

Κριτήριο μή - Ύπαρξης του Ορίου

Έστω $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2)$ σ.σ του A . Τότε αν δύο διαφορετικές καμπύλες (δρόμοι) οδηγούν σε διαφορετικά όρια, λόγω της μοναδικότητας του ορίου συνεπάγεται ότι δεν υπάρχει το όριο.

ΑΣΚΗΣΗ 1

Εξετάστε αν υπάρχει το όριο:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{x^2 + (x-y)^8}$$

Λύση

Θα ακολουθήσουμε δύο διαφορετικούς δρόμους (καμπύλες)

- y - άξονας (δηλαδή $x = 0$).

$$\lim_{y \rightarrow 0} f(0, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0}{0 + (0 - y)^8} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0}{y^8} = \lim_{y \rightarrow 0} 0 = 0$$

(Σχόλιο: Η πράξη μέσα στο όριο προηγείται. Μετά βάζουμε το όριο).

- $x = y$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2 + 0} = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$$

Επομένως το όριο της $f(x, y)$ για $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ δεν υπάρχει.

ΑΣΚΗΣΗ 2

Εξετάστε αν υπάρχει το όριο:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

Λύση

Θα ακολουθήσουμε δύο διαφορετικούς δρόμους (καμπύλες)

- y - άξονας ($x = 0$)

$$\lim_{y \rightarrow 0} f(0, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-y^2}{y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} -1 = -1$$

- x - άξονας ($y = 0$)

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$$

Επομένως το όριο της $f(x, y)$ για $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ δεν υπάρχει.

ΑΣΚΗΣΗ 3

Εξετάστε αν υπάρχει το όριο:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

Λύση

Θα ακολουθήσουμε δύο διαφορετικούς δρόμους (καμπύλες)

- y - άξονας ($x = 0$)

$$\lim_{y \rightarrow 0} f(0, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0}{y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} 0 = 0$$

- $x = y$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Επομένως το όριο της $f(x, y)$ για $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ δεν υπάρχει.

ΑΣΚΗΣΗ 4

Εξετάστε αν υπάρχει το όριο:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^3 + y^3}$$

Λύση

Θα ακολουθήσουμε δύο διαφορετικούς δρόμους (καμπύλες)

- y – άξονας ($x = 0$)

$$\lim_{y \rightarrow 0} f(0, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0}{y^3} = \lim_{y \rightarrow 0} 0 = 0$$

- $x = y^2$

$$\lim_{y \rightarrow 0} f(y^2, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^3}{y^6 + y^3} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^3}{y^3(y^3 + 1)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{y^3 + 1} = 1$$

Επομένως το όριο της $f(x, y)$ για $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ δεν υπάρχει.

Όρια Διανυσματικών Συναρτήσεων

Έστω $\vec{f} : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ και το $\vec{\alpha}$ σημείο συσσώρευσης του A και $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ τότε:

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{\alpha}} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{b}$$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) = \delta > 0 : \|\vec{f}(\vec{x}) - \vec{b}\| < \varepsilon, \text{ για κάθε } \vec{x} \in A$
με $0 < \|\vec{x} - \vec{\alpha}\| < \delta$.

ΘΕΩΡΗΜΑ: Έστω $\vec{f} : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, με $\vec{f} = (f_1, \dots, f_j, \dots, f_m)$, το $\vec{\alpha}$ σημείο συσσώρευσης του A και $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

- $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{\alpha}} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{b} = (b_1, \dots, b_j, \dots, b_m), \quad 1 \leq j \leq m$
- $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{\alpha}} f_j(\vec{x}) = b_j, \quad \forall j = 1, 2, \dots, m$

ΑΣΚΗΣΗ 5

Να αποδείξετε ότι:

$$\vec{f}(x, y) = \left(\frac{x^2 y}{x^2 + y^2}, x + y \sin \frac{1}{x} \right) \rightarrow (0, 0)$$

Λύση

Έστω $\vec{f} = (f_1, f_2)$ με $f_1(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$ και $f_2(x, y) = x + y \sin \frac{1}{x}$.

Για να υπάρχει το όριο της διανυσματικής συνάρτησης $\vec{f}$ πρέπει να υπάρχει το όριο της κάθε συνιστώσας της, δηλαδή να υπάρχουν τα όρια των πραγματικών συναρτήσεων f_1 και f_2 .

$$\text{Επιπλέον, } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \vec{f}(x, y) = \left(\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f_1(x, y), \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f_2(x, y) \right).$$

Έχουμε ότι:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f_1(x,y) = 0 \text{ και } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f_2(x,y) = 0.$$

$$\text{Επομένως, } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \vec{f}(x,y) = (0,0).$$

ΑΣΚΗΣΗ 6

Εξετάστε αν υπάρχει το όριο:

$$\vec{G}(x,y) = \left(\frac{xy}{x^2 + y^2}, \frac{x^2y}{x^2 + y^2} \right)$$

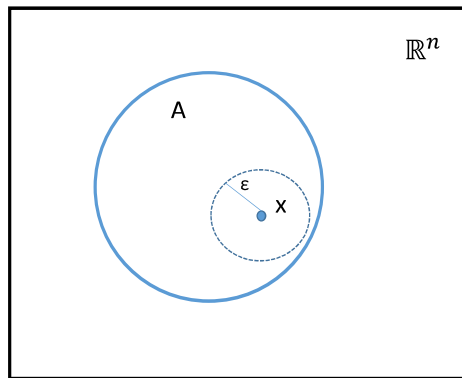
Λύση

Έστω $\vec{G} = (G_1, G_2)$. Το όριο της διανυσματικής συνάρτησης $\vec{G}$ δεν υπάρχει διότι από Άσκηση 6 δεν υπάρχει το όριο της συνάρτησης G_1 .

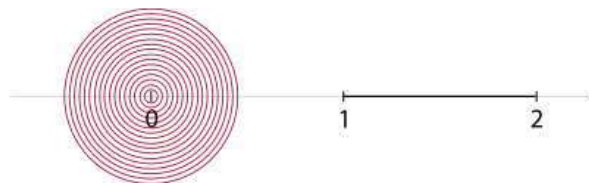
1 Σύντομη υπενθύμιση θεωρίας ορίων και συνέχειας

Έστω A ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$.

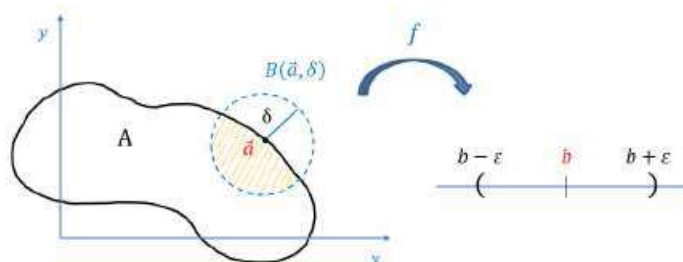
- Ένα σημείο a του A ονομάζεται **σημείο συσσώρευσης** του A όταν $\forall \varepsilon > 0$ ισχύει ότι $A \cap (B_\varepsilon(a) \setminus \{a\}) \neq \emptyset$, δηλαδή όταν κάθε ανοικτή ε -μπάλα $B_\varepsilon(a)$ (με κέντρο το a και ακτίνα ε περιέχει ένα τουλάχιστον σημείο του A διαφορετικό του a .



- Ένα σημείο a του A ονομάζεται **μεμονωμένο σημείο** του A όταν υπάρχει $\delta > 0$ έτσι ώστε να ισχύει $B_\delta(a) \cap A = \{a\}$.



- Έστω $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ μία πραγματική συνάρτηση n μεταβλητών με πεδίο ορισμού A υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και έστω a ένα σημείο συσσώρευσης του A . Λέμε ότι η f έχει όριο ένα $b \in \mathbb{R}$ όταν το x τείνει στο a και γράφουμε $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ αν και μόνο αν $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ τέτοιο ώστε $\forall x \in A$ με $0 < \|x - a\| < \delta$ ισχύει ότι $\|f(x) - b\| < \varepsilon$.



- Όταν a είναι μεμονωμένο σημείο του A τότε $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

- Το $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ όταν υπάρχει, είναι μοναδικό.
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = |b|$. (Το αντίστροφο δεν ισχύει γενικά)
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = 0$
- Έστω $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ μία πραγματική συνάρτηση n μεταβλητών με πεδίο ορισμού A υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και έστω $a \in A$. Λέμε ότι η f είναι συνεχής στο $a \in A$ αν και μόνο αν

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) ,$$

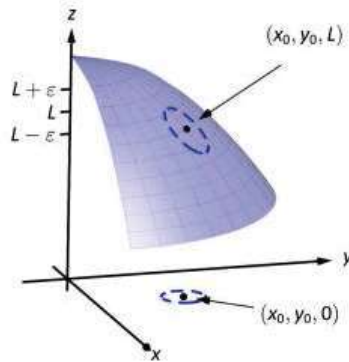
δηλαδή το όριο υπάρχει και ισούται με την τιμή της συνάρτησης στο σημείο αυτό. Όταν πούμε ότι η f είναι συνεχής εννοούμε σε κάθε σημείο $a \in A$. Αν η f δεν είναι συνεχής στο $a \in A$ τότε λέμε ότι είναι ασυνεχής στο a .

- (συνέχεια με ε και δ)
Έστω $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Η f είναι συνεχής στο $a \in A$ αν και μόνο αν $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ τέτοιο ώστε $\forall x \in A$ με $\|x - a\| < \delta$ έπεται ότι $\|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$.
- Σημείωση: Στη συνέχεια δεν γράφουμε το $\|x - a\| > 0$ όπως στο όριο.

2 Όριο και συνέχεια διανυσματικών συναρτήσεων

Έστω A ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και έστω $f = (f_1, f_2, \dots, f_m) : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ διανυσματική συνάρτηση n μεταβλητών με πεδίο ορισμού το A και τιμές στο $\mathbb{R}^m$. Οι συνιστώσες $f_j : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ($j = 1, 2, \dots, m$) της f είναι πραγματικές συναρτήσεις.

- Έστω a εσωτερικό ή συνοριακό σημείο του A . Λέμε ότι η f έχει όριο ένα $b \in \mathbb{R}^m$ όταν το x τείνει στο a και γράφουμε $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ αν και μόνο αν $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ τέτοιο ώστε $\forall x \in A$ με $0 < \|x - a\| < \delta$ ισχύει ότι $\|f(x) - b\| < \varepsilon$.



- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ [ισοδύναμα $\lim_{(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (a_1, a_2, \dots, a_n)} (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)) = (b_1, b_2, \dots, b_m)$]
 $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f_j(x) = b_j$
- Η $f = (f_1, \dots, f_m)$ είναι συνεχής στο $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in A$ αν και μόνο αν $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ τέτοιο ώστε $\forall x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in A$ με $\|x - a\| < \delta$ ισχύει ότι $\|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$.
- Αντίστοιχα γράφονται και ως $\|(x_1, x_2, \dots, x_n) - (a_1, a_2, \dots, a_n)\| < \delta$,
 $\|(f_1(x_1, \dots, x_n), f_2(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)) - (f_1(a_1, \dots, a_n), f_2(a_1, \dots, a_n), \dots, f_m(a_1, \dots, a_n))\| < \varepsilon$.

3 Ασκήσεις

Άσκηση

α) Μπορεί η $\frac{\sin(x+y)}{x+y}$ να γίνει συνεχής ορίζοντάς την κατάλληλα στο $(0,0)$;

β) Ομοίως για την $\frac{xy}{x^2+y^2}$.

γ) Να δείξετε ότι είναι συνεχής η $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f(x, y) = ye^x + \sin x + (xy)^4.$$

Λύση

α) Η συνάρτηση $\frac{\sin(x+y)}{x+y}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) : x+y=0\}$ ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων, εφόσον ο παρονομαστής είναι διάφορος του μηδέν στο σύνολο αυτό. Επομένως θέλουμε να δούμε αν μπορούμε να ορίσουμε κατάλληλα τη συνάρτηση στο σύνολο $\{(x, y) : x+y=0\}$ ώστε να είναι συνεχής και στο σύνολο αυτό (άρα και στο ζητούμενο $(0,0)$ σημείο).

Θα δούμε αρχικά αν υπάρχει το όριο στο σύνολο αυτό. Έστω λοιπόν $(a, b) \in \{(x, y) : x+y=0\}$. Θέτουμε $x+y=h$. Τότε για $(x, y) \rightarrow (a, b)$ έχουμε ότι $x+y \rightarrow a+b$ δηλαδή $h \rightarrow 0$ και το όριο είναι:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \frac{\sin(x+y)}{x+y} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1.$$

δηλαδή υπάρχει και είναι ίσο με 1. Επομένως μπορούμε να ορίσουμε τη συνάρτηση ως εξής:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(x+y)}{x+y}, & x+y \neq 0 \\ 1, & x+y = 0 \end{cases},$$

δηλαδή ορίζοντας $f(a, b) = 1$ (και άρα $f(0,0) = 1$) για κάθε $(a, b) \in \{(x, y) : x+y=0\}$, η συνάρτηση είναι συνεχής σε όλο το $\mathbb{R}^2$.

β) Το $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ δεν υπάρχει.

Πράγματι, αν πάρουμε τη διαδρομή $(x=0)$ έχουμε

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{0}{y^2} = 0,$$

ενώ αν πάρουμε τη διαδρομή $(y=x)$ έχουμε

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}.$$

Επομένως δεν υπάρχει το όριο στο $(0,0)$ λόγω μοναδικότητας και συνεπώς η συνάρτηση δεν μπορεί να οριστεί καταλλήλως στο $(0,0)$ ώστε να είναι συνεχής.

γ) Έστω (a, b) τυχαίο σημείο του $\mathbb{R}^2$. Έχουμε ότι

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} y = b, \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} e^x = e^a, \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \sin x = \sin a, \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} (xy)^4 = (ab)^4,$$

η f είναι συνεχής ως άθροισμα και γινόμενο συνεχών συναρτήσεων στο $\mathbb{R}^2$.

Υπενθύμιση από Άλγεβρα

Γραμμικές απεικονίσεις

Ορισμός: Έστω $\vec{T} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Η $\vec{T}$ λέγεται γραμμική απεικόνιση, αν ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες (1) και (2):

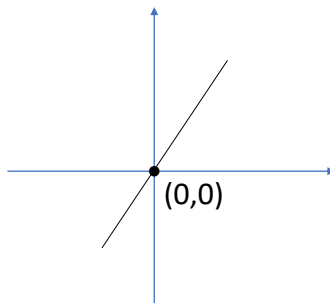
- (1) $\vec{T}(\vec{x} + \vec{y}) = \vec{T}(\vec{x}) + \vec{T}(\vec{y})$, $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$
- (2) $\vec{T}(\lambda \vec{x}) = \lambda \vec{T}(\vec{x})$, $(\lambda \in \mathbb{R}, \vec{x} \in \mathbb{R}^n)$

Σχόλια: $\vec{T} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ γραμμική απεικόνιση, τότε

- (i) $\vec{T}(\vec{0}) = \vec{0}$
- (ii) Αν $\vec{T} = (T_1, T_2, \dots, T_m)$, η $\vec{T}$ είναι γραμμική $\Leftrightarrow T_i, i = 1, 2, \dots, m$, είναι γραμμικές συναρτήσεις.

Γραμμικές συναρτήσεις

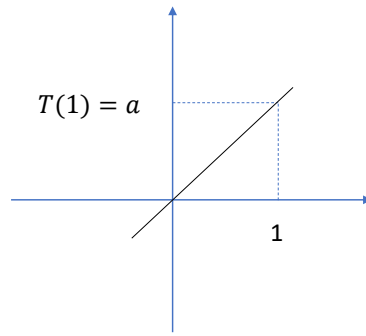
1) $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ γραμμική συνάρτηση $\Leftrightarrow T(x) = ax$ ($\exists a \in \mathbb{R} : x \in \mathbb{R}$).



Απόδειξη: Κάθε συνάρτηση της μορφής $T(x) = ax$ είναι γραμμική (δηλαδή ικανοποιεί τις (1) και (2) ιδιότητες).

Το αντίστροφο:

Έστω $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ γραμμική συνάρτηση. Έστω $a = T(1)$. Τότε $\forall x \in \mathbb{R}$, λόγω γραμμικότητας έχουμε $T(x) = T(x1) = xT(1) = ax$.



2) **Στο επίπεδο.** $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ γραμμική απεικόνιση.

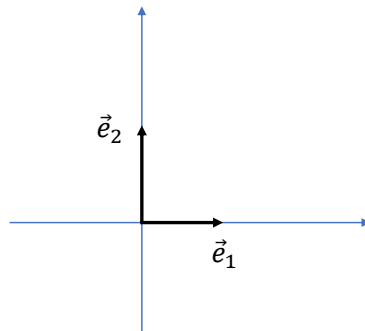
Ισχυρισμός: $\exists a, b \in \mathbb{R}$ σταθερές, ώστε $T(x, y) = ax + by$, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

($z = ax + by$ γράφημα της T είναι επίπεδο που διέρχεται από την αρχή των αξόνων $O(0,0,0)$).

Απόδειξη: Η μορφή αυτή είναι γραμμική, ικανοποιεί τις (1) και (2).

Αντίστροφα: Πώς βρίσκω τα a, b .

$T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ γραμμική. Έχουμε $\vec{e}_1 = (1, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 1)$. $T(\vec{e}_1) = a$, $T(\vec{e}_2) = b$.



Τότε $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ έχουμε $T(x, y) = T(x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2) = xT(\vec{e}_1) + yT(\vec{e}_2) = ax + by$ (επίπεδο που διέρχεται από την αρχή των αξόνων).

3) $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ γραμμική συνάρτηση. Τότε $\exists \vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n : \forall \vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ να ισχύει $T(\vec{x}) = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n$.

Απόδειξη: Μία συνάρτηση αυτής της μορφής είναι γραμμική.

Αντίστροφα: $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ γραμμική συνάρτηση, τότε για $a_1 = T(\vec{e}_1)$, $a_2 = T(\vec{e}_2)$, ..., $a_n = T(\vec{e}_n)$ και $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ παίρνουμε

$$T(\vec{x}) = T(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \dots + x_n\vec{e}_n) = x_1T(\vec{e}_1) + x_2T(\vec{e}_2) + \dots + x_nT(\vec{e}_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n.$$

Σχόλια: Δύο τρόποι αναπαράστασης της γραμμικής συνάρτησης $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

1) T γραμμική συνάρτηση, $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$

$T(\vec{x}) = \vec{a} \cdot \vec{x}$ (εσωτερικό γινόμενο).

2) $A = [a_1, a_2, \dots, a_n]$ (πίνακας γραμμή $1 \times n$)

$$T(\vec{x}) = A\vec{x} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{bmatrix}_{1 \times n} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{n \times 1} = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n$$

Γενικά $\vec{T} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ γραμμική συνάρτηση παρίσταται από έναν πίνακα A .
Έστω $\vec{T} = (T_1, T_2, \dots, T_m)$, $T_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ συνιστώσες συναρτήσεις $\forall i = 1, 2, \dots, m$

$$T(\vec{e}_1) = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \dots, T(\vec{e}_n) = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

και

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

Τότε $\forall \vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, είναι

$$\vec{T}(\vec{x}) = A_{m \times n} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{n \times 1} = \begin{bmatrix} T_1(\vec{x}) \\ T_2(\vec{x}) \\ \vdots \\ T_m(\vec{x}) \end{bmatrix}_{m \times 1}$$

Θεώρημα:

Κάθε γραμμική απεικόνιση $\vec{T} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ είναι *Lipschitz* συνεχής.

(Υπενθύμιση: Ορισμός: $\vec{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ *Lipschitz* συνεχής αν $\exists \kappa > 0 : \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n : \|\vec{f}(\vec{x}) - \vec{f}(\vec{y})\| \leq \kappa \|\vec{x} - \vec{y}\|$).

Απόδειξη: Θεωρούμε $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ γραμμική απεικόνιση.

Τότε υπάρχει $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$: $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

$$T(\vec{x}) = T(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n$$

$$T(\vec{x}) = \vec{a} \cdot \vec{x}$$

Από ανισότητα *Cauchy - Schwartz* έχουμε $|T(\vec{x})| = |\vec{a} \cdot \vec{x}| \leq \|\vec{a}\| \|\vec{x}\|$.

Για $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ έχουμε $|T(\vec{x}) - T(\vec{y})| = |T(\vec{x} - \vec{y})| \leq \|\vec{a}\| \|\vec{x} - \vec{y}\|$, δηλαδή η T είναι *Lipschitz* συνεχής (για $\|\vec{a}\| = \kappa > 0$).

Στη συνέχεια για $\vec{T} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ με $\vec{T} = (T_1, T_2, \dots, T_m)$ με $\vec{T}_i$ (για $i = 1, 2, \dots, m$) συνιστώσες *Lipschitz* συνεχείς $\Rightarrow \vec{T}$ *Lipschitz* συνεχής $\Rightarrow \vec{T}$ συνεχής.