

## ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

### Πραγματικές συναρτήσεις πολλών μεταβλητών

**Ορισμός:** Μία συνάρτηση η οποία σε κάθε σημείο  $\vec{x}$  ενός υποσυνόλου  $A$  του  $\mathbb{R}^n$  αντιστοιχεί έναν πραγματικό αριθμό  $f(\vec{x})$ , ονομάζεται **πραγματική** (ή βαθμωτή) **συνάρτηση** **η μεταβλητών** και συμβολίζεται ως:

$$f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} .$$

Το υποσύνολο  $A$  του  $\mathbb{R}^n$  ονομάζεται **πεδίο ορισμού** της συνάρτησης  $f$ .

Το υποσύνολο  $f(A)$  του  $\mathbb{R}$  το οποίο ορίζεται ως:

$$f(A) := \{y \in \mathbb{R} : y = f(\vec{x}) \text{ για κάποιο } \vec{x} \in A\} ,$$

ονομάζεται **πεδίο τιμών** (ή **εικόνα**) της συνάρτησης  $f$ .

**Συμβολισμός:** Το σημείο  $\vec{x} \in A \subseteq \mathbb{R}^n$  γράφεται ως  $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  και η συνάρτηση  $f(\vec{x})$  γράφεται ως  $f(\vec{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

Στις ειδικές περιπτώσεις που  $n = 2$  ή  $n = 3$  συνήθως γράφουμε  $\vec{x} = (x, y)$  ή  $\vec{x} = (x, y, z)$  αντίστοιχα, αντί για  $\vec{x} = (x_1, x_2)$  ή  $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$  αντίστοιχα.

**Παράδειγμα:** Η **απόσταση** ενός (οποιοδήποτε) σημείου  $(x, y, z)$  από την αρχή των αξόνων  $(0, 0, 0)$  είναι μία πραγματική συνάρτηση  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  που δίνεται από τον τύπο:

$$f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} .$$

Επίσης, η απόσταση ενός σημείου  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  από ένα σταθερό σημείο  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  είναι μία πραγματική συνάρτηση  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  που δίνεται από τον τύπο:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \dots + (x_n - a_n)^2} .$$

**Πράξεις πραγματικών συναρτήσεων:** Έστω δύο πραγματικές συναρτήσεις  $f, g : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Τότε ορίζουμε τις εξής συναρτήσεις:

1) Άθροισμα

$$f + g : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} , \quad \text{όπου} \quad (f + g)(\vec{x}) = f(\vec{x}) + g(\vec{x}) ,$$

2) Αριθμητικό γινόμενο

$$\lambda f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} , \quad \text{όπου} \quad (\lambda f)(\vec{x}) = \lambda f(\vec{x}) \quad \text{για } \lambda \in \mathbb{R} ,$$

3) Γινόμενο

$$fg : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} , \quad \text{όπου} \quad (fg)(\vec{x}) = f(\vec{x})g(\vec{x}) ,$$

4) Πηλίκο

$$\frac{f}{g} : A_g \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} , \quad \text{όπου} \quad \left(\frac{f}{g}\right)(\vec{x}) = \frac{f(\vec{x})}{g(\vec{x})} \quad \text{με } A_g := \{\vec{x} \in A : g(\vec{x}) \neq 0\} .$$

Σχόλιο: Η αφαίρεση πραγματικών συναρτήσεων είναι συνδιασμός των παραπάνω 1) και 2) για  $\lambda = -1$ , δηλαδή  $f - g = f + (-1)g$ .

### Γραφική παράσταση πραγματικών συναρτήσεων πολλών μεταβλητών:

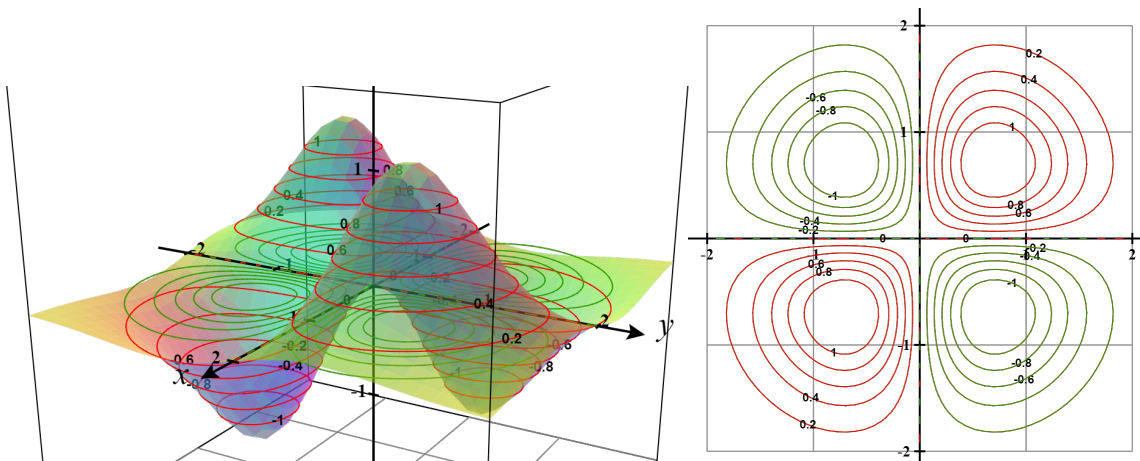
**Ορισμός:** Έστω  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  μία πραγματική συνάρτηση  $n$  μεταβλητών. Το σύνολο  $Graph(f)$  που ορίζεται ως:

$$Graph(f) := \{(x_1, x_2, \dots, x_n, f(x_1, x_2, \dots, x_n)) : (x_1, x_2, \dots, x_n) \in A\},$$

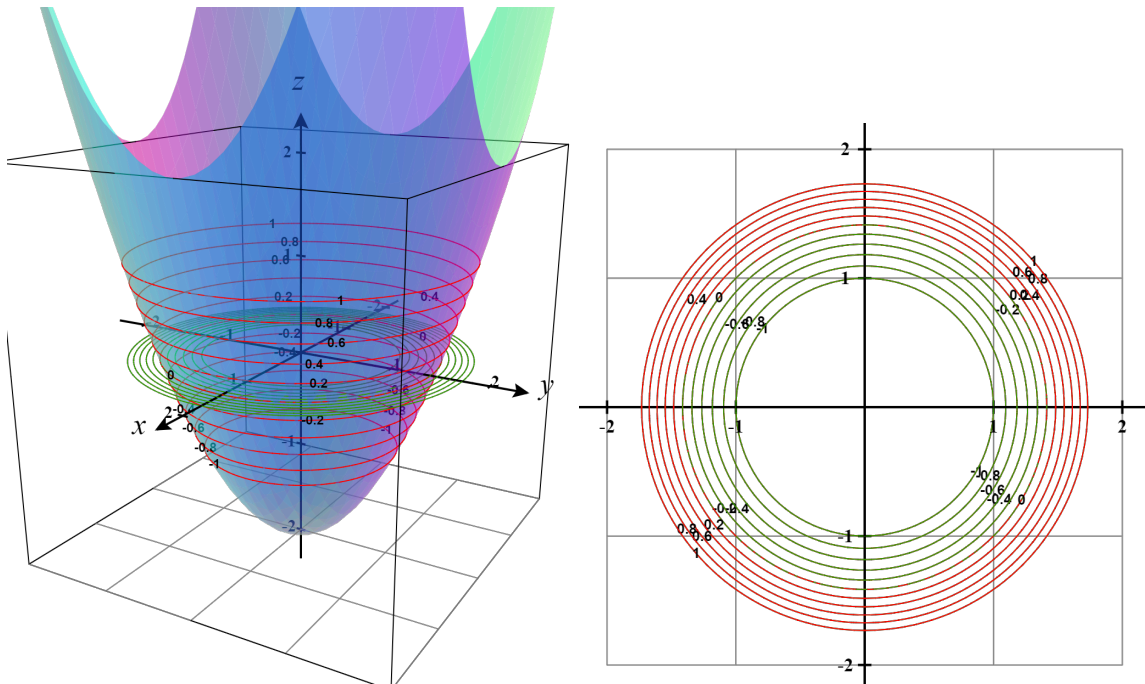
ονομάζεται **γράφημα** της  $f$  και είναι υποσύνολο του  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

Στην ειδική περίπτωση που  $n = 1$ , δηλαδή η  $f$  είναι μία πραγματική συνάρτηση μίας μεταβλητής, τότε ως γράφημά της ορίζεται το υποσύνολο  $Graph(f) := \{(x, f(x)) : x \in A\}$  του  $\mathbb{R}^2$  και είναι μία καμπύλη του  $xy$ -επιπέδου με εξίσωση  $y = f(x)$ . Η σχεδίαση ενός γραφήματος σε αυτήν την περίπτωση ( $n = 1$ ) απαιτεί δύο άξονες (τον  $x$ -άξονα και τον  $y$ -άξονα όπου  $y = f(x)$ ).

Στην ειδική περίπτωση που  $n = 2$ , δηλαδή η  $f$  είναι μία πραγματική συνάρτηση δύο μεταβλητών, τότε ως γράφημά της ορίζεται το υποσύνολο  $Graph(f) := \{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in A\}$  του  $\mathbb{R}^3$  και είναι μία επιφάνεια του  $\mathbb{R}^3$  με εξίσωση  $z = f(x, y)$ . Η σχεδίαση ενός γραφήματος σε αυτήν την περίπτωση ( $n = 2$ ) απαιτεί τρεις άξονες (τον  $x$ -άξονα, τον  $y$ -άξονα και τον  $z$ -άξονα όπου  $z = f(x, y)$ ) και γίνεται με τη βοήθεια ορισμένων ειδικών καμπυλών που ονομάζονται **ισοϋψείς καμπύλες** και βρίσκονται ως τομές της επιφάνειας με εξίσωση  $z = f(x, y)$  με τα οριζόντια επίπεδα  $z = c$  (όπου  $c$  σταθερά) για διάφορες τιμές του  $c$ . Οι προβολές των ισοϋψών καμπυλών πάνω στο  $xy$ -επίπεδο ονομάζονται **σταθμικές καμπύλες** και δημιουργούν έναν **τοπογραφικό χάρτη** της επιφάνειας.



- Γράφημα της συνάρτησης  $f(x, y) = \frac{7xy}{x^2 + y^2}$ . Στο πρώτο σχήμα βλέπουμε τις ισοϋψείς καμπύλες (κόκκινες καμπύλες) της συνάρτησης και τις σταθμικές καμπύλες (πράσινες καμπύλες). Στο δεύτερο σχήμα βλέπουμε τις σταθμικές καμπύλες (κόκκινες και πράσινες καμπύλες) της συνάρτησης δηλαδή τις προβολές των ισοϋψών καμπυλών στο  $xy$ -επίπεδο.



- Γράφημα της συνάρτησης  $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2$ . Στο πρώτο σχήμα βλέπουμε τις ισοϋψείς καμπύλες (κόκκινες καμπύλες) και τις σταθμικές καμπύλες (πράσινες καμπύλες) της συνάρτησης. Στο δεύτερο σχήμα βλέπουμε τις σταθμικές καμπύλες (κόκκινες και πράσινες καμπύλες) της συνάρτησης στο  $xy$ -επίπεδο.

## Διανυσματικές συναρτήσεις πολλών μεταβλητών

**Ορισμός:** Μία συνάρτηση η οποία σε κάθε σημείο  $\vec{x}$  ενός υποσυνόλου  $A$  του  $\mathbb{R}^n$  αντιστοιχεί έναν στοιχείο  $\vec{f}(\vec{x})$  του  $\mathbb{R}^m$ , ονομάζεται **διανυσματική συνάρτηση**  $n$  μεταβλητών και συμβολίζεται ως:

$$\vec{f} : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m.$$

Το υποσύνολο  $A$  του  $\mathbb{R}^n$  ονομάζεται **πεδίο ορισμού** της συνάρτησης  $\vec{f}$ .

Το υποσύνολο  $\vec{f}(A)$  του  $\mathbb{R}^m$  το οποίο ορίζεται ως:

$$\vec{f}(A) := \{\vec{y} \in \mathbb{R}^m = \vec{f}(\vec{x}) \text{ για κάποιο } \vec{x} \in A\},$$

ονομάζεται **πεδίο τιμών** (ή **εικόνα**) της συνάρτησης  $\vec{f}$ .

**Συμβολισμός:** Το σημείο  $\vec{x} \in A \subseteq \mathbb{R}^n$  γράφεται ως  $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  και η συνάρτηση  $\vec{f}(\vec{x})$  γράφεται ως  $\vec{f}(\vec{x}) = \vec{f}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

Επιπλέον, η συνάρτηση  $\vec{f}(\vec{x})$  γράφεται ως  $\vec{f}(\vec{x}) = (f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}), \dots, f_m(\vec{x}))$ , όπου οι  $f_1, f_2, \dots, f_m : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  είναι πραγματικές συναρτήσεις  $n$  μεταβλητών και ονομάζονται **συνιστώσες συναρτήσεων** της διανυσματικής συνάρτησης  $\vec{f}$ .

**Πράξεις διανυσματικών συναρτήσεων:** Έστω δύο διανυσματικές συναρτήσεις  $\vec{f}, \vec{g} : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Τότε ορίζουμε τις εξής συναρτήσεις:

1) Άθροισμα

$$\vec{f} + \vec{g} : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad \text{όπου} \quad (\vec{f} + \vec{g})(\vec{x}) = \vec{f}(\vec{x}) + \vec{g}(\vec{x}),$$

2) Αριθμητικό γινόμενο

$$\lambda \vec{f} : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad \text{όπου} \quad (\lambda \vec{f})(\vec{x}) = \lambda \vec{f}(\vec{x}) \quad \text{για } \lambda \in \mathbb{R},$$

3) Εσωτερικό γινόμενο

$$\vec{f} \cdot \vec{g} : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad \text{όπου} \quad (\vec{f} \cdot \vec{g})(\vec{x}) = \vec{f}(\vec{x}) \cdot \vec{g}(\vec{x}) = \sum_{i=1}^m f_i(\vec{x})g_i(\vec{x}),$$

4) Εξωτερικό γινόμενο (για  $n = m = 3$ )

$$\vec{f} \times \vec{g} : A \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \text{όπου} \quad \vec{f}(\vec{x}) \times \vec{g}(\vec{x}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ f_1(\vec{x}) & f_2(\vec{x}) & f_3(\vec{x}) \\ g_1(\vec{x}) & g_2(\vec{x}) & g_3(\vec{x}) \end{vmatrix}.$$

## Τοπολογία στον $\mathbb{R}^n$

**Ορισμός:** Έστω  $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$  και  $\varepsilon > 0$ . **Ανοικτή μπάλα** του  $\mathbb{R}^n$  με κέντρο  $\vec{x}_0$  και ακτίνα  $\varepsilon$  καλείται το σύνολο:

$$B(\vec{x}_0, \varepsilon) = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n : \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \varepsilon \}$$

**Ορισμός:** Έστω  $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$  και  $\varepsilon > 0$ . **Κλειστή μπάλα** του  $\mathbb{R}^n$  με κέντρο  $\vec{x}_0$  και ακτίνα  $\varepsilon$  καλείται το σύνολο:

$$\bar{B}(\vec{x}_0, \varepsilon) = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n : \|\vec{x} - \vec{x}_0\| \leq \varepsilon \}$$

**Παραδείγματα:**

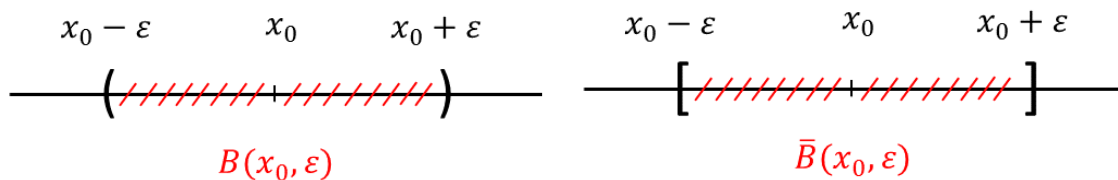
1. Για  $n = 1$  (δηλαδή στο  $\mathbb{R}$ ) :

i) Ανοιχτό διάστημα :

$$B(x_0, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < \varepsilon\} = \{x \in \mathbb{R} : x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon\} = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$$

ii) Κλειστό διάστημα :

$$\bar{B}(x_0, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| \leq \varepsilon\} = \{x \in \mathbb{R} : x_0 - \varepsilon \leq x \leq x_0 + \varepsilon\} = [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$$



2. Για  $n = 2$  (δηλαδή στο  $\mathbb{R}^2$ ) :

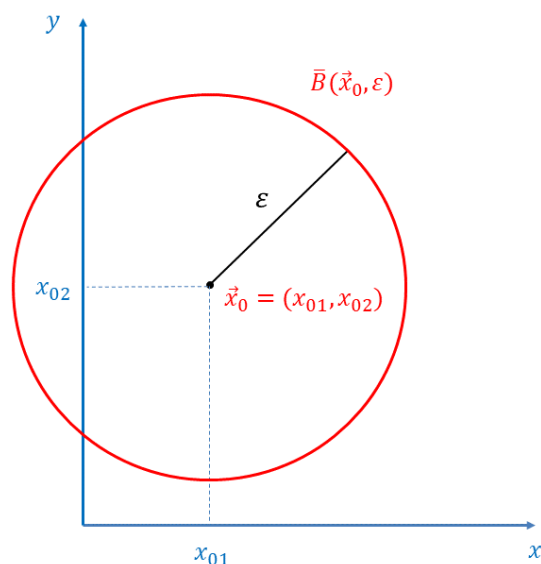
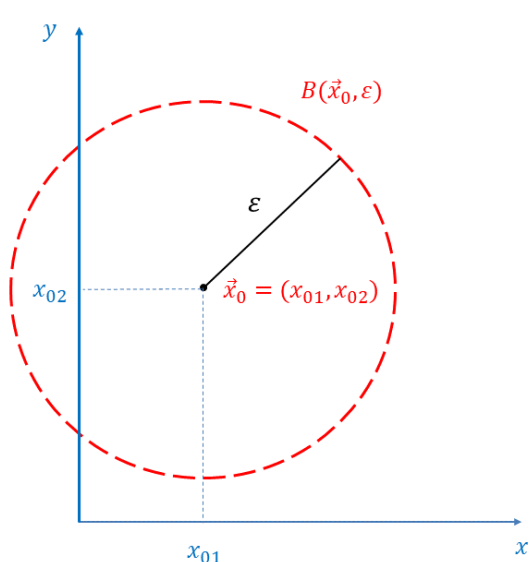
Έστω  $\vec{x} = (x_1, x_2)$  και  $\vec{x}_0 = (x_{01}, x_{02}) \in \mathbb{R}^2$ .

i) Ανοικτή μπάλα :

$$B(\vec{x}_0, \varepsilon) = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^2 : \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \varepsilon \} = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x_1 - x_{01})^2 + (x_2 - x_{02})^2} < \varepsilon \}$$

ii) Κλειστή μπάλα :

$$\bar{B}(\vec{x}_0, \varepsilon) = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^2 : \|\vec{x} - \vec{x}_0\| \leq \varepsilon \} = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x_1 - x_{01})^2 + (x_2 - x_{02})^2} \leq \varepsilon \}$$



3. Για  $n = 3$  (δηλαδή στο  $\mathbb{R}^3$ ) :

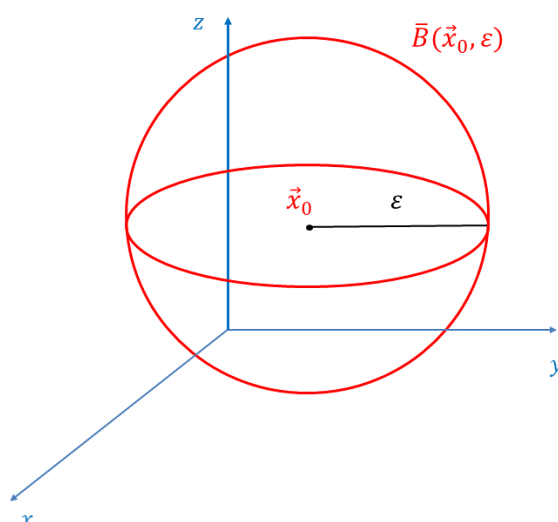
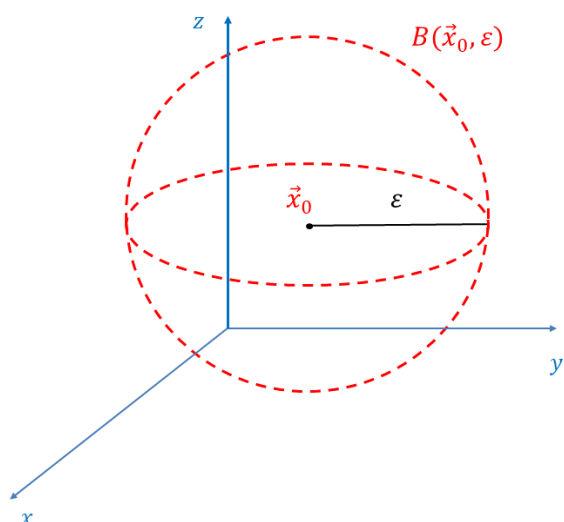
Έστω  $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$  και  $\vec{x}_0 = (x_{01}, x_{02}, x_{03}) \in \mathbb{R}^3$ .

i) Ανοικτή μπάλα :

$$B(\vec{x}_0, \varepsilon) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \varepsilon\} = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{(x_1 - x_{01})^2 + (x_2 - x_{02})^2 + (x_3 - x_{03})^2} < \varepsilon\}$$

ii) Κλειστή μπάλα :

$$\bar{B}(\vec{x}_0, \varepsilon) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : \|\vec{x} - \vec{x}_0\| \leq \varepsilon\} = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{(x_1 - x_{01})^2 + (x_2 - x_{02})^2 + (x_3 - x_{03})^2} \leq \varepsilon\}$$



**Ορισμός:** Ένα σύνολο  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  ονομάζεται **ανοικτό σύνολο** αν  $\forall x \in A, \exists \varepsilon > 0$  τέτοιο ώστε  $B(x, \varepsilon) \subseteq A$ . Δηλαδή για κάθε  $x \in A$  να υπάρχει ανοικτή μπάλα με κέντρο  $x$  και ακτίνα  $\varepsilon$  που να περιέχεται στο  $A$ .

**Ορισμός:** Ένα σύνολο  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  ονομάζεται **κλειστό σύνολο** αν το  $A^c$  είναι ανοικτό σύνολο (όπου  $A^c$  είναι το συμπλήρωμα του  $A$ ).

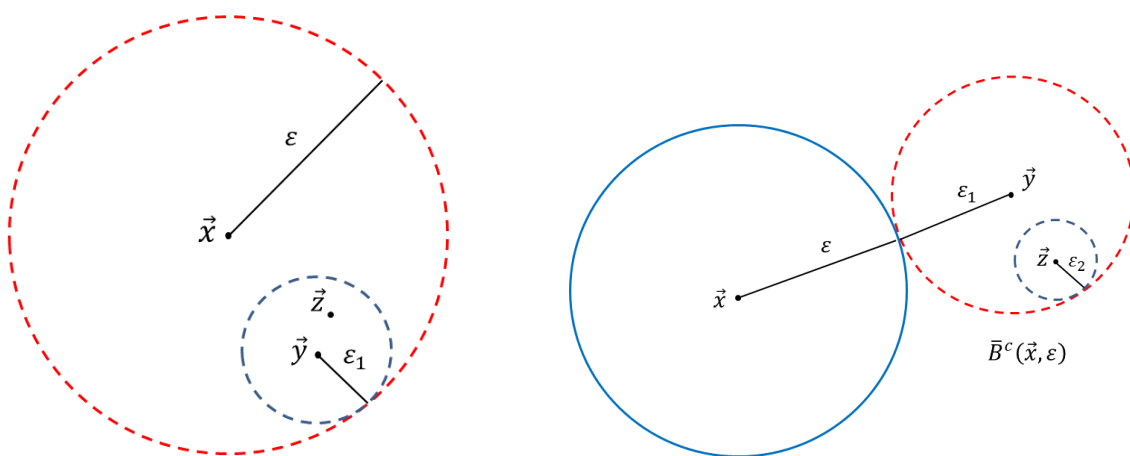
### Πρόταση:

1. Η ανοικτή μπάλα  $B(\vec{x}, \varepsilon)$  είναι ανοικτό σύνολο.
2. Η κλειστή μπάλα  $\bar{B}(\vec{x}, \varepsilon)$  είναι κλειστό σύνολο.

### Απόδειξη:

1)  $\varepsilon_1 = \varepsilon - \|\vec{x} - \vec{y}\| > 0$ , με  $\|\vec{x} - \vec{y}\| < \varepsilon$ . Ισχύει ότι:  $B(\vec{y}, \varepsilon_1) \subseteq B(\vec{x}, \varepsilon)$  καθώς αν  $\vec{z} \in B(\vec{y}, \varepsilon_1) \Rightarrow \|\vec{z} - \vec{x}\| \leq \|\vec{x} - \vec{y}\| + \|\vec{y} - \vec{z}\| \leq \|\vec{x} - \vec{y}\| + \varepsilon_1 = \varepsilon \Rightarrow \vec{z} \in B(\vec{x}, \varepsilon) \Rightarrow B(\vec{x}, \varepsilon)$  ανοικτό σύνολο.

2) Για ναδειχθεί ότι το  $\bar{B}(\vec{x}, \varepsilon)$  είναι κλειστό σύνολο, αρκεί ναδειχθεί ότι το  $\bar{B}^c(\vec{x}, \varepsilon)$  είναι ανοικτό. Για  $\vec{y} \in \bar{B}^c(\vec{x}, \varepsilon)$  έχω  $\varepsilon_1 = \|\vec{x} - \vec{y}\| - \varepsilon > 0 \Rightarrow B(\vec{y}, \varepsilon_1) \subseteq \bar{B}^c(\vec{x}, \varepsilon) \Rightarrow \bar{B}^c(\vec{x}, \varepsilon)$  ανοικτό  $\Rightarrow \bar{B}(\vec{x}, \varepsilon)$  κλειστό.



**Ορισμός:** Το καρτεσιανό γινόμενο  $I = I_1 \times I_2 \times \dots \times I_n$  των διαστημάτων  $I_1, I_2, \dots, I_n$  του  $\mathbb{R}$  ονομάζεται **ορθογώνιο** του  $\mathbb{R}^n$ . Όταν τα μήκη των  $I_1, I_2, \dots, I_n$  είναι ίσα, ονομάζεται **κύβος** του  $\mathbb{R}^n$ .

**Ορισμός:** Έστω  $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n), \vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ .

**Ανοικτό ορθογώνιο** του  $\mathbb{R}^n$  ονομάζεται το καρτεσιανό γινόμενο  $R^o(\vec{a}, \vec{b}) = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \dots \times (a_n, b_n)$  των ανοικτών διαστημάτων  $(a_i, b_i)$ , με  $a_i < b_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ).

**Ανοικτός κύβος** ονομάζεται το καρτεσιανό γινόμενο  $C^o(\vec{a}, \varepsilon) = (a_1 - \varepsilon, a_1 + \varepsilon) \times (a_2 - \varepsilon, a_2 + \varepsilon) \times \dots \times (a_n - \varepsilon, a_n + \varepsilon)$  των ισομερών ανοικτών διαστημάτων  $(a_i - \varepsilon, a_i + \varepsilon)$ ,  $1 \leq i \leq n$ .

**Ορισμός:** Έστω  $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n), \vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ .

**Κλειστό ορθογώνιο** του  $\mathbb{R}^n$  ονομάζεται το καρτεσιανό γινόμενο  $R(\vec{a}, \vec{b}) = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$  των κλειστών διαστημάτων  $[a_i, b_i]$ , με  $a_i < b_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ).

**Κλειστός κύβος** ονομάζεται το καρτεσιανό γινόμενο  $C(\vec{a}, \varepsilon) = [a_1 - \varepsilon, a_1 + \varepsilon] \times [a_2 - \varepsilon, a_2 + \varepsilon] \times \dots \times [a_n - \varepsilon, a_n + \varepsilon]$  των ισομερών κλειστών διαστημάτων  $[a_i - \varepsilon, a_i + \varepsilon]$ ,  $1 \leq i \leq n$ .

### Παραδείγματα:

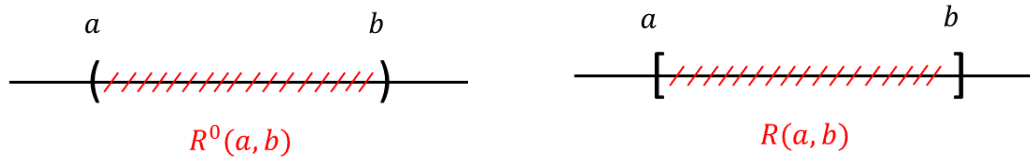
1. Για  $n = 1$ , δηλαδή στο  $\mathbb{R}$ :

i) Ανοικτό ορθογώνιο:

$R^o(a, b) = (a, b)$  (δηλαδή το ανοικτό διάστημα).

ii) Κλειστό ορθογώνιο:

$R(a, b) = [a, b]$  (δηλαδή το κλειστό διάστημα).



**2.** Για  $n = 2$ , δηλαδή στο  $\mathbb{R}^2$  :

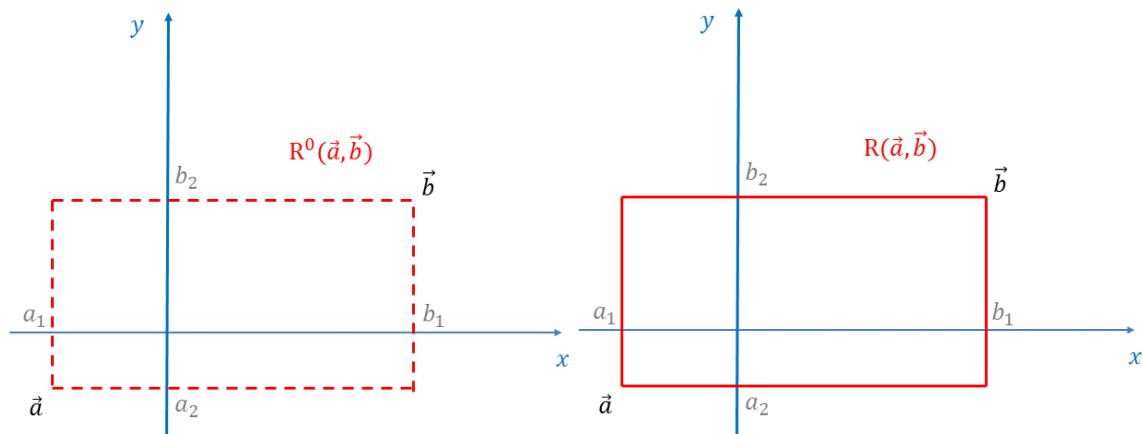
Έστω  $\vec{a} = (a_1, a_2)$ ,  $\vec{b} = (b_1, b_2)$

i) Ανοιχτό ορθογώνιο:

$$R^o(\vec{a}, \vec{b}) = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2).$$

ii) Κλειστό ορθογώνιο:

$$R(\vec{a}, \vec{b}) = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2].$$



**3.** Για  $n = 3$ , δηλαδή στο  $\mathbb{R}^3$  :

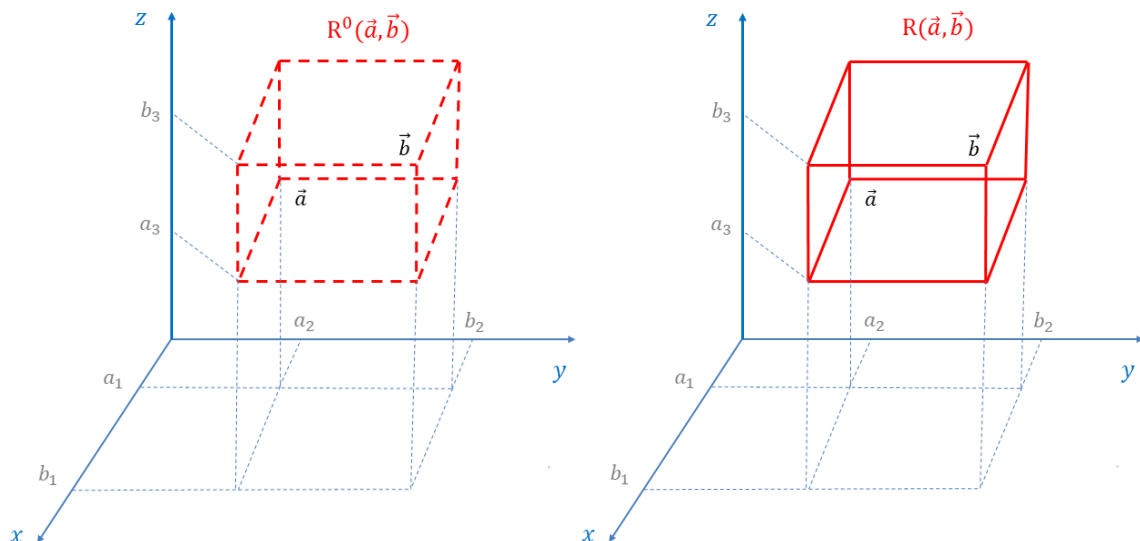
Έστω  $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ,  $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$

i) Ανοιχτό ορθογώνιο:

$$R^o(\vec{a}, \vec{b}) = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times (a_3, b_3).$$

ii) Κλειστό ορθογώνιο:

$$R(\vec{a}, \vec{b}) = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3].$$



**Πρόταση:**

1. Το ανοικτό ορθογώνιο  $R^o(\vec{a}, \vec{b})$  είναι ανοικτό σύνολο.
2. Το κλειστό ορθογώνιο  $R(\vec{a}, \vec{b})$  είναι κλειστό σύνολο.

**Ορισμός:** Έστω  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ . Ένα  $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$  λέγεται **σημείο συσσώρευσης (σ.σ.)** του  $A$

αν  $\forall \varepsilon > 0 \quad (B(\vec{x}_0, \varepsilon) \setminus \{\vec{x}_0\}) \cap A \neq \emptyset \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \vec{a} \in A : 0 < \|\vec{x}_0 - \vec{a}\| < \varepsilon$ .

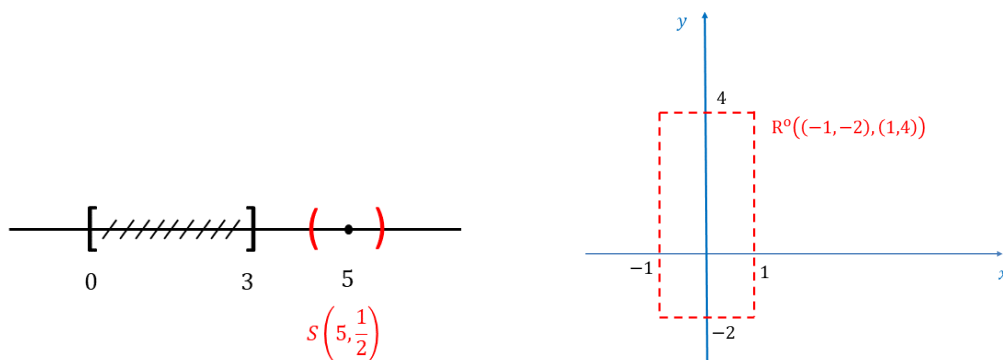
Το σύνολο των σ.σ. του  $A$  συμβολίζεται με  $A'$ .

**Ορισμός:** Έστω  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ . Ένα  $\vec{x}_0 \in A$  λέγεται **μεμονωμένο σημείο** του  $A$

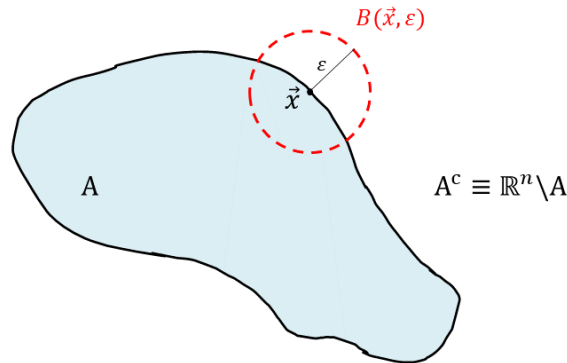
αν δεν είναι σ.σ.  $\Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 : (B(\vec{x}_0, \varepsilon) \setminus \{\vec{x}_0\}) \cap A = \emptyset \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 : B(\vec{x}_0, \varepsilon) \cap A = \{\vec{x}_0\}$ .

**Παραδείγματα:**

1. Έστω  $A = [0, 3]$ . Τότε το σύνολο των σημείων συσσώρευσης του  $A$  είναι το  $A' = [0, 3]'$ . Ομοίως  $(0, 3)' = [0, 3]' = (0, 3]' = [0, 3]$ .
2. Έστω  $A = [0, 3] \cup \{5\}$ . Τότε το σύνολο των σημείων συσσώρευσης είναι το  $A' = [0, 3]$  και το  $\{5\}$  είναι μεμονωμένο σημείο, καθώς  $\exists \varepsilon > 0$  (έστω  $\varepsilon = \frac{1}{2}$ ) ώστε  $B(5, \frac{1}{2}) \cap A = \{5\}$ .
3. Έστω το ανοικτό ορθογώνιο του  $\mathbb{R}^2$   $R^o((-1, -2), (1, 4)) = (-1, 1) \times (-2, 4)$ . Τότε το σύνολο των σημείων συσσώρευσης του  $R^o$  είναι το  $R'((-1, -2), (1, 4)) = [-1, 1] \times [-2, 4]$ .



**Ορισμός:** Έστω  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ . **Σύνορο** του  $A$  λέγεται το σύνολο  $\partial A = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \forall \varepsilon > 0 \quad B(\vec{x}, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset \text{ και } B(\vec{x}, \varepsilon) \cap (\mathbb{R}^n \setminus A) \neq \emptyset\}$ .



**Παραδείγματα:**

1. Έστω το σύνολο  $A = [0, 3]$ . Το σύνορο του  $A$  είναι το  $\partial A = \partial([0, 3]) = \{0, 3\}$ .
2. Έστω το ορθογώνιο  $R^o((-1, -2), (1, 4)) = (-1, 1) \times (-2, 4)$ . Το σύνορο του  $R^o$  είναι το  $\partial R^o = \{(x, -2) : -1 \leq x \leq 1\} \cup \{(-1, y) : -2 \leq y \leq 4\} \cup \{(x, 4) : -1 \leq x \leq 1\} \cup \{(1, y) : -2 \leq y \leq 4\}$ . (Δηλαδή η περίμετρος του ορθογωνίου  $R^o$ )
3. Έστω μία μπάλα  $B(x_0, \varepsilon)$ . Το σύνορο της είναι :  $\partial B(x_0, \varepsilon) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \|\vec{x} - \vec{x}_0\| = \varepsilon\}$ .

**Πρόταση:** Έστω  $A \in \mathbb{R}^n$ . Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

- 1)  $A$  κλειστό σύνολο
- 2)  $A' \subseteq A$
- 3)  $\partial A \subseteq A$

## Ακολουθίες του $\mathbb{R}^n$

**Ορισμός:** Μία συνάρτηση  $\vec{a} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^n$  ονομάζεται **ακολουθία του  $\mathbb{R}^n$**  (όπου  $\mathbb{N}$  το σύνολο των φυσικών αριθμών).

**Συμβολισμός:** Η τιμή  $\vec{a}(\nu)$  της συνάρτησης  $\vec{a}$  για κάποιο  $\nu \in \mathbb{N}$  συμβολίζεται με  $\vec{a}_\nu$  και η ακολουθία  $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^n$  συμβολίζεται με  $(\vec{a}_\nu)$ . Η τιμή  $\vec{a}_\nu$  ονομάζεται  $\nu$ -οστός όρος της ακολουθίας  $(\vec{a}_\nu)$  και είναι ένα διάνυσμα του  $\mathbb{R}^n$  της μορφής  $\vec{a}_\nu = (a_{1\nu}, a_{2\nu}, \dots, a_{n\nu})$ . Έτσι, οι ακολουθίες  $(a_{n1}), (a_{n2}), \dots, (a_{n\nu})$  του  $\mathbb{R}$  ονομάζονται συνιστώσες ακολουθίες της ακολουθίας  $(\vec{a}_\nu)$  του  $\mathbb{R}^n$ .

**Ορισμός:** Μία ακολουθία  $(\vec{a}_\nu)$  του  $\mathbb{R}^n$  λέμε ότι **συγκλίνει** στο στοιχείο  $\vec{a}$  του  $\mathbb{R}^n$  ή ότι έχει όριο το  $\vec{a}$  (δηλαδή  $\vec{a}_\nu \rightarrow \vec{a}$ ), όταν η ακολουθία  $(\|\vec{a}_\nu - \vec{a}\|)$  του  $\mathbb{R}$  είναι μηδενική (δηλαδή  $\|\vec{a}_\nu - \vec{a}\| \rightarrow 0$ ), δηλαδή όταν για κάθε  $\varepsilon > 0$  υπάρχει φυσικός αριθμός  $N = N(\varepsilon)$  έτσι ώστε να ισχύει:

$$\|\vec{a}_\nu - \vec{a}\| < \varepsilon \quad \text{για κάθε } \nu \geq N.$$

Μία ακολουθία  $(\vec{a}_\nu)$  του  $\mathbb{R}^n$  που έχει όριο ονομάζεται **συγκλίνουσα** ακολουθία του  $\mathbb{R}^n$ . Το όριο  $\vec{a}$  της ακολουθίας  $(\vec{a}_\nu)$  συμβολίζεται και ως  $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \vec{a}_\nu = \vec{a}$  ή  $\lim \vec{a}_\nu = \vec{a}$ .

**Πρόταση:** Το όριο μίας ακολουθίας  $(\vec{a}_\nu)$  του  $\mathbb{R}^n$  (αν υπάρχει) είναι μοναδικό.

**Θεώρημα:** Έστω  $(\vec{a}_\nu)$  μια ακολουθία του  $\mathbb{R}^n$  και  $(\vec{a}_{i\nu})$  ( $1 \leq i \leq n$ ) οι συνιστώσες ακολουθίες της  $(\vec{a}_\nu)$ . Επίσης έστω  $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  ένα στοιχείο του  $\mathbb{R}^n$ . Τότε τα ακόλουθα

είναι ισοδύναμα:

- 1)  $\vec{a}_\nu \rightarrow \vec{a}$
- 2)  $a_{i\nu} \rightarrow a_i$  (για κάθε  $1 \leq i \leq n$ ) .

**Πρόταση:** Έστω  $(\vec{a}_\nu)$  μια ακολουθία του  $\mathbb{R}^n$  και  $\vec{a}$  ένα στοιχείο του  $\mathbb{R}^n$ . Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

- 1) Αν  $\vec{a}_\nu \rightarrow \vec{a}$  τότε  $\|\vec{a}_\nu\| \rightarrow \|\vec{a}\|$  (Το αντίστροφο δεν ισχύει) .
- 2)  $\vec{a}_\nu \rightarrow \vec{0}$  αν και μόνο αν  $\|\vec{a}_\nu\| \rightarrow 0$  .

**Θεώρημα:** Έστω  $(\vec{a}_\nu)$  και  $(\vec{b}_\nu)$  δύο συγκλίνουσες ακολουθίες του  $\mathbb{R}^n$  με όρια τα στοιχεία  $\vec{a}$  και  $\vec{b}$  του  $\mathbb{R}^n$  αντίστοιχα, δηλαδή  $\vec{a}_\nu \rightarrow \vec{a}$  και  $\vec{b}_\nu \rightarrow \vec{b}$ . Τότε ισχύουν τα παρακάτω:

- 1)  $\vec{a}_\nu + \vec{b}_\nu \rightarrow \vec{a} + \vec{b}$
- 2)  $\lambda \vec{a}_\nu \rightarrow \lambda \vec{a}$  ( $\lambda \in \mathbb{R}$ )
- 3)  $\vec{a}_\nu \cdot \vec{b}_\nu \rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b}$
- 4)  $\vec{a}_\nu \times \vec{b}_\nu \rightarrow \vec{a} \times \vec{b}$  (για  $n = 3$ ) .

**Ορισμός:** Μία ακολουθία  $(k_\nu)$  φυσικών αριθμών τέτοια ώστε  $k_\nu < k_{\nu+1}$  για κάθε  $\nu \in \mathbb{N}$  ονομάζεται υπακολουθία φυσικών αριθμών.

**Ορισμός:** Έστω ακολουθία  $(\vec{a}_\nu)$  του  $\mathbb{R}^n$  και  $(k_\nu)$  μία υπακολουθία φυσικών αριθμών. Τότε η ακολουθία  $(\vec{a}_{k_\nu})$  ονομάζεται **υπακολουθία** της ακολουθίας  $(\vec{a}_\nu)$ .

**Πρόταση:** Αν μία ακολουθία  $(\vec{a}_\nu)$  του  $\mathbb{R}^n$  συγκλίνει στο  $\vec{a}$  του  $\mathbb{R}^n$  (δηλαδή  $\vec{a}_\nu \rightarrow \vec{a}$ ), τότε κάθε υπακολουθία της  $\vec{a}_{k_\nu}$  συγκλίνει στο  $\vec{a}$  (δηλαδή  $\vec{a}_{k_\nu} \rightarrow \vec{a}$ ).

**Ορισμός:** Μία ακολουθία  $(\vec{a}_\nu)$  του  $\mathbb{R}^n$  ονομάζεται **φραγμένη** όταν υπάρχει πραγματικός αριθμός  $M > 0$  τέτοιος ώστε να ισχύει:

$$\|\vec{a}_\nu\| \leq M \quad \text{για κάθε } \nu \in \mathbb{N} .$$

**Πρόταση:** Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία  $(\vec{a}_\nu)$  του  $\mathbb{R}^n$  είναι φραγμένη.

**Θεώρημα (Bolzano – Weierstrass) :** Κάθε φραγμένη ακολουθία του  $\mathbb{R}^n$  έχει μία συγκλίνουσα υπακολουθία.

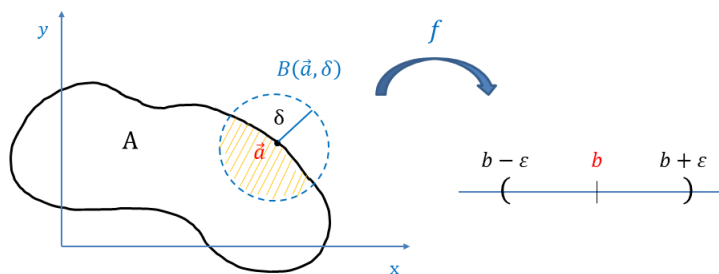
## Όρια Πραγματικών Συναρτήσεων

Έστω  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Το  $\vec{a}$  καλείται σημείο συσσώρευσης του  $A$  και γράφουμε:

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} f(\vec{x}) = b, \quad b \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) = \delta > 0 : |f(\vec{x}) - b| < \varepsilon, \text{ για κάθε } \vec{x} \in A \\ \text{με } 0 < \|\vec{x} - \vec{a}\| < \delta.$$

## Γεωμετρική Ερμηνεία της Έννοιας του Ορίου Πραγματικής Συνάρτησης



## Μοναδικότητα του Ορίου

Το όριο όταν υπάρχει, είναι μοναδικό.

## Αλγεβρικές Ιδιότητες Ορίων

Έστω  $f, g : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  και το  $\vec{\alpha}$  σημείο συσσώρευσης του  $A$ . Επίσης, έστω ότι υπάρχουν και τα όρια:

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{\alpha}} f(\vec{x}) \text{ και } \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{\alpha}} g(\vec{x})$$

. Τότε υπάρχουν και τα παρακάτω όρια:

•

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{\alpha}} (f(\vec{x}) + g(\vec{x})) = \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{\alpha}} f(\vec{x}) + \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{\alpha}} g(\vec{x})$$

•

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{\alpha}} \lambda f(\vec{x}) = \lambda \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{\alpha}} f(\vec{x})$$

•

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{\alpha}} (f(\vec{x})g(\vec{x})) = \left( \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{\alpha}} f(\vec{x}) \right) \left( \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{\alpha}} g(\vec{x}) \right)$$

•

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{\alpha}} \frac{f(\vec{x})}{g(\vec{x})} = \frac{\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{\alpha}} f(\vec{x})}{\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{\alpha}} g(\vec{x})}, \quad \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{\alpha}} g(\vec{x}) \neq 0$$

## ΑΣΚΗΣΗ 1

Να αποδείξετε ότι:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = 0$$

### Λύση

Θα χρησιμοποιήσουμε Πολικές Συντεταγμένες, δηλαδή  $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ .

Με αντικατάσταση πάνω στο όριο προκύπτει το εξής:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^3 \cos^2 \theta \sin \theta}{r^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)} = \lim_{r \rightarrow 0} r \cos^2 \theta \sin \theta = 0$$

Διότι  $r \rightarrow 0$  (μηδενική) και  $\cos^2 \theta \sin \theta$  φραγμένη, άρα όλη η ποσότητα τείνει στο μηδέν (μηδενική επί φραγμένη είναι μηδενική). Τέλος, αφού το όριο είναι μοναδικό ισχύει το ζητούμενο.

## ΑΣΚΗΣΗ 2

Να αποδείξετε ότι:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left( x + y \sin \frac{1}{x} \right) = 0, \quad x \neq 0$$

**Λύση**

Έχουμε ότι

$$\left| x + y \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x| + |y| \left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x| + |y| \rightarrow 0$$

καθώς τα  $x$  και  $y$  τείνουν στο μηδέν. Δηλαδή

$$0 \leq \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left( x + y \sin \frac{1}{x} \right) \leq 0$$

Επομένως,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left( x + y \sin \frac{1}{x} \right) = 0$$

## Αρχή της Μεταφοράς ή Ακολουθιακό Κριτήριο

Έστω  $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  και το  $\vec{\alpha}$  σημείο συσσώρευσης του  $A$ . Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

- Υπάρχει το  $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{\alpha}} f(\vec{x}) = b$
- Για κάθε ακολουθία  $(\vec{x}_\nu)$  του  $A$  με  $\vec{x}_\nu \neq \vec{\alpha} \quad \forall \nu \in \mathbb{N}$  και  $\vec{x}_\nu \rightarrow \vec{\alpha}$  έχουμε  $f(\vec{x}_\nu) \rightarrow b$

## ΑΣΚΗΣΗ 3

Εξετάστε αν υπάρχει το όριο:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} x \sin \frac{1}{y}$$

### Λύση

Θα χρησιμοποιήσουμε την Αρχή της Μεταφοράς. Θέτω

$$f(x, y) = x \sin \frac{1}{y}, \quad y \neq 0$$

Θεωρούμε τις ακολουθίες  $(\vec{v}_\nu)$  και  $(\vec{w}_\nu)$  ως εξής:

$$\begin{aligned}(\vec{v}_\nu) &= \left(1, \frac{1}{2\nu\pi}\right) \rightarrow (1, 0) \\(\vec{w}_\nu) &= \left(1, \frac{1}{2\nu\pi + \frac{\pi}{2}}\right) \rightarrow (1, 0)\end{aligned}$$

Θεωρούμε τις αντίστοιχες ακολουθίες των τιμών της συνάρτησης

$$\begin{aligned}f(\vec{v}_\nu) &= f\left(1, \frac{1}{2\nu\pi}\right) = \sin(2\nu\pi) = 0 \rightarrow 0 \\f(\vec{w}_\nu) &= f\left(1, \frac{1}{2\nu\pi + \frac{\pi}{2}}\right) = \sin\left(2\nu\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \rightarrow 1\end{aligned}$$

Επομένως από την Αρχή της Μεταφοράς, δεν υπάρχει το όριο.