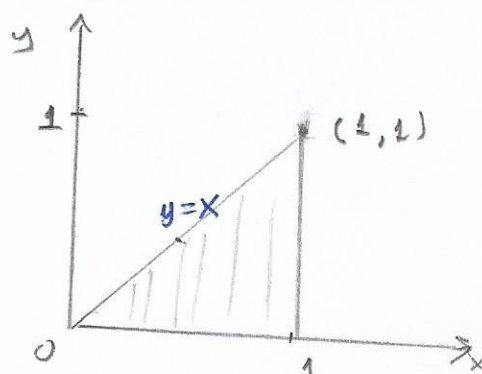


Άρα

$$\begin{aligned} E &= \iint_T (1+x-y) dx dy \\ &= \int_{-1}^0 \left(\int_0^{x+1} (1+x-y) dy \right) dx \\ &= \int_{-1}^0 \left[y + xy - \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{x+1} dx \\ &= \int_{-1}^0 \frac{(x+1)^2}{2} dx = \left[\frac{(x+1)^3}{6} \right]_{-1}^0 = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Παράδειγμα 4 (Η επιλογή της σειράς ολοκλήρωσης μπορεί να έχει σημασία).

Υπολογίστε το $\iint_R \frac{\sin x}{x} dx dy$ όπου
 R το τρίγωνο :



Λύση

Το χωρίο R είναι τύπου 3.

Αν το δούμε ως τύπου 1 (x μετατίθεται δύο σταθμών) και ολοκληρώσουμε πρώτα ως προς y και μετά ως προς x , βρίσκουμε:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\int_0^x \frac{\sin x}{x} dy \right) dx &= \int_0^1 \left[\frac{\sin x}{x} \cdot y \right]_{y=0}^x dx \\ &= \int_0^1 \sin x dx = [-\cos x]_0^1 = 1 - \cos 1. \end{aligned}$$

Αν δούμε το R ως χωρίο τύπου 2, δηλαδή ολοκληρώσουμε πρώτα ως προς x και μετά ως προς y , έχουμε

$$\int_0^1 \left(\int_y^1 \frac{\sin x}{x} dx \right) dy.$$

Όμως, το $\int \frac{\sin x}{x} dx$ δεν μπορεί να εκφραστεί μέσω στοιχειωδών συναρτήσεων, οπότε δεν μπορούμε να προχωρήσουμε.

* Δηλαδή η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = \frac{\sin x}{x}$

Αντιστροφή τη σειράς ολοκλήρωσης

Παράδειγμα 5

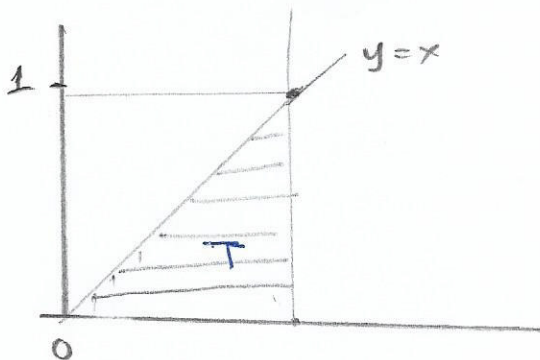
Υπολογίστε το ολοκλήρωμα:

$$I = \int_0^1 \left(\int_y^1 e^{x^2} dx \right) dy$$

Το $\int e^{x^2} dx$ δεν εκφράζεται μέσω στοιχειωδών συναρτήσεων.

Δοκιμάσουμε να αντιστρέψουμε τη σειρά ολοκλήρωσης.

Το χώρο T πάνω από το οποίο ολοκληρώνουμε είναι το τριγωνό:



$$0 \leq y \leq 1$$

$$y \leq x \leq 1$$

που
εκφράζεται
και ως:

$$0 \leq x \leq 1$$

$$0 \leq y \leq x$$

Άρα (με βάση το θεώρημα του Fubini)

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \left(\int_0^x e^{x^2} dy \right) dx = \int_0^1 \left[e^{x^2} y \right]_{y=0}^x dx \\ &= \int_0^1 x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 2x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \left[e^{x^2} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2} (e - 1). \end{aligned}$$

Παράδειγμα 6

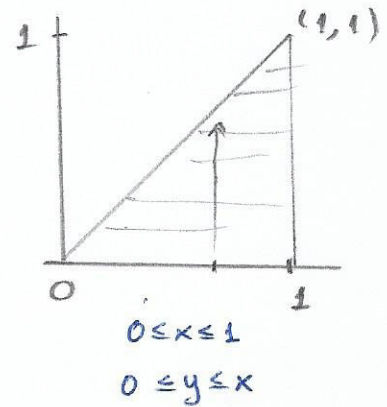
Υπολογίστε το ολοκλήρωμα:

$$I = \int_0^1 \left(\int_y^1 x^3 y e^{xy^2} dx \right) dy$$

Λύση

Αντιστρέφοντας τη σειρά ολοκλήρωσης, υπολογίζεται ευκολότερα.

Σύμφωνα με το σχήμα είναι:



$$I = \int_0^1 \left(x^3 \int_0^x y e^{xy^2} dy \right) dx$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{x^3}{2x} \int_0^x 2xy e^{xy^2} dy \right) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 \left[e^{xy^2} \right]_{y=0}^x dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 (x^2 e^{x^3} - x^2) dx = \frac{1}{6} \int_0^1 3x^2 \cdot e^{x^3} dx - \frac{1}{2} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1$$

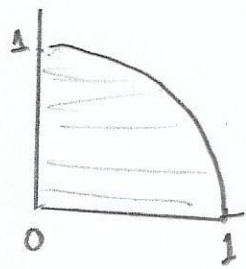
$$= \frac{1}{6} \left[e^{x^3} \right]_0^1 - \frac{1}{6} = \frac{1}{6} (e - 2)$$

Παράδειγμα 7

Υπολογίστε το ολοκλήρωμα :

$$I = \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} (1-y^2)^{3/2} dy \right) dx$$

Λύση



Ακολουθείται αν αντιστρέψουμε τη σειρά ολοκλήρωσης.

Το χωρίο πάνω από το οποίο ολοκληρώνουμε είναι το τεταρτοκύκλιο στο 1ο τεταρτημόριο

$$\begin{aligned} 0 \leq x \leq 1 & \quad \text{ή} \quad 0 \leq y \leq 1 \\ 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2} & \quad \text{ή} \quad 0 \leq x \leq \sqrt{1-y^2} \end{aligned}$$

Αρα

$$I = \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-y^2}} (1-y^2)^{3/2} dx \right) dy$$

$$= \int_0^1 (1-y^2)^{3/2} \sqrt{1-y^2} dy$$

$$= \int_0^1 (1-y^2)^2 dy = \int_0^1 (y^4 - 2y^2 + 1) dy$$

$$= \left[\frac{y^5}{5} - \frac{2y^3}{3} + y \right]_0^1 = \frac{1}{5} - \frac{2}{3} + 1 = \frac{8}{15}$$

Παράδειγμα 8

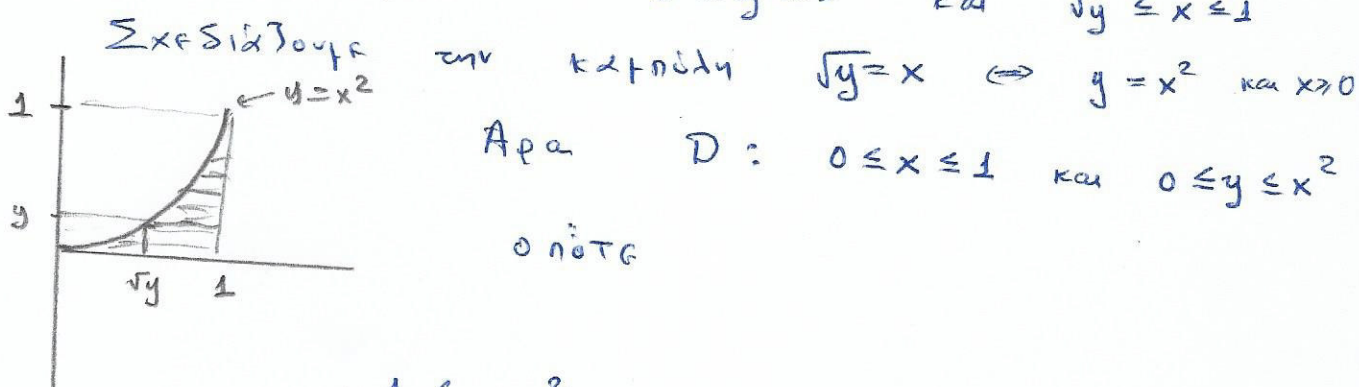
Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$I = \int_0^1 \left(\int_{\sqrt{y}}^1 \frac{y}{(1+x^5)^7} dx \right) dy$$

Λύση

Το χωρίο ολοκλήρωσης D δίνεται από

τις ανισότητες : $0 \leq y \leq 1$ και $\sqrt{y} \leq x \leq 1$



$$I = \int_0^1 \left(\int_0^{x^2} \frac{y}{(1+x^5)^7} dy \right) dx$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{(1+x^5)^7} \left[\frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{x^2} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^4}{(1+x^5)^7} dx = \frac{1}{10} \int_0^1 \frac{5x^4}{(1+x^5)^7} dx$$

$$= \frac{1}{10} \left[-\frac{1}{6} \frac{1}{(1+x^5)^6} \right]_0^1 = -\frac{1}{60} \cdot \frac{1}{2^6} + \frac{1}{60}$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{60} \cdot \frac{63}{64}$$

Αλλαγή μεταβλητών

Διπλά ολοκληρώματα σε πολικές συντεταγμένες.

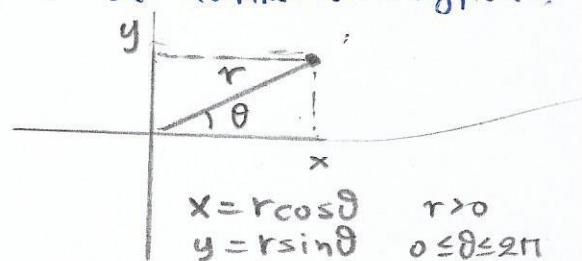
Αν το D είναι στοιχειώδες χωρίο στο επίπεδο και η $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη, τότε

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D^*} f(r \cos \theta, r \sin \theta) \cdot r dr d\theta$$

όπου D^* η έκφραση του χωρίου D σε πολικές συντεταγμένες.

Παράδειγμα 1

Το εμβαδόν του κύκλου.



Έχουμε δει ότι το εμβαδόν ενός χωρίου δίνεται από το (διπλό) ολοκλήρωμα της συνάρτησης 1 πάνω από το χωρίο αυτό. - Αυτό ισχύει για το εμβαδόν του D ισούται με τον όγκο ενός «κυλίνδρου» βάσης D και ύψους 1.

Αρα $E(D) = \iint_D 1 dx dy$

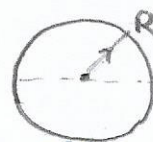
Εδώ D είναι ο κύκλος ακτίνας R :

Εκφράζοντας τον κύκλο σε πολικές συντεταγμένες έχουμε:

$$D^* : 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq r \leq R$$

Αρα

$$\begin{aligned}
 E(D) &= \iint_D 1 dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^R r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^2}{2} \right]_{r=0}^R d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{R^2}{2} d\theta \\
 &= 2\pi \frac{R^2}{2} = \pi R^2.
 \end{aligned}$$



Παράδειγμα 2

Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου D που περικλείεται από την καρδιοειδή καμπύλη, η οποία σε πολικές συντεταγμένες έχει εξίσωση $r = 1 + \cos \theta$.

Λύση

Σύμφωνα με τα προηγούμενα είναι

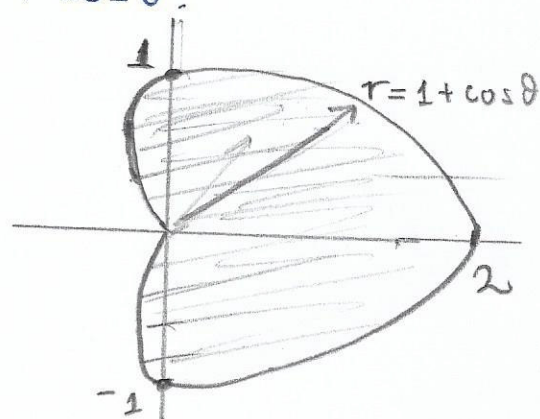
$$\begin{aligned} E(D) &= \iint_{D^*} r \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{1+\cos\theta} r \, dr \right) d\theta \end{aligned}$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{(1+\cos\theta)^2}{2} d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos^2\theta d\theta + \int_0^{2\pi} \cos\theta d\theta$$

$$= \pi + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1+\cos 2\theta) d\theta + [\sin\theta]_0^{2\pi}$$

$$= \pi + \frac{1}{4} \cdot 2\pi + \frac{1}{8} [\sin 2\theta]_0^{2\pi}$$

$$= \pi + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$$



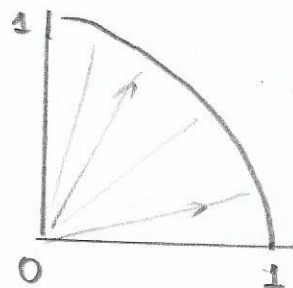
Παράδειγμα 3

Να βρείτε τη ροπή αδράνειας ως προς την αρχή των αξόνων μιας λεπτής πλάκας πυκνότητας $\delta(x,y)=1$, η οποία φράσσεται από το τεταρτοκύκλιο $x^2+y^2=1$ στο πρώτο τεταρτημόριο.

$$\left(\begin{array}{l} \text{Ροπή αδράνειας ως προς την αρχή!} \\ I = \iint_D (x^2+y^2) \delta(x,y) dx dy \end{array} \right)$$

Λύση

Σε καρτεσιανές συντεταγμένες είναι



$$I = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (x^2+y^2) dy dx$$

Κάνοντας αλλαγή σε πολικές συντεταγμένες $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, παίρνουμε:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 r^2 \cdot r dr d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 r^3 dr d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^4}{4} \right]_{r=0}^1 d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4} d\theta = \frac{\pi}{8} \end{aligned}$$

Η συνάρτηση $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

να ελεγχθεί αν είναι διαφορίσιμη στο $(0,0)$.

Λύση Υπολογίζουμε.

$$f_x(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h^3}{h^2}}{h} = 1$$

$$f_y(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0$$

$$\nabla f(0,0) = (f_x(0,0), f_y(0,0)) = (1, 0)$$

Ελέγχουμε αν υπάρχει:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|f(x,y) - f(0,0) - \nabla f(0,0) \cdot (x,y)|}{\|(x,y) - (0,0)\|}$$

$$= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\left| \frac{x^3}{x^2+y^2} - (1,0) \cdot (x,y) \right|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|x|y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

$\varphi(x,y)$

$$\varphi(x,0) = 0 \rightarrow 0$$

$$\varphi(x,x) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \rightarrow \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Δεν υπάρχει το $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|f(x,y) - f(0,0) - \nabla f(0,0) \cdot (x,y)|}{\|(x,y) - (0,0)\|}$

Άρα η f δεν είναι διαφορίσιμη στο $(0,0)$.