

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

3. Έστω τα $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$ με $\vec{x} = (3, -1, 1)$ και $\vec{y} = (1, 2, -1)$. Να βρεθεί το $\vec{x} \times \vec{y}$

ΛΥΣΗ

$$(3, -1, 1) \times (1, 2, -1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} =$$
$$(-1)\vec{i} + 4\vec{j} + 7\vec{k} = (-1, 4, 7)$$

Επιπλέον ισχύει ότι:

$$(-1, 4, 7) \cdot (3, -1, 1) = -3 - 4 + 7 = 0 \Rightarrow (\vec{x} \times \vec{y}) \perp \vec{x}.$$

Ομοίως προκύπτει ότι $(\vec{x} \times \vec{y}) \perp \vec{y}$.

4. Έστω τα $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$ με $\vec{x} = (1, 2, 3)$ και $\vec{y} = (-1, 0, -1)$. Να βρεθεί το $\vec{x} \times \vec{y}$

ΛΥΣΗ

$$(1, 2, 3) \times (-1, 0, -1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = (-2, -2, 2)$$

Το αντίστοιχο μοναδιαίο διάνυσμα θα είναι:

$$\vec{\eta} = \frac{(1, 2, 3) \times (-1, 0, -1)}{\|(1, 2, 3) \times (-1, 0, -1)\|},$$

αφού

$$\|\vec{\eta}\| = \frac{\|(1, 2, 3) \times (-1, 0, -1)\|}{\|(1, 2, 3) \times (-1, 0, -1)\|} = 1.$$

Επομένως, το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα σε δύο διανύσματα $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$ είναι το

$$\vec{z} = \frac{\vec{x} \times \vec{y}}{\|\vec{x} \times \vec{y}\|}$$

5. Έστω δύο μοναδιαία διανύσματα $\vec{x}, \vec{y}$ και $\vec{r} = \vec{x} + \vec{y}$. Να δείξετε ότι το διάνυσμα $\vec{r}$ διχοτομεί την γωνία $\theta = \angle(\vec{x}, \vec{y})$.

ΛΥΣΗ

Αφού $\vec{x}, \vec{y}$ μοναδιαία $\Rightarrow \|\vec{x}\| = 1$ και $\|\vec{y}\| = 1$.

Έστω $\theta_1 = \angle(\vec{r}, \vec{x})$ και $\theta_2 = \angle(\vec{r}, \vec{y})$ τότε:

$$\cos\theta_1 = \frac{\vec{r} \cdot \vec{x}}{\|\vec{r}\| \|\vec{x}\|} = \frac{(\vec{x} + \vec{y}) \cdot \vec{x}}{\|\vec{x} + \vec{y}\| \|\vec{x}\|} = \frac{\vec{x} \cdot \vec{x} + \vec{y} \cdot \vec{x}}{\|\vec{x} + \vec{y}\| \|\vec{x}\|} = \frac{\|\vec{x}\|^2 + \vec{x} \cdot \vec{y}}{\|\vec{x} + \vec{y}\| \|\vec{x}\|} = \frac{1 + \vec{x} \cdot \vec{y}}{\|\vec{x} + \vec{y}\|}.$$

Ομοίως

$$\cos\theta_2 = \frac{\vec{r} \cdot \vec{y}}{\|\vec{r}\| \|\vec{y}\|} = \frac{(\vec{x} + \vec{y}) \cdot \vec{y}}{\|\vec{x} + \vec{y}\| \|\vec{y}\|} \stackrel{(\|\vec{y}\|=1)}{=} \dots = \frac{1 + \vec{x} \cdot \vec{y}}{\|\vec{x} + \vec{y}\|} = \cos\theta_1$$

Άρα αφού ο περιορισμός της $\cos\theta$ στο $[0, \pi]$ είναι '1-1' έχουμε ότι $\theta_1 = \theta_2$.

6. Έστω $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε $\vec{x} \perp \vec{y} \quad \forall \vec{y} \in \mathbb{R}^n$. Τότε $\vec{x} = \vec{0}$.

ΛΥΣΗ

$\vec{x} \perp \vec{y} \Leftrightarrow \vec{x} \cdot \vec{y} = 0 \quad \forall \vec{y} \in \mathbb{R}^n$. Αφού ισχύει για οποιοδήποτε $\vec{y}$ στον $\mathbb{R}^n$, θα ισχύει και για $\vec{x} = \vec{y}$.

Επομένως, από υπόθεση προκύπτει ότι $\vec{x} \cdot \vec{x} = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$.

7. Να δείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{x} - \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{\|\vec{y}\|^2} \vec{y}$ και $\vec{y}$ είναι κάθετα μεταξύ τους.

ΛΥΣΗ

$$\left(\vec{x} - \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{\|\vec{y}\|^2} \vec{y} \right) \cdot \vec{y} = \vec{x} \cdot \vec{y} - \vec{y} \cdot \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{\|\vec{y}\|^2} \vec{y} = \left(\frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{\|\vec{y}\|^2} \in \mathbb{R} \right) = \vec{x} \cdot \vec{y} - \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{\|\vec{y}\|^2} \vec{y} \cdot \vec{y} =$$

$$= \vec{x} \cdot \vec{y} - \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{\|\vec{y}\|^2} \|\vec{y}\|^2 = \vec{x} \cdot \vec{y} - \vec{x} \cdot \vec{y} = 0. \quad \text{Επομένως } \left(\vec{x} - \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{\|\vec{y}\|^2} \vec{y} \right) \perp \vec{y}.$$

8. (Απόδειξη ανισότητας Cauchy – Schwarz). Για δύο διανύσματα $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ ισχύει η σχέση: $|\vec{x} \cdot \vec{y}| \leq \|\vec{x}\| \|\vec{y}\|$.

ΛΥΣΗ

1ος τρόπος

Γνωρίζουμε ότι το εσωτερικό γινόμενο μεταξύ των $\vec{x}, \vec{y}$ ικανοποιεί την ισότητα:

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \|\vec{x}\| \|\vec{y}\| \cos\theta. \quad \theta \in [0, \pi]$$

Επομένως

$$|\vec{x} \cdot \vec{y}| = \|\vec{x}\| \|\vec{y}\| |\cos\theta| \stackrel{|\cos\theta| \leq 1}{\implies} |\vec{x} \cdot \vec{y}| \leq \|\vec{x}\| \|\vec{y}\|.$$

Η ισότητα ικανοποιείται για $\vec{x} = \vec{y} = \vec{0}$, καθώς και για $\theta = 0$ ή $\theta = \pi$, δηλαδή $\vec{x} \parallel \vec{y}$.

2ος τρόπος

Αν $\vec{x} = \vec{y} = \vec{0}$ ισχύει. Έστω ένα $\lambda \in \mathbb{R}$ και $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$.

$$0 \leq \|\lambda \vec{x} + \vec{y}\|^2 = (\lambda \vec{x} + \vec{y}) \cdot (\lambda \vec{x} + \vec{y}) = \lambda \vec{x} \cdot \lambda \vec{x} + 2\lambda \vec{x} \cdot \vec{y} + \vec{y} \cdot \vec{y} = \lambda^2 \|\vec{x}\|^2 + 2\lambda \vec{x} \cdot \vec{y} + \|\vec{y}\|^2.$$

Πολυώνυμο 2ου βαθμού ως προς το $\lambda \in \mathbb{R}$. Άρα

$$\Delta \leq 0 \Rightarrow 4(\vec{x} \cdot \vec{y})^2 - 4\|\vec{x}\|^2\|\vec{y}\|^2 \leq 0 \Rightarrow 4(\vec{x} \cdot \vec{y})^2 \leq 4\|\vec{x}\|^2\|\vec{y}\|^2 \Rightarrow |\vec{x} \cdot \vec{y}| \leq \|\vec{x}\|\|\vec{y}\|.$$

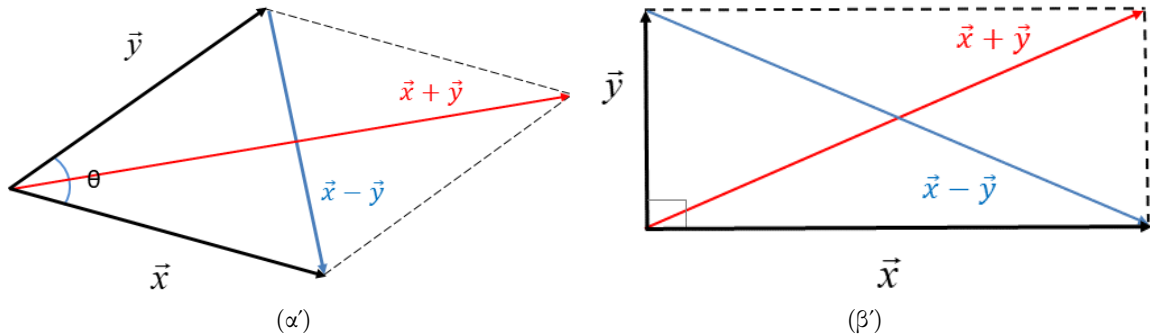
9. (Νόμος Παραλληλογράμμου). Για δύο διανύσματα $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ ισχύει η σχέση:
 $\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 + \|\vec{x} - \vec{y}\|^2 = 2\|\vec{x}\|^2 + 2\|\vec{y}\|^2.$

ΛΥΣΗ

$$\begin{aligned} \|\vec{x} + \vec{y}\|^2 + \|\vec{x} - \vec{y}\|^2 &= (\vec{x} + \vec{y}) \cdot (\vec{x} + \vec{y}) + (\vec{x} - \vec{y}) \cdot (\vec{x} - \vec{y}) = \\ &= \vec{x} \cdot \vec{x} + \vec{x} \cdot \vec{y} + \vec{y} \cdot \vec{x} + \vec{y} \cdot \vec{y} + \vec{x} \cdot \vec{x} - \vec{x} \cdot \vec{y} - \vec{y} \cdot \vec{x} + \vec{y} \cdot \vec{y} \quad (\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{y} \cdot \vec{x}) \\ &= \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 + 2\vec{x} \cdot \vec{y} + \|\vec{x}\|^2 - 2\vec{x} \cdot \vec{y} + \|\vec{y}\|^2 = 2\|\vec{x}\|^2 + 2\|\vec{y}\|^2 \end{aligned}$$

10. Να δείξετε ότι αν $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ τέτοια ώστε $\|\vec{x} + \vec{y}\| = \|\vec{x} - \vec{y}\|$, τότε $\vec{x} \perp \vec{y}$.

ΛΥΣΗ



$$\begin{aligned} \|\vec{x} + \vec{y}\|^2 &= \|\vec{x} - \vec{y}\|^2 \Leftrightarrow (\vec{x} + \vec{y}) \cdot (\vec{x} + \vec{y}) = (\vec{x} - \vec{y}) \cdot (\vec{x} - \vec{y}) \\ &\Leftrightarrow \vec{x} \cdot \vec{x} + 2\vec{x} \cdot \vec{y} + \vec{y} \cdot \vec{y} = \vec{x} \cdot \vec{x} - 2\vec{x} \cdot \vec{y} + \vec{y} \cdot \vec{y} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow 4\vec{x} \cdot \vec{y} = 0 \Leftrightarrow \vec{x} \cdot \vec{y} = 0 \Leftrightarrow \vec{x} \perp \vec{y}.$$

11. Να βρεθεί η τιμή του $t \in \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $proj_{\vec{b}}(\vec{a}) = \vec{b}$, όπου $a = (1, t, 1)$, $b = (9, 1, 1)$.

ΛΥΣΗ

$$proj_{\vec{b}}(\vec{a}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{b}\|^2} \vec{b} = \vec{b}$$

Επομένως για να ισχύει το ζητούμενο πρέπει:

$$\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{b}\|^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{9 + t + 1}{(\sqrt{81 + 1 + 1})^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{10 + t}{83} = 1 \Leftrightarrow t = 73.$$

12. Αν $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$ ανά δύο κάθετα μεταξύ τους. Να δείξετε ότι δεν υπάρχει διάνυσμα $\vec{v} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$ που να είναι κάθετο στα $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

ΛΥΣΗ

Έστω ότι υπάρχει τέτοιο $\vec{v} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$. Τότε:

$$\vec{v} \perp \vec{a} \Leftrightarrow \vec{v} \cdot \vec{a} = 0 \Leftrightarrow v_1 a_1 + v_2 a_2 + v_3 a_3 = 0$$

$$\vec{v} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{v} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow v_1 b_1 + v_2 b_2 + v_3 b_3 = 0$$

$$\vec{v} \perp \vec{c} \Leftrightarrow \vec{v} \cdot \vec{c} = 0 \Leftrightarrow v_1 c_1 + v_2 c_2 + v_3 c_3 = 0$$

Το παραπάνω γραμμικό σύστημα μπορεί να γραφεί στη μορφή πινάκων:

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

όπου:

$$\det \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \dots = c_1(a_2 b_3 - a_3 b_2) + c_2(a_3 b_1 - a_1 b_3) + c_3(a_1 b_2 - a_2 b_1) =$$

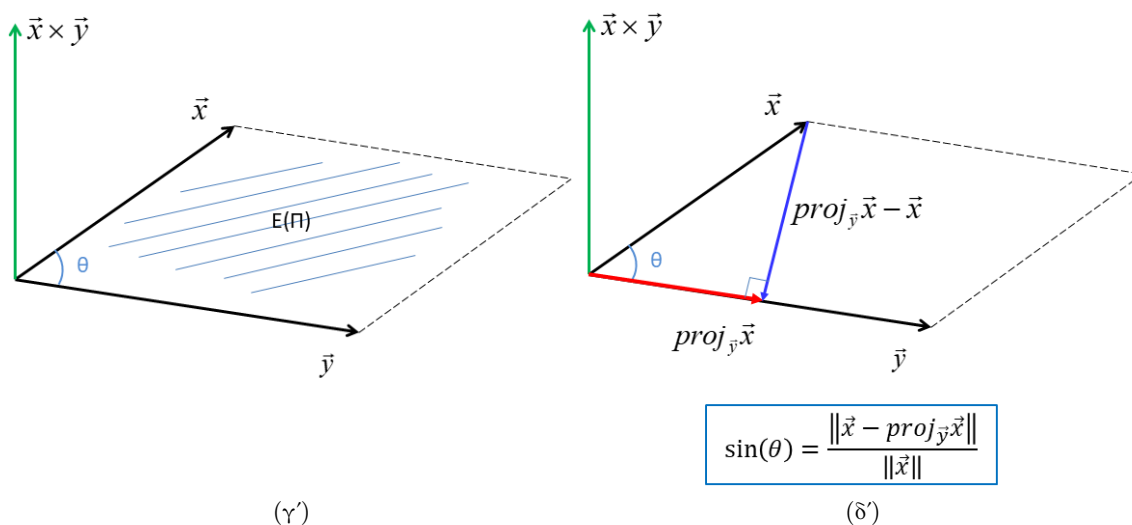
$$= \vec{c} \cdot \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}).$$

Από υπόθεση, λόγω καθετότητας μεταξύ των $\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}$ προκύπτει ότι η ορίζουσα είναι $\neq 0$. Άρα ο πίνακας

$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$ είναι αντιστρέψιμος. Επομένως πολλαπλασιάζοντας το σύστημα από αριστερά με τον A^{-1} προκύπτει ότι $\vec{v} = \vec{0}$. Άτοπο από υπόθεση.

13. Έστω $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$. Να αποδειχθεί ότι η νόρμα του εξωτερικού τους γινομένου $\|\vec{x} \times \vec{y}\|$ ισούται με το εμβαδόν $E(\Pi)$ του παραλληλογράμμου $\Pi = \{\lambda \vec{x} + \mu \vec{y} \mid 0 \leq \lambda, \mu \leq 1\}$.

ΛΥΣΗ



Έστω $\theta = \angle(\vec{x}, \vec{y})$ και $\text{proj}_{\vec{y}}(\vec{x})$ η προβολή του $\vec{x}$ στο $\vec{y}$.

Τότε από Ευκλείδεια Γεωμετρία το εμβαδόν του παραλληλογράμμου δίνεται από τη σχέση:

$$E(\Pi) = \|\vec{y}\| \|\vec{x} - \text{proj}_{\vec{y}}(\vec{x})\| = \|\vec{x}\| \|\vec{y}\| \sin \theta \quad (\text{Εικόνα δ'}),$$

όπου $\|\vec{x}\|$ το μήκος του διανύσματος $\vec{x}$ και $\|\vec{y}\|$ το μήκος του διανύσματος $\vec{y}$.

Επιπλέον, από Ταυτότητα *Lagrange* ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} \|\vec{x} \times \vec{y}\|^2 &= \|\vec{x}\|^2 \|\vec{y}\|^2 - (\vec{x} \cdot \vec{y})^2 = \|\vec{x}\|^2 \|\vec{y}\|^2 - \|\vec{x}\|^2 \|\vec{y}\|^2 (\cos \theta)^2 \\ &= \|\vec{x}\|^2 \|\vec{y}\|^2 (1 - (\cos \theta)^2) = \|\vec{x}\|^2 \|\vec{y}\|^2 (\sin \theta)^2 \Rightarrow \|\vec{x} \times \vec{y}\| = \|\vec{x}\| \|\vec{y}\| \sin \theta \end{aligned}$$

Επομένως από τις παραπάνω δύο σχέσεις έπεται η απόδειξη.

14. Να βρεθεί το εμβαδόν του παραλληλογράμμου που παράγεται από τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1, -2, 1)$ και $\vec{\beta} = (2, 1, 1)$.

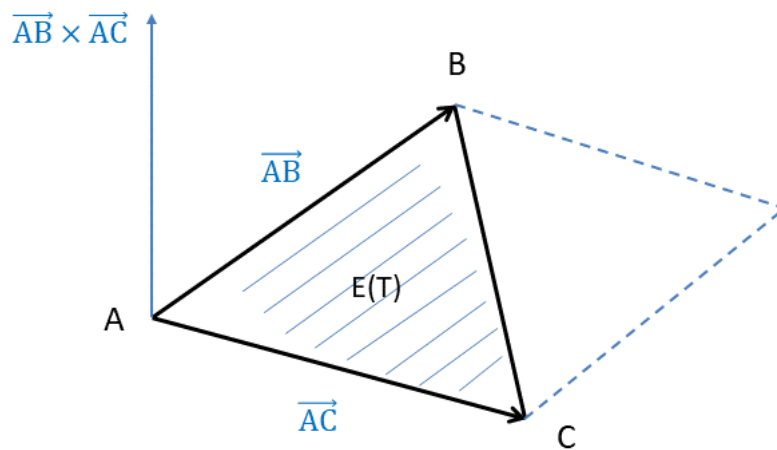
ΛΥΣΗ

Έχουμε αποδείξει ότι $E(\Pi) = \|\vec{\alpha} \times \vec{\beta}\|$.

$$\begin{aligned}\vec{\alpha} \times \vec{\beta} &= (1, -2, 1) \times (2, 1, 1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \vec{i}(-3) + \vec{j} + 5\vec{k} = (-3, 1, 5) \\ \text{Επομένως, } E(\Pi) &= \|\vec{\alpha} \times \vec{\beta}\| = \sqrt{(-3)^2 + 1^2 + 5^2} = \sqrt{9 + 1 + 25} = \sqrt{35}\end{aligned}$$

15. Να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου με κορυφές $A = (1, 0, 0)$, $B = (1, 2, -1)$, $C = (0, 2, -4)$.

ΛΥΣΗ



$$\text{Σχήμα 1: } E(T) = \frac{1}{2} E(\Pi)$$

Το εμβαδόν του τριγώνου $E(T)$ θα ισούται με $\frac{1}{2}E(\Pi)$, όπου Π το παραλληλόγραμμο που παράγεται από τα $\vec{AB} = (0, 2, -1)$, $\vec{AC} = (-1, 2, -4)$.

Έχουμε αποδείξει (Άσκηση 13) ότι $E(\Pi) = \|\vec{AB} \times \vec{AC}\|$.

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = (0, 2, -1) \times (-1, 2, -4) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -4 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} +$$

$$\vec{k} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -6\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k} = (-6, 1, 2)$$

$$\text{Επομένως, } E(T) = \frac{1}{2}E(\Pi) = \frac{1}{2}\|\vec{AB} \times \vec{AC}\| = \frac{1}{2}\sqrt{(-6)^2 + 1^2 + 2^2} = \frac{1}{2}\sqrt{36 + 1 + 4} = \frac{1}{2}\sqrt{41}.$$