

Μερική Παράγωγος

Μερικές Παράγωγοι

Ορισμός 1: *a*) Έστω $f(x, y) : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση δύο μεταβλητών και (a, b) ένα σημείο του U . Θεωρούμε ότι μεταβάλλεται μόνο το x ενώ το y παραμένει σταθερό σε μία τιμή $y = b$. Τότε θεωρούμε $g(x) = f(x, b)$ μία συνάρτηση μίας μεταβλητής (του x). Η παράγωγος $g'(a)$ όταν υπάρχει στο $\mathbb{R}$, ονομάζεται **μερική παράγωγος της συνάρτησης f ως προς το x στο σημείο (a, b)** και συμβολίζεται με $f_x(a, b)$. Επομένως, ορίζουμε:

$$f_x(a, b) := g'(a) \text{ , όπου } g(x) = f(x, b) \text{ ,} \quad (1)$$

με τύπο

$$g'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h} \text{ ,}$$

το οποίο μας δίνει (από τον ορισμό (1)) τον παρακάτω τύπο:

$$f_x(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h} \text{ .} \quad (2)$$

b) Αντίστοιχα, θεωρώντας ότι μεταβάλλεται μόνο το y και ότι το x παραμένει σταθερό σε μία τιμή $x = a$, τότε ορίζουμε μία συνάρτηση $h(y)$ του y και θεωρούμε $h(y) = f(a, y)$. Επομένως, η παράγωγος $h'(b)$ όταν υπάρχει στο $\mathbb{R}$, ονομάζεται **μερική παράγωγος της συνάρτησης f ως προς το y στο σημείο (a, b)** και συμβολίζεται με $f_y(a, b)$. Έτσι, ορίζουμε:

$$f_y(a, b) := h'(b) \text{ , όπου } h(y) = f(a, y) \text{ ,} \quad (3)$$

με τύπο

$$h'(b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(b+h) - h(b)}{h} \text{ ,}$$

το οποίο μας δίνει (από τον ορισμό (3)) τον παρακάτω τύπο:

$$f_y(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a, b+h) - f(a, b)}{h} \text{ .} \quad (4)$$

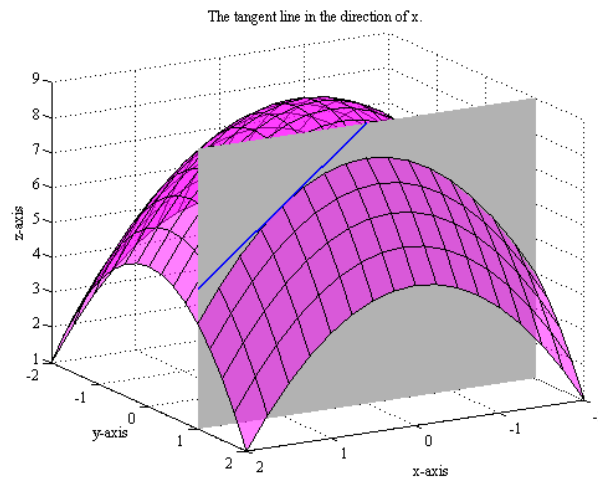
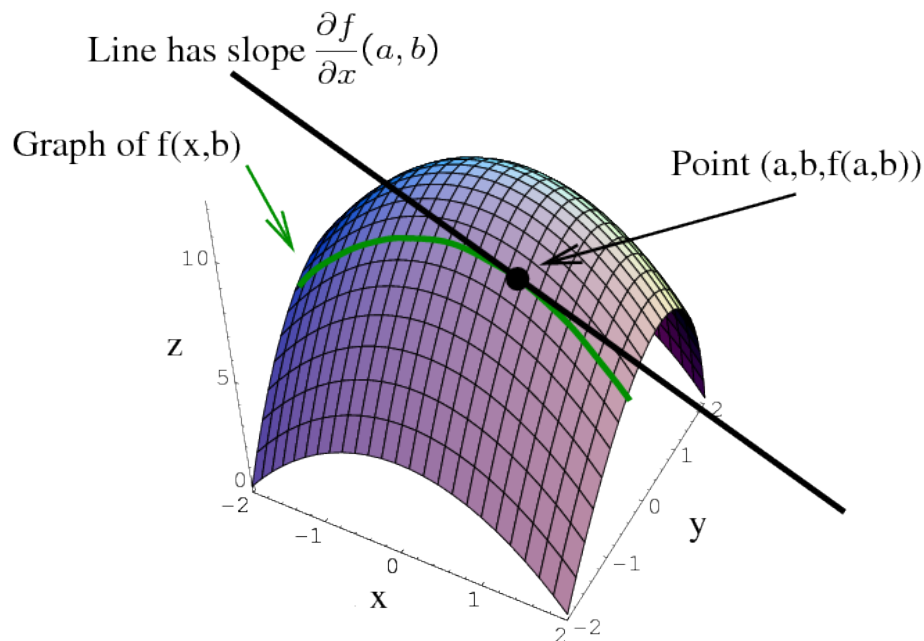
Αν το σημείο (a, b) μεταβάλλεται τότε οι f_x , f_y είναι συναρτήσεις δύο μεταβλητών.

Ορισμός 2: Έστω $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ μία πραγματική συνάρτηση δύο μεταβλητών. Τότε οι **μερικές παράγωγοι της f ως προς x και ως προς y** αντίστοιχα είναι οι πραγματικές συναρτήσεις δύο μεταβλητών f_x και f_y αντίστοιχα, με τύπους:

$$f_x(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h} \text{ ,}$$
$$f_y(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h} \text{ .}$$

Συμβολισμός: $f_x \equiv \frac{\partial f}{\partial x}$ και $f_y \equiv \frac{\partial f}{\partial y}$.

Γεωμετρική ερμηνεία: Το γράφημα μίας συνάρτησης $z = f(x, y)$ παριστάνει μία επιφάνεια S του $\mathbb{R}^3$. Έστω ένα σημείο $P_0(a, b, c)$ με $c = f(a, b)$ το οποίο ανήκει στην επιφάνεια S . Το επίπεδο $y = b$ τέμνει την S σε μία καμπύλη C_1 με εξίσωση $z = f(x, b) = g(x)$ και το επίπεδο $x = a$ τέμνει την S σε μία καμπύλη C_2 με εξίσωση $z = f(a, y) = h(y)$. Αυτές οι δύο καμπύλες διέρχονται από το σημείο P_0 . Οι μερικές παράγωγοι δίνονται από τον Ορισμό 1 ως εξής: $f_x(a, b) = g'(a)$ και $f_y(a, b) = h'(b)$. Επομένως, η μερική παράγωγος $f_x(a, b)$ στο σημείο (a, b) παριστάνει την κλίση της εφαπτόμενης της καμπύλης C_1 στο σημείο P_0 και η μερική παράγωγος $f_y(a, b)$ στο σημείο (a, b) παριστάνει την κλίση της εφαπτόμενης της καμπύλης C_2 στο σημείο P_0 . Γενικότερα, η μερική παράγωγος $f_x(x, y)$ εκφράζει τον ρυθμό μεταβολής της συνάρτησης f σε μία κατεύθυνση παράλληλη προς τον άξονα x και η μερική παράγωγος $f_y(x, y)$ εκφράζει τον ρυθμό μεταβολής της συνάρτησης f σε μία κατεύθυνση παράλληλη προς τον άξονα y .



Στα παραπάνω σχήματα βλέπουμε ότι η μερική παράγωγος $f_x(a, b) \equiv \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$ είναι η κλίση (*slope*) της εφαπτόμενης της καμπύλης $f(x, b)$ στο σημείο (a, b) .

Παρατήρηση: Για να βρούμε τη μερική παράγωγο της $f(x, y)$ ως προς x σε ένα συγκεκριμένο σημείο (a, b) του πεδίου ορισμού της είτε ακολουθούμε τον Ορισμό 2 και στο αποτέλεσμα θέτουμε $(x, y) = (a, b)$ (δηλαδή αντικαθιστούμε τα x, y με τις τιμές a, b) είτε παραγωγίζουμε τη συνάρτηση $f(x, y)$ θεωρώντας το y σταθερό και στο αποτέλεσμα αντικαθιστούμε τα x, y με τις τιμές a, b .

Αντίστοιχα δουλεύουμε για να βρούμε τη μερική παράγωγο της $f(x, y)$ ως προς y σε ένα σημείο (a, b) θεωρώντας το x σταθερό σε αυτήν την περίπτωση.

Ορισμός 3: Έστω $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ μία πραγματική συνάρτηση n μεταβλητών, όπου $f(\vec{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Τότε η **μερική παράγωγος της f ως προς τη μεταβλητή x_i** ($1 \leq i \leq n$) είναι μία πραγματική συνάρτηση n μεταβλητών f_{x_i} με τύπο:

$$f_{x_i}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i + h, x_{i+1}, \dots, x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{h}$$

(υπό την προϋπόθεση ότι υπάρχει το παραπάνω όριο στο $\mathbb{R}$).

Το παραπάνω όριο μπορεί να γραφτεί σε διανυσματική μορφή και ως :

$$f_{x_i}(\vec{x}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\vec{x} + h\vec{e}_i) - f(\vec{x})}{h},$$

όπου $\vec{e}_i$ είναι το διάνυσμα που έχει όλες τις συντεταγμένες ίσες με μηδέν εκτός από την i -οστή συντεταγμένη που είναι ίση με ένα.

Συμβολισμός: $f_{x_i} \equiv \frac{\partial f}{\partial x_i}$.

Θεώρημα 1: Έστω $f, g : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ δύο πραγματικές συναρτήσεις n μεταβλητών, για τις οποίες υπάρχουν όλες οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_i}$ και $\frac{\partial g(\vec{x})}{\partial x_i}$ ως προς τη μεταβλητή x_i για $1 \leq i \leq n$ στο σημείο $\vec{x}$. Τότε υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι:

$$\frac{\partial(f+g)(\vec{x})}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial(\lambda f)(\vec{x})}{\partial x_i} \text{ (για } \lambda \in \mathbb{R} \text{)}, \quad \frac{\partial(fg)(\vec{x})}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial\left(\frac{f}{g}\right)(\vec{x})}{\partial x_i}$$

όπου στην τελευταία περίπτωση πρέπει $g(\vec{y}) \neq 0$ για κάθε $\vec{y} \in B_\delta(\vec{x}) \subset U$ για κάποιο $\delta > 0$. Οι παραπάνω μερικές παράγωγοι δίνονται από τους τύπους:

$$\begin{aligned} 1) \quad & \frac{\partial(f+g)(\vec{x})}{\partial x_i} = \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_i} + \frac{\partial g(\vec{x})}{\partial x_i}, \\ 2) \quad & \frac{\partial(\lambda f)(\vec{x})}{\partial x_i} = \lambda \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_i}, \\ 3) \quad & \frac{\partial(fg)(\vec{x})}{\partial x_i} = \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_i} g(\vec{x}) + f(\vec{x}) \frac{\partial g(\vec{x})}{\partial x_i}, \\ 4) \quad & \frac{\partial\left(\frac{f}{g}\right)(\vec{x})}{\partial x_i} = \frac{\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_i} g(\vec{x}) - f(\vec{x}) \frac{\partial g(\vec{x})}{\partial x_i}}{(g(\vec{x}))^2}. \end{aligned}$$

Παράγωγος συνάρτησης

Ορισμός 4: Έστω $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ μία πραγματική συνάρτηση n μεταβλητών.

a) Η συνάρτηση f ονομάζεται **παραγωγίσιμη στο σημείο $\vec{a}$** του U όταν υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι $f_{x_1}(\vec{a}), f_{x_2}(\vec{a}), \dots, f_{x_n}(\vec{a})$. Τότε ως ολική παράγωγο της συνάρτησης στο σημείο $\vec{a}$ ορίζουμε τον $1 \times n$ πίνακα:

$$f'(\vec{a}) = [f_{x_1}(\vec{a}) \ f_{x_2}(\vec{a}) \ \dots \ f_{x_n}(\vec{a})] = [f_{x_1} \ f_{x_2} \ \dots \ f_{x_n}]_{(\vec{a})}.$$

b) Στην περίπτωση που η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $\vec{x} \in U$, δηλαδή όταν υπάρχουν όλες οι μερικές παράγωγοι $f_{x_i}(\vec{x})$ για κάθε $\vec{x} \in U$ και $1 \leq i \leq n$, τότε η f ονομάζεται **παραγωγίσιμη συνάρτηση (στο U)** και ως **παράγωγος της συνάρτησης f (στο U)** ορίζεται ο συναρτησιακός $1 \times n$ πίνακας

$$f' = [f_{x_1} \ f_{x_2} \ \dots \ f_{x_n}] .$$

Συμβολισμός: $f'(a) = \frac{df(\vec{a})}{d\vec{x}}$ και $f' = \frac{df}{d\vec{x}} = Jf$.

Πρόταση 1: Κάθε γραμμικός μετασχηματισμός $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση σε κάθε σημείο $\vec{x}$ του $\mathbb{R}^n$ και ισχύει:

$$T'(\vec{x}) = [T(\vec{e}_1) \ T(\vec{e}_2) \ \dots \ T(\vec{e}_n)] .$$

Απόδειξη: Έστω $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Τότε εφόσον ο T είναι γραμμικός μετασχηματισμός έχουμε ότι

$$T(\vec{x}) = x_1 T(\vec{e}_1) + x_2 T(\vec{e}_2) + \dots + x_n T(\vec{e}_n) .$$

Επομένως από τη σχέση 1) του Θεωρήματος 1 έχουμε ότι

$$T_{x_i} = T(\vec{e}_i) \text{ για κάθε } 1 \leq i \leq n ,$$

επομένως προκύπτει το ζητούμενο από τον ορισμό της παραγώγου συνάρτησης (Ορισμός 4 b)).

Θεώρημα 2: Έστω $f, g : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ δύο παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο σημείο $\vec{x} \in U$. Τότε οι συναρτήσεις

$$(f + g)'(\vec{x}) , (\lambda f)'(\vec{x}) \text{ (για } \lambda \in \mathbb{R}) , (fg)'(\vec{x}) , \left(\frac{f}{g}\right)'(\vec{x})$$

(όπου στην τελευταία περίπτωση πρέπει $g(\vec{y}) \neq 0$ για κάθε $\vec{y} \in B_\delta(\vec{x}) \subset U$ για κάποιο $\delta > 0$) είναι παραγωγίσιμες στο σημείο $\vec{x} \in U$ και ισχύουν τα παρακάτω:

- 1) $(f + g)'(\vec{x}) = f'(\vec{x}) + g'(\vec{x}) ,$
- 2) $(\lambda f)'(\vec{x}) = \lambda f'(\vec{x}) ,$
- 3) $(fg)'(\vec{x}) = f'(\vec{x})g(\vec{x}) + f(\vec{x})g'(\vec{x}) ,$
- 4) $\left(\frac{f}{g}\right)'(\vec{x}) = \frac{f'(\vec{x})g(\vec{x}) - f(\vec{x})g'(\vec{x})}{(g(\vec{x}))^2} .$

Παρατήρηση 1: Μία συνάρτηση $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, για $n \geq 2$, η οποία είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο $\vec{a} \in U$, δεν είναι αναγκαστικά συνεχής στο $\vec{a} \in U$.

Κλίση συνάρτησης

Ορισμός 5: Έστω $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ μία πραγματική συνάρτηση n μεταβλητών που είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο $\vec{a} \in U$. Τότε ως **κλίση (ή ανάδελτα) της συνάρτησης f στο σημείο $\vec{a}$** ορίζουμε το διάνυσμα

$$\nabla f(\vec{a}) = (f_{x_1}(\vec{a}), f_{x_2}(\vec{a}), \dots, f_{x_n}(\vec{a})) = \left(\frac{\partial f(\vec{a})}{\partial x_1}, \frac{\partial f(\vec{a})}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f(\vec{a})}{\partial x_n} \right)$$

Αν η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη (στο U) τότε ως **κλίση (ή ανάδελτα) της συνάρτησης f (στο U)** ορίζεται η διανυσματική συνάρτηση $\nabla f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, με τύπο

$$\nabla f(\vec{x}) = (f_{x_1}(\vec{x}), f_{x_2}(\vec{x}), \dots, f_{x_n}(\vec{x})) = \left(\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_1}, \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_n} \right)$$

Συμβολισμός: $\nabla f = \text{grad} f$.

Παρατήρηση 2: Έστω $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ μία παραγωγίσιμη συνάρτηση n μεταβλητών στο σημείο $\vec{x} \in U$. Τότε μεταξύ της παραγώγου $f'(\vec{x})$ και της κλίσης $\nabla f(\vec{x})$ ισχύει η σχέση

$$f'(\vec{x}) = \nabla f(\vec{x})^\top$$

όπου ο εκθέτης $\top$ συμβολίζει τον ανάστροφο πίνακα.

(**Σχόλιο:** Κάθε διάνυσμα με n συντεταγμένες μπορεί να γραφεί σαν πίνακας στήλη $n \times 1$, επομένως η κλίση $\nabla f(\vec{x})$ είναι $n \times 1$ και άρα ο ανάστροφός του (δηλαδή $\nabla f(\vec{x})^\top$) είναι $1 \times n$).

C^1 συνάρτηση

Ορισμός 6: Έστω $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ μία πραγματική συνάρτηση n μεταβλητών.

a) Η f ονομάζεται C^1 **συνάρτηση (ή αλλιώς συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση) σε ένα σημείο** $\vec{a} \in U$, όταν η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σε μία περιοχή $B_\delta(\vec{a}) \subseteq U$ του $\vec{a}$ και οι μερικές παράγωγοι $f_{x_1}, f_{x_2}, \dots, f_{x_n} : B_\delta(\vec{a}) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχείς στο σημείο $\vec{a}$.

b) Η f ονομάζεται C^1 **συνάρτηση (ή αλλιώς συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση)** (στο U), όταν είναι παραγωγίσιμη στο U και οι μερικές παράγωγοι $f_{x_1}, f_{x_2}, \dots, f_{x_n} : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχείς.

Μερικές Παράγωγοι Ανώτερης Τάξης

Έστω $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ μία πραγματική συνάρτηση δύο μεταβλητών που έχει μερικές παραγώγους f_x και f_y . Οι μερικές παράγωγοι f_x και f_y είναι επίσης πραγματικές συναρτήσεις δύο μεταβλητών, επομένως μπορούμε να θεωρήσουμε τις μερικές παραγώγους των f_x και f_y , δηλαδή τις $(f_x)_x$, $(f_x)_y$, $(f_y)_x$, $(f_y)_y$ (σε όποια σημεία υπάρχουν) και οι οποίες ονομάζονται **δεύτερες μερικές παράγωγοι (ή μερικές παράγωγοι δεύτερης τάξης) της συνάρτησης f** .

Συμβολισμός:

$$(f_x)_x = f_{xx} = \frac{\partial \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

$$(f_x)_y = f_{xy} = \frac{\partial \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

$$(f_y)_x = f_{yx} = \frac{\partial \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

$$(f_y)_y = f_{yy} = \frac{\partial \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Ορισμός 7: a) Έστω $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ μία πραγματική συνάρτηση n μεταβλητών και $\vec{a} \in U$. Έστω ότι για κάποιο $\delta > 0$ με $B_\delta(\vec{a}) \subseteq U$ υπάρχει η πρώτη μερική παράγωγος $f_{x_i}(\vec{x})$ για κάποιο i με $1 \leq i \leq n$ και για κάθε $\vec{x} \in B_\delta(\vec{a})$. Τότε η μερική παράγωγος $\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) (\vec{a})$ είναι η **δεύτερη μερική παράγωγος της f ως προς τις μεταβλητές x_i και x_j στο $\vec{a}$** και ορίζεται ως

$$f_{x_i x_j}(\vec{a}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\vec{a}) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_{x_i}(\vec{a} + h \vec{e}_j) - f_{x_i}(\vec{a})}{h}$$

(αν υπάρχει αυτό το όριο).

b) Αν υπάρχει η μερική παράγωγος $f_{x_i}(\vec{x})$ για κάθε $\vec{x} \in U$, τότε η συνάρτηση που ορίζεται από τον τύπο

$$f_{x_i x_j}(\vec{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\vec{x}) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) (\vec{x}) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_{x_i}(\vec{x} + h \vec{e}_j) - f_{x_i}(\vec{x})}{h}$$

ονομάζεται **δεύτερη μερική παράγωγος** (ή **μερική παράγωγος δεύτερης τάξης**) της f ως προς τις μεταβλητές x_i και x_j .

Συμβολισμός: Οι δεύτερες μερικές παράγωγοι της $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ συμβολίζονται ως $f_{x_i x_j}(\vec{x}) \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\vec{x})$ (για $1 \leq i \leq n$ και $1 \leq j \leq n$) (5).

Οι $f_{x_i x_j}$ με $i \neq j$ ονομάζονται **μικτές** δεύτερες μερικές παράγωγοι. Στον συμβολισμό $f_{x_i x_j}$ η σειρά με την οποία γίνονται οι παραγωγίσεις ακολουθούν τους δείκτες από αριστερά προς δεξιά (δηλαδή πρώτα ως x_i και μετά ως x_j), ενώ στον συμβολισμό $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ (ο οποίος είναι ισοδύναμος, βλέπε σχέση (5)) η σειρά με την οποία γίνονται οι παραγωγίσεις ακολουθούν τους δείκτες από δεξιά προς αριστερά (δηλαδή πάλι πρώτα ως x_i και μετά ως x_j).

Στην περίπτωση που έχουμε $i = j$ συμβολικά μπορούμε να γράψουμε $f_{x_i^2} = \frac{\partial f}{\partial x_i^2}$ αντί για $f_{x_i x_i}(\vec{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i}$.

Σχόλιο: Οι μερικές παράγωγοι μεγαλύτερης τάξης ορίζονται κατά παρόμοιο τρόπο.

$$\text{π.χ. } f_{xyy} = \frac{\partial}{\partial y} (f_{xy}) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right) = \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}$$

C^2 συνάρτηση

Ορισμός 8: Έστω $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ και $\vec{a} \in U$.

a) Η συνάρτηση f ονομάζεται **C^2 συνάρτηση** (ή **δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση**) στο σημείο $\vec{a}$, όταν υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι f_{x_i} (για όλα τα $1 \leq i \leq n$) σε μία περιοχή $B_\delta(\vec{a}) \subseteq U$ του σημείου $\vec{a}$ και οι συναρτήσεις $f_{x_i} : B_\delta(\vec{a}) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι C^1 συναρτήσεις στο σημείο $\vec{a}$, δηλαδή όταν υπάρχουν οι δεύτερες μερικές παράγωγοι $f_{x_i x_j}$ για κάθε $1 \leq i, j \leq n$ σε μία περιοχή $B_\epsilon(\vec{a}) \subseteq B_\delta(\vec{a})$ και οι συναρτήσεις $f_{x_i x_j} : B_\epsilon(\vec{a}) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχείς στο σημείο $\vec{a}$.

b) Η συνάρτηση f ονομάζεται **C^2 συνάρτηση** (ή **δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση**) (στο U), όταν η f είναι C^2 σε όλα τα σημεία $\vec{x} \in U$, δηλαδή όταν υπάρχουν οι δεύτερες μερικές παράγωγοι $f_{x_i x_j}$ στο U για κάθε $1 \leq i, j \leq n$ και είναι συνεχείς συναρτήσεις στο U .

Σχόλιο: Επαγωγικά ορίζονται οι $C^3, C^4, \dots, C^\infty$ συναρτήσεις.

Θεώρημα Clairaut: Για μία συνάρτηση $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι C^2 σε ένα σημείο $\vec{a} \in U$ ισχύει ότι:

$$f_{x_i x_j}(\vec{a}) = f_{x_j x_i}(\vec{a}),$$

για κάθε $1 \leq i, j \leq n$.

Άσκηση 1: Εξετάστε αν υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι $f_x(1, 0)$ και $f_y(1, 0)$ της συνάρτησης

$$f(x, y) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{y}, & y \neq 0 \\ 0, & y = 0 \end{cases}.$$

Λύση: Θα εξετάσουμε αν υπάρχουν τα παρακάτω όρια

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0,$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1, 0+h) - f(1, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{1}{h}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{1}{h} \sin \frac{1}{h} \right),$$

όπου όμως το $\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{1}{h} \sin \frac{1}{h} \right)$ δεν υπάρχει (π.χ. θεωρούμε τις ακολουθίες $h_n = \frac{1}{2n\pi} \rightarrow 0$

και $h_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}} \rightarrow 0$ και εφαρμόζουμε την Αρχή Μεταφοράς)

Επομένως από τα παραπάνω και τους ορισμούς (2),(4) των μερικών παραγώγων βλέπουμε ότι υπάρχει η μερική παράγωγος $f_x(1, 0)$ της f ως προς το x στο σημείο $(1, 0)$ αλλά δεν υπάρχει η μερική παράγωγος της f ως προς το y στο σημείο $(1, 0)$.

Άσκηση 2: Να βρεθούν οι μερικές παράγωγοι $f_x(1, 2)$ και $f_y(1, 2)$ της συνάρτησης $f(x, y) = x^4y + 2e^{-xy} - 2y^2 + 5$.

Λύση:

$$f_x(x, y) = 4x^3y - 2ye^{-xy} \Rightarrow f_x(1, 2) = 8 - 4e^{-2}$$

$$f_y(x, y) = x^4 - 2xe^{-xy} - 4y \Rightarrow f_y(1, 2) = 1 - 2e^{-2} - 8$$

Άσκηση 3: Να βρεθούν οι μερικές παράγωγοι της συνάρτησης $f(x, y) = \sin \left(\frac{3x + x^2}{1 - y} \right)$

Λύση:

$$f_x(x, y) = \cos \left(\frac{3x + x^2}{1 - y} \right) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{3x + x^2}{1 - y} \right) = \cos \left(\frac{3x + x^2}{1 - y} \right) \frac{3 + 2x}{1 - y}$$

$$f_y(x, y) = \cos \left(\frac{3x + x^2}{1 - y} \right) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{3x + x^2}{1 - y} \right) = \cos \left(\frac{3x + x^2}{1 - y} \right) \frac{3x + x^2}{(1 - y)^2}$$

$$[\text{καθώς } \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{3x + x^2}{1 - y} \right) = (3x + x^2) \left(-\frac{1}{(1 - y)^2} \right) (-1)].$$

Άσκηση 4: Να υπολογιστεί η παράγωγος της συνάρτησης $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x, y, z) = x^2e^y + y\cos z - zy^2$$

Λύση: Αρχικά υπολογίζουμε τις μερικές παραγώγους.

$$f_x(x, y, z) = 2xe^y$$

$$f_y(x, y, z) = x^2e^y + \cos z - 2zy$$

$$f_z(x, y, z) = -y\sin z - y^2$$

Επομένως η παράγωγος της συνάρτησης f από τον Ορισμό 4 b) είναι ο 1×3 συναρτησιακός πίνακας

$$f'(x, y, z) = [2xe^y \quad x^2e^y + \cos z - 2zy \quad -(y\sin z + y^2)].$$

Άσκηση 5: Ναδειχθεί ότι η συνάρτηση

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 0)$ αλλά δεν είναι συνεχής στο $(0, 0)$.

Λύση:

$$f_x(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0,$$

$$f_y(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0,$$

επομένως υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι f_x και f_y της f στο $(0,0)$ και άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $(0,0)$ και η παράγωγος της είναι η $f'(0,0) = [0 \ 0]$.

Η f όμως δεν είναι συνεχής καθώς δεν υπάρχει το όριο $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$ αφού

$$\lim_{(0,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0}{y^2} = 0$$

$$\lim_{(x,x) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2 + x^2} = \frac{1}{2}$$

Γραμμικές συναρτήσεις και Διαφορισιμότητα πραγματικών συναρτήσεων

Γραμμικές συναρτήσεις:

Όρισμός: Μία συνάρτηση $\vec{f} : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ονομάζεται **γραμμική συνάρτηση** αν και μόνο αν ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:

$$\begin{cases} \vec{f}(\vec{x} + \vec{y}) = \vec{f}(\vec{x}) + \vec{f}(\vec{y}) \\ \vec{f}(\lambda \vec{x}) = \lambda \vec{f}(\vec{x}) \end{cases}, \quad (1)$$

για $\vec{x}, \vec{y} \in U$ και $\lambda \in \mathbb{R}$, οι οποίες συνδιαστικά γράφονται ως:

$$\vec{f}(\lambda \vec{x} + \vec{y}) = \lambda \vec{f}(\vec{x}) + \vec{f}(\vec{y}), \quad (2)$$

ή ακόμα γενικότερα

$$\vec{f}(\lambda \vec{x} + \mu \vec{y}) = \lambda \vec{f}(\vec{x}) + \mu \vec{f}(\vec{y}), \quad (3)$$

για $\vec{x}, \vec{y} \in U$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Πρόταση: Έστω $\vec{f} = (f_1, f_2, \dots, f_m) : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Τότε ισχύουν τα παρακάτω:

1. $\vec{f}$ γραμμική διανυσματική συνάρτηση $\Leftrightarrow f_1, f_2, \dots, f_m$ γραμμικές πραγματικές συναρτήσεις.
2. $\vec{f}$ γραμμική διανυσματική συνάρτηση $\Rightarrow \vec{f}(\vec{0}) = \vec{0}$.

• Για $n = 1, m = 1$:

$$f : U \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ γραμμική} \Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{R} : f(x) = ax, x \in U \quad (4)$$

Απόδειξη:

($\Leftarrow$)

$$f(\lambda x + \mu y) = a(\lambda x + \mu y) = \lambda ax + \mu ay = \lambda f(x) + \mu f(y)$$

άρα είναι γραμμική μία συνάρτηση της μορφής (4).

($\Rightarrow$)

Θέτουμε

$$f(1) = a \in \mathbb{R} \quad \text{και άρα} \quad f(x) = f(1x) = xf(1) = ax \quad (5)$$

επομένως δείξαμε ότι μία γραμμική συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ έχει τη μορφή (4) με a να δίνεται από την (5).

• Για $n \geq 2, m = 1$:

$$f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \text{ γραμμική} \Leftrightarrow \exists \vec{a} \in \mathbb{R}^n : f(\vec{x}) = \vec{a} \cdot \vec{x}, \vec{x} \in U \quad (6)$$

Απόδειξη:

($\Leftarrow$)

$$f(\lambda \vec{x} + \mu \vec{y}) = \vec{a} \cdot (\lambda \vec{x} + \mu \vec{y}) = \lambda \vec{a} \cdot \vec{x} + \mu \vec{a} \cdot \vec{y} = \lambda f(\vec{x}) + \mu f(\vec{y}),$$

άρα δείξαμε ότι μία συνάρτηση της μορφής (6) είναι γραμμική.

($\Rightarrow$)

$$\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + \dots + x_n \vec{e}_n$$

Θέτουμε

$$\vec{a} = (f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \dots, f(\vec{e}_n)) \quad (7)$$

και έχουμε

$$f(\vec{x}) = f(x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + \dots + x_n \vec{e}_n) = x_1 f(\vec{e}_1) + x_2 f(\vec{e}_2) + \dots + x_n f(\vec{e}_n) = \vec{a} \cdot \vec{x},$$

επομένως δείξαμε ότι μία γραμμική συνάρτηση $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ έχει την μορφή (6) με $\vec{a}$ να δίνεται από την (7).

• Για $n \geq 2, m \geq 2$:

$\vec{f} = (f_1, f_2, \dots, f_m) : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ γραμμική (δηλαδή $f_1, f_2, \dots, f_m : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ γραμμικές)

$$\Leftrightarrow \exists \vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m \in \mathbb{R}^n : f_i(\vec{x}) = \vec{a}_i \cdot \vec{x}, \vec{x} \in U, 1 \leq i \leq m \quad (8)$$

Επομένως

$$\vec{f} : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \text{ γραμμική} \Leftrightarrow \exists m \times n \text{ πίνακας } A \text{ ώστε } \vec{f} = A \vec{x} \quad (9)$$

όπου τα στοιχεία της i -οστής γραμμής είναι τα στοιχεία του $\vec{a}_i$ για $i = 1, 2, \dots, m$.

Συγκεκριμένα, έστω $\vec{a}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}) \in \mathbb{R}^n$ για $i = 1, 2, \dots, m$. Τότε

$$\begin{aligned} \vec{f}(\vec{x}) &= (f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}), \dots, f_m(\vec{x})) = (\vec{a}_1 \cdot \vec{x}, \vec{a}_2 \cdot \vec{x}, \dots, \vec{a}_m \cdot \vec{x}) \\ &= (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n, a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n, \dots, a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n) \\ &= A \vec{x} \end{aligned}$$

με

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(\vec{e}_1) & f_1(\vec{e}_2) & \dots & f_1(\vec{e}_n) \\ f_2(\vec{e}_1) & f_2(\vec{e}_2) & \dots & f_2(\vec{e}_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_m(\vec{e}_1) & f_m(\vec{e}_2) & \dots & f_m(\vec{e}_n) \end{pmatrix},$$

(Η απόδειξη μπορεί να γίνει ακολουθώντας τη διαδικασία που ακολουθήθηκε στην προηγούμενη περίπτωση (που είχαμε $n \geq 2, m = 1$) για τη σχέση (8)).

Διαφορισιμότητα:

Ορισμός 1: Έστω $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ μία πραγματική συνάρτηση n μεταβλητών με U ανοιχτό. Η συνάρτηση f ονομάζεται **διαφορίσιμη σε ένα σημείο** $\vec{a}$ του U , όταν υπάρχει γραμμικός μετασχηματισμός $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ έτσι ώστε να ισχύει

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \frac{|f(\vec{x}) - f(\vec{a}) - T(\vec{x} - \vec{a})|}{\|\vec{x} - \vec{a}\|} = 0, \quad (10)$$

ή ισοδύναμα

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \frac{f(\vec{x}) - f(\vec{a}) - T(\vec{x} - \vec{a})}{\|\vec{x} - \vec{a}\|} = 0,$$

για $\vec{x} \in U$ με $\vec{x} \neq \vec{a}$.

Πρόταση 1: Έστω $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ μία πραγματική συνάρτηση n μεταβλητών με U ανοικτό. Η συνάρτηση f είναι **διαφορίσιμη στο σημείο** $\vec{a}$ του U αν και μόνο αν υπάρχει ένας $1 \times n$ πίνακας A έτσι ώστε να ισχύει

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \frac{|f(\vec{x}) - f(\vec{a}) - A(\vec{x} - \vec{a})|}{\|\vec{x} - \vec{a}\|} = 0 , \quad (11)$$

ή ισοδύναμα

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \frac{f(\vec{x}) - f(\vec{a}) - A(\vec{x} - \vec{a})}{\|\vec{x} - \vec{a}\|} = 0 ,$$

όπου $A(\vec{x} - \vec{a})$ είναι το γινόμενο του $1 \times n$ πίνακα A με τον $n \times 1$ πίνακα $\vec{x} - \vec{a}$ (δηλαδή είναι ένα στοιχείο του $\mathbb{R}$ αφού $(1 \times n)(n \times 1) = 1 \times 1$).

Θεώρημα 1: Έστω $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ μία πραγματική συνάρτηση n μεταβλητών, η οποία είναι διαφορίσιμη στο σημείο $\vec{a} \in U$. Τότε η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $\vec{a}$. Επιπλέον για τον μετασχηματισμό του Ορισμού 1 και για τον $1 \times n$ πίνακα A της Πρότασης 1, ισχύουν τα παρακάτω:

$$T(\vec{x}) = f_{x_1}(\vec{a})x_1 + f_{x_2}(\vec{a})x_2 + \dots + f_{x_n}(\vec{a})x_n , \quad (12)$$

για κάθε $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ και

$$A = f'(\vec{a}) = [f_{x_1}(\vec{a}) \ f_{x_2}(\vec{a}) \ \dots \ f_{x_n}(\vec{a})] . \quad (13)$$

Απόδειξη: Εφόσον η f είναι διαφορίσιμη στο $\vec{a}$ τότε από τον Ορισμό 1 (σχέση (10)) για $\vec{x} = \vec{a} + h\vec{e}_i$ (με $h \neq 0$ πολύ μικρό) παίρνουμε

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|f(\vec{a} + h\vec{e}_i) - f(\vec{a}) - T(h\vec{e}_i)|}{\|h\vec{e}_i\|} = 0 ,$$

η οποία καθώς ο T είναι γραμμικός μετασχηματισμός και $\|\vec{e}_i\| = 1$ δίνει:

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|f(\vec{a} + h\vec{e}_i) - f(\vec{a}) - hT(\vec{e}_i)|}{|h|} = 0 \\ \Rightarrow & \lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{f(\vec{a} + h\vec{e}_i) - f(\vec{a})}{h} - T(\vec{e}_i) \right| = 0 \\ \Rightarrow & \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(\vec{a} + h\vec{e}_i) - f(\vec{a})}{h} - T(\vec{e}_i) \right] = 0 \\ \Rightarrow & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\vec{a} + h\vec{e}_i) - f(\vec{a})}{h} = T(\vec{e}_i) . \end{aligned} \quad (14)$$

Επομένως από τη σχέση (14) και τον ορισμό της μερικής παραγώγου (βλέπε '4ο μάθημα'), υπάρχει η μερική παράγωγος $f_{x_i}(\vec{a})$ για $1 \leq i \leq n$, και ισχύει

$$f_{x_i}(\vec{a}) = T(\vec{e}_i) , \quad (15)$$

και επομένως η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $\vec{a}$.

Τότε εφόσον ο T είναι γραμμικός μετασχηματισμός και μέσω της (15) παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} T(\vec{x}) &= T(x_1, x_2, \dots, x_n) = T(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \dots + x_n\vec{e}_n) \\ &= x_1T(\vec{e}_1) + x_2T(\vec{e}_2) + \dots + x_nT(\vec{e}_n) \\ &= f_{x_1}(\vec{a})x_1 + f_{x_2}(\vec{a})x_2 + \dots + f_{x_n}(\vec{a})x_n \end{aligned}$$

Ομοίως δουλεύουμε για να αποδείξουμε τη δεύτερη σχέση του Θεωρήματος 1 (σχέση (13)), δηλαδή θέτουμε πάλι $\vec{x} = \vec{a} + h\vec{e}_i$ (με $h \neq 0$ πολύ μικρό) και από τη σχέση (11) έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|f(\vec{a} + h\vec{e}_i) - f(\vec{a}) - A(h\vec{e}_i)|}{||h\vec{e}_i||} &= 0 \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|f(\vec{a} + h\vec{e}_i) - f(\vec{a}) - hA\vec{e}_i|}{|h|} = 0 \\ \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{f(\vec{a} + h\vec{e}_i) - f(\vec{a})}{h} - A\vec{e}_i \right| &= 0 \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(\vec{a} + h\vec{e}_i) - f(\vec{a})}{h} - A\vec{e}_i \right] = 0 \\ \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\vec{a} + h\vec{e}_i) - f(\vec{a})}{h} &= A\vec{e}_i, \end{aligned} \quad (16)$$

(όπου $A\vec{e}_i$ είναι το γινόμενο του $1 \times n$ πίνακα με το διάνυσμα $\vec{e}_i$, καθώς κάθε διάνυσμα στο $\mathbb{R}^n$ γράφεται σαν πίνακας στήλη $n \times 1$, επομένως το γινόμενο $A\vec{e}_i$ είναι εν τέλει ένας αριθμός αφού είναι το γινόμενο $(1 \times n)(n \times 1) = (1 \times 1)$). Επομένως από τη σχέση (16) και τον ορισμό της μερικής παραγώγου (βλέπε 4ο μάθημα), υπάρχει η μερική παράγωγος $f_{x_i}(\vec{a})$ για $1 \leq i \leq n$, και ισχύει

$$f_{x_i}(\vec{a}) = A\vec{e}_i, \quad (17)$$

για $1 \leq i \leq n$. Από τις παραπάνω σχέσεις (17) και από τον ορισμό της παραγώγου (βλέπε 4ο μάθημα) προκύπτει ότι

$$A = f'(\vec{a}) = [f_{x_1}(\vec{a}) \ f_{x_2}(\vec{a}) \ \dots \ f_{x_n}(\vec{a})],$$

(καθώς $A = [A\vec{e}_1 \ A\vec{e}_2 \ \dots \ A\vec{e}_n]$ αφού $A\vec{e}_i$ είναι η i -οστή συντεταγμένη του $1 \times n$ πίνακα A).

Ορισμός 2: Έστω $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ μία πραγματική συνάρτηση n μεταβλητών με U ανοικτό, η οποία είναι διαφορίσιμη σε ένα σημείο $\vec{a} \in U$. Τότε **διαφορικό της συνάρτησης f στο σημείο $\vec{a}$** ονομάζεται ο γραμμικός μετασχηματισμός $Df(\vec{a}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο:

$$Df(\vec{a})(\vec{x}) := \sum_{i=1}^n f_{x_i}(\vec{a})x_i, \quad (18)$$

για $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Θεώρημα 2: Έστω $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ μία πραγματική συνάρτηση n μεταβλητών με U ανοικτό και $\vec{a} \in U$. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

1. Η συνάρτηση f είναι διαφορίσιμη στο σημείο $\vec{a}$.
2. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $\vec{a}$ και ισχύει:

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \frac{f(\vec{x}) - f(\vec{a}) - f'(\vec{a})(\vec{x} - \vec{a})}{||\vec{x} - \vec{a}||} = 0, \quad (19)$$

όπου $f'(\vec{a})(\vec{x} - \vec{a})$ είναι το γινόμενο του $1 \times n$ πίνακα $f'(\vec{a})$ με τον $n \times 1$ πίνακα $\vec{x} - \vec{a}$ (καθώς το διάνυσμα $\vec{x} - \vec{a}$ του $\mathbb{R}^n$ μπορεί να γραφεί σαν πίνακας στήλη $n \times 1$), η οποία γράφεται ισοδύναμα ως

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \frac{f(\vec{x}) - f(\vec{a}) - \nabla f(\vec{a}) \cdot (\vec{x} - \vec{a})}{||\vec{x} - \vec{a}||} = 0. \quad (20)$$

Επιπλέον, αν ισχύει ένας από τους παραπάνω ισοδύναμους ισχυρισμούς (1. ή 2.) τότε για το διαφορικό της f στο σημείο $\vec{a}$ ισχύει ο ακόλουθος τύπος:

$$Df(\vec{a})(\vec{x}) = f'(\vec{a})\vec{x} = Jf(\vec{a})\vec{x} = \nabla f(\vec{a}) \cdot \vec{x} \quad (21)$$

Η τελευταία σχέση, δηλαδή η σχέση $Df(\vec{a})(\vec{x}) = \nabla f(\vec{a}) \cdot \vec{x}$, γράφεται ισοδύναμα ως εξής:

$$\begin{aligned} Df(\vec{a})(\vec{x}) &= [f_{x_1}(\vec{a}) \ f_{x_2}(\vec{a}) \ \dots \ f_{x_n}(\vec{a})] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} \\ &= (f_{x_1}(\vec{a}), f_{x_2}(\vec{a}), \dots, f_{x_n}(\vec{a})) \cdot (x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned} \quad (22)$$

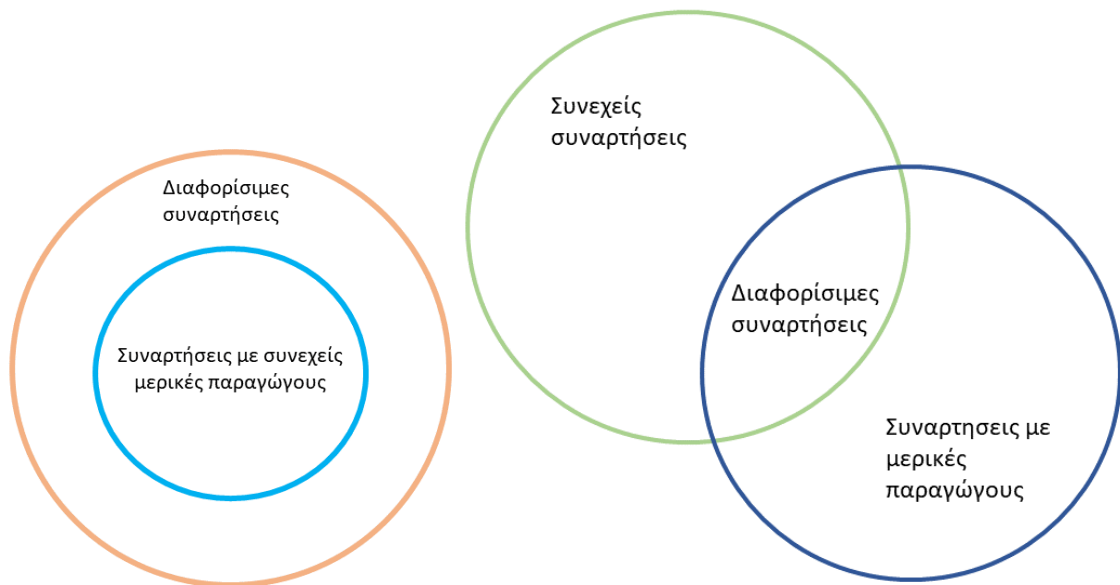
Πόρισμα 2: Έστω $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ μία διαφορίσιμη συνάρτηση στο σημείο $\vec{a} \in U$. Τότε η f είναι συνεχής στο σημείο $\vec{a}$. Ο αντίθετος ισχυρισμός δεν ισχύει πάντα.

Αντιπαράδειγμα του αντίθετου ισχυρισμού είναι η συνάρτηση $f(x, y) = |x|$ η οποία είναι συνεχής στο $(0, 0)$ αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 0)$ (αφού δεν έχει μερική παράγωγο ως προς x).

Θεώρημα 3: Έστω $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ μία C^1 συνάρτηση (ή αλλιώς συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση) σε ένα σημείο $\vec{a} \in U$. Τότε η συνάρτηση f είναι διαφορίσιμη στο σημείο $\vec{a}$. Ο αντίθετος ισχυρισμός δεν ισχύει πάντα.

Παρατήρηση: Μία διαφορίσιμη συνάρτηση σε ένα σημείο $\vec{a}$, έχει μερικές παραγώγους $f_{x_i}(\vec{a})$ ($1 \leq i \leq n$) στο $\vec{a}$. Ο αντίθετος ισχυρισμός δεν ισχύει πάντα.

Αντιπαράδειγμα του αντίθετου ισχυρισμού είναι η συνάρτηση $f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ η οποία δεν είναι συνεχής στο $(0, 0)$ επομένως δεν είναι διαφορίσιμη στο $(0, 0)$ (από το Πόρισμα 2) αλλά έχει μερικές παραγώγους $f_x(0, 0)$ και $f_y(0, 0)$ στο σημείο $(0, 0)$.



Άσκηση 1: Έστω η συνάρτηση

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Ναδειχθεί ότι η f είναι διαφορίσιμη στο $(0, 0)$ με διαφορικό $Df(0, 0) = 0$.

Λύση: Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο $f'(0, 0) = [0 \ 0]$. Επίσης,

$$\frac{|f(x, y) - f(0, 0) - \nabla f(0, 0) \cdot (x, y)|}{\|(x, y) - (0, 0)\|} = \frac{\left| f(x, y) - [0 \ 0] \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right|}{\|(x, y) - (0, 0)\|} = \frac{\frac{|x|y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{|x|y^2}{x^2 + y^2} \leq \frac{|x|y^2}{y^2} = |x| \rightarrow 0$$

για $(x, y) \rightarrow (0, 0)$. Επομένως από την παραπάνω σχέση (και τις ιδιότητες ορίων) έχουμε ότι

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|f(x, y) - f(0, 0) - \nabla f(0, 0) \cdot (x, y)|}{\|(x, y) - (0, 0)\|} = 0 .$$

Επομένως από το Θεώρημα 2 έχουμε ότι το διαφορικό δίνεται από τον τύπο

$$Df(0, 0)(x, y) = \nabla f(0, 0) \cdot (x, y) = [0 \ 0] \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0 .$$

Άσκηση 2: Να αποδειχθεί ότι δεν είναι διαφορίσιμη στο σημείο $(0, 0)$ η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases} .$$

Λύση: Η συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο $(0, 0)$, καθώς

$f(x, 0) = 0 \rightarrow 0$ και $f(x, x) = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2}$ για $x \rightarrow 0$, άρα δεν υπάρχει το όριο $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$.

Επομένως από το Πόρισμα 2 η f δεν είναι διαφορίσιμη στο $(0, 0)$

(καθώς βάση του Πόρισματος, αν ήταν διαφορίσιμη στο $(0, 0)$ θα ήταν και συνεχής στο $(0, 0)$).

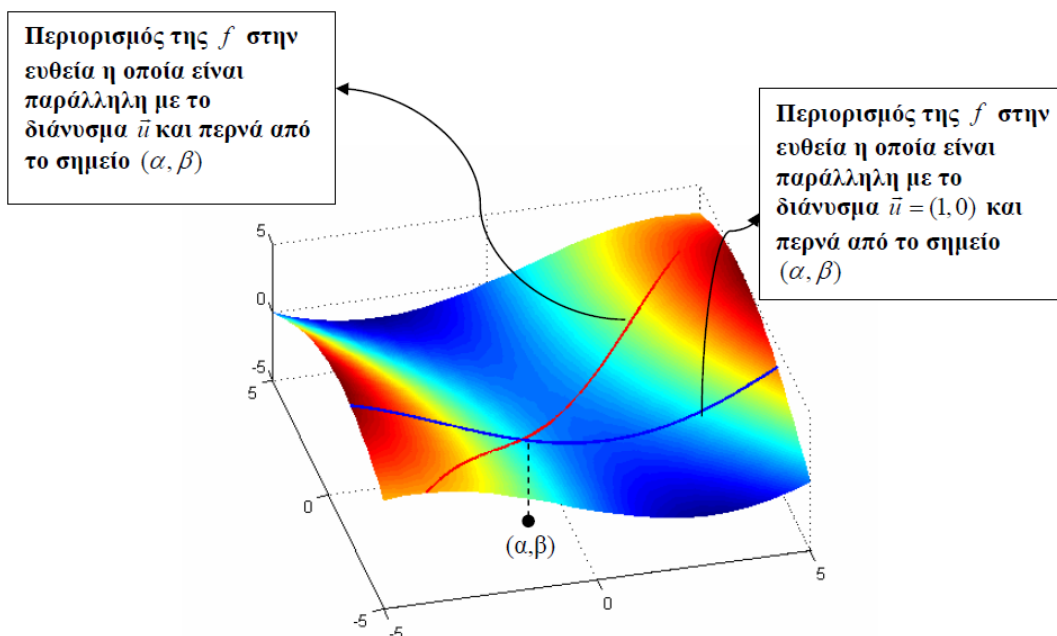
Κατευθυνόμενη Παράγωγος

Κατευθυνόμενη Παράγωγος:

Ορισμός 1: Έστω $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ μία πραγματική συνάρτηση δύο μεταβλητών με U ανοιχτό, $\vec{a} = (a, b) \in U$ και $\vec{u} = (u, v)$ μία κατεύθυνση του $\mathbb{R}^2$ (δηλαδή $\|\vec{u}\| = 1$). Τότε **κατευθυνόμενη παράγωγος της f στο σημείο $\vec{a}$ ως προς την κατεύθυνση $\vec{u}$** είναι ο πραγματικός αριθμός $f_{\vec{u}}(\vec{a})$ που ορίζεται από τον τύπο:

$$f_{\vec{u}}(\vec{a}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + uh, b + vh) - f(a, b)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\vec{a} + h\vec{u}) - f(\vec{a})}{h} \quad (1)$$

Γεωμετρική ερμηνεία: Η κατευθυνόμενη παράγωγος $f_{\vec{u}}(\vec{a})$ είναι ο ρυθμός μεταβολής της συνάρτησης f στο σημείο $\vec{a} = (a, b)$ κατά την κατεύθυνση $\vec{u} = (u, v)$ (συγκεκριμένα κατά μήκος της ευθείας του $\mathbb{R}^2$ η οποία περνάει από το σημείο (a, b) και είναι παράλληλη προς την κατεύθυνση $\vec{u}$).



Άρα η **κατευθυνόμενη παράγωγος** είναι η παράγωγος της (κόκκινης) συνάρτησης σε κάποιο σημείο (ενώ η **μερική παράγωγος** ως προς x είναι η παράγωγος της μπλε συνάρτησης σε κάποιο σημείο).

Σχόλιο: Η κατευθυνόμενη παράγωγος είναι μία επέκταση (γενίκευση) της μερικής παραγώγου, καθώς η μερική παράγωγος $f_x(a, b)$ της συνάρτησης $f(x, y)$ ως προς τη μεταβλητή x στο σημείο (a, b) είναι η κατευθυνόμενη παράγωγος της συνάρτησης f στο σημείο (a, b) ως

προς την κατεύθυνση $(1, 0)$. Αντίστοιχα, η μερική παράγωγος $f_y(a, b)$ της συνάρτησης $f(x, y)$ ως προς τη μεταβλητή y στο σημείο (a, b) είναι η κατευθυνόμενη παράγωγος της συνάρτησης f στο σημείο (a, b) ως προς την κατεύθυνση $(0, 1)$.

Ορισμός 2: Έστω $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ μία πραγματική συνάρτηση n μεταβλητών με U ανοικτό, $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in U$ και $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ μία κατεύθυνση του $\mathbb{R}^n$ (δηλαδή $\|\vec{u}\| = 1$). Τότε **κατευθυνόμενη παράγωγος της f στο σημείο $\vec{a}$ ως προς την κατεύθυνση $\vec{u}$** είναι ο πραγματικός αριθμός $f_{\vec{u}}(\vec{a})$ που ορίζεται από τον τύπο:

$$\begin{aligned} f_{\vec{u}}(\vec{a}) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1 + u_1 h, a_2 + u_2 h, \dots, a_n + u_n h) - f(a_1, a_2, \dots, a_n)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\vec{a} + h\vec{u}) - f(\vec{a})}{h} \end{aligned} \quad (2)$$

Σχόλιο: Η κατευθυνόμενη παράγωγος είναι μία επέκταση (γενίκευση) της μερικής παραγώγου, καθώς η μερική παράγωγος $f_{x_i}(\vec{a})$ της συνάρτησης f ως προς τη μεταβλητή x_i στο σημείο $\vec{a}$ είναι η κατευθυνόμενη παράγωγος της συνάρτησης f στο σημείο $\vec{a}$ ως προς την κατεύθυνση $\vec{e}_i$ (όπου $\vec{e}_i$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα στο $\mathbb{R}^n$ που έχει όλες τις συντεταγμένες μηδέν εκτός από την i -οστή συντεταγμένη που είναι ίση με ένα).

Παρατήρηση 1: Μία συνάρτηση f που είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο $\vec{a}$, δεν έχει πάντα κατευθυνόμενη παράγωγο $f_{\vec{u}}(\vec{a})$ στο σημείο $\vec{a}$ ως προς κάθε κατεύθυνση $\vec{u}$.

Παρατήρηση 2: Μία συνάρτηση f που έχει κατευθυνόμενη παράγωγο $f_{\vec{u}}(\vec{a})$ σε ένα σημείο $\vec{a}$ ως προς κάθε κατεύθυνση $\vec{u}$, δεν είναι πάντα συνεχής στο σημείο $\vec{a}$.

Θεώρημα 1: Έστω $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ μία πραγματική συνάρτηση n μεταβλητών που είναι διαφορίσιμη στο σημείο $\vec{a} \in U$. Τότε υπάρχει η κατευθυνόμενη παράγωγος $f_{\vec{u}}(\vec{a})$ της f στο σημείο $\vec{a}$ για κάθε κατεύθυνση $\vec{u}$ και ισχύει ο τύπος:

$$f_{\vec{u}}(\vec{a}) = Df(\vec{a})(\vec{u}) = \nabla f(\vec{a}) \cdot \vec{u} \quad (3)$$

Απόδειξη: Εφόσον η συνάρτηση f είναι διαφορίσιμη στο $\vec{a}$, αν θέσουμε $\vec{x} = \vec{a} + h\vec{u}$ (για $h \neq 0$ πολύ μικρό), παίρνουμε

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|f(\vec{a} + h\vec{u}) - f(\vec{a}) - Df(\vec{a})(h\vec{u})|}{\|h\vec{u}\|} = 0$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|f(\vec{a} + h\vec{u}) - f(\vec{a}) - hDf(\vec{a})(\vec{u})|}{|h|} &= 0 \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{f(\vec{a} + h\vec{u}) - f(\vec{a})}{h} - Df(\vec{a})(\vec{u}) \right| = 0 \\ \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(\vec{a} + h\vec{u}) - f(\vec{a})}{h} - Df(\vec{a})(\vec{u}) \right] &= 0 \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\vec{a} + h\vec{u}) - f(\vec{a})}{h} = Df(\vec{a})(\vec{u}) \end{aligned}$$

(όπου χρησιμοποιήθηκε η σχέση $\|\vec{u}\| = 1$). Επομένως από την τελευταία σχέση, τον ορισμό της κατευθυνόμενης παραγώγου (Ορισμός 2) και τη σχέση (21) του 5ου μαθήματος έπεται το ζητούμενο.

Παρατήρηση 3: Μία συνάρτηση f που έχει κατευθυνόμενη παράγωγο $f_{\vec{u}}(\vec{a})$ σε ένα σημείο $\vec{a}$ ως προς κάθε κατεύθυνση $\vec{u}$, δεν είναι πάντα διαφορίσιμη στο $\vec{a}$.

Θεώρημα 2: Έστω $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ μία πραγματική συνάρτηση n μεταβλητών που είναι διαφορίσιμη στο σημείο $\vec{a} \in U$ με $\nabla f(\vec{a}) \neq 0$ και $\vec{u}$ μία κατεύθυνση του $\mathbb{R}^n$. Τότε η κατευθυνόμενη παράγωγος $f_{\vec{u}}(\vec{a})$ (ως συνάρτηση του $\vec{u}$) παίρνει **μέγιστη τιμή** όταν τα διανύσματα $\nabla f(\vec{a})$ και $\vec{u}$ είναι παράλληλα και **ελάχιστη τιμή** όταν τα

διανύσματα $\nabla f(\vec{a})$ και $\vec{u}$ είναι παράλληλα και αντίρροπα. Συγκεκριμένα, η κατευθυνόμενη παράγωγος $f_{\vec{u}}(\vec{a})$ της συνάρτησης f στο σημείο $\vec{a}$ παίρνει μέγιστη τιμή ίση με $\|\nabla f(\vec{a})\|$ στην κατεύθυνση $\vec{u} = \frac{\nabla f(\vec{a})}{\|\nabla f(\vec{a})\|}$ και ελάχιστη τιμή ίση με $-\|\nabla f(\vec{a})\|$ στην κατεύθυνση $\vec{u} = -\frac{\nabla f(\vec{a})}{\|\nabla f(\vec{a})\|}$.

Απόδειξη: Από το Θεώρημα 1 έχουμε ότι

$$f_{\vec{u}}(\vec{a}) = \nabla f(\vec{a}) \cdot \vec{u} = \|\nabla f(\vec{a})\| \|\vec{u}\| \cos\theta = \|\nabla f(\vec{a})\| \cos\theta \quad (4)$$

με θ τη γωνία μεταξύ $\nabla f(\vec{a})$ και $\vec{u}$. Αφού λοιπόν ισχύει ότι $-1 \leq \cos\theta \leq 1$, καταλήγουμε ότι η $f_{\vec{u}}(\vec{a})$ παίρνει τη μέγιστη τιμή όταν $\cos\theta = 1$ (δηλαδή $\theta = 0$) και την ελάχιστη τιμή όταν $\cos\theta = -1$ (δηλαδή $\theta = \pi$). Επομένως, η μέγιστη και ελάχιστη τιμή καθώς και οι κατευθύνσεις για τις οποίες παίρνει αυτές τις τιμές η κατευθυνόμενη παράγωγος δίνονται αντικαθιστώντας τις παραπάνω τιμές της γωνίας θ στη σχέση (4).

Άσκηση 1: Να υπολογιστεί η κατευθυνόμενη παράγωγος της συνάρτησης

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{y}, & y \neq 0 \\ 0, & y = 0 \end{cases}$$

στο σημείο $(0,0)$ ως προς την κατεύθυνση $\vec{u} = (u, v)$.

Λύση: Από τον Ορισμό 1 έχουμε τον τύπο:

$$\begin{aligned} f_{(u,v)}(0,0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+uh, 0+vh) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin(uvh^2)}{vh}}{h} \\ &= \frac{u}{u} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(uvh^2)}{vh^2} = u \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(uvh^2)}{uvh^2} = u \cdot 1 = u \end{aligned}$$

για $uv \neq 0$. Μας απομένουν οι περιπτώσεις για $uv = 0$, δηλαδή για $u = 0$ ή $v = 0$ και επειδή έχουμε ορίσει την κατεύθυνση να έχει $\|\vec{u}\| = 1$ αυτές οι κατευθύνσεις είναι εν τέλει οι $\vec{u} = (0,1)$ και $\vec{u} = (1,0)$. Επομένως,

$$f_{(0,1)}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0$$

$$f_{(1,0)}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0$$

Άσκηση 2: Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0,0) \\ 0, & (x, y) = (0,0) \end{cases}$$

είναι παραγωγίσιμη στο $(0,0)$ αλλά δεν υπάρχει η κατευθυνόμενη παράγωγος $f_{(u,v)}(0,0)$ για καμία κατεύθυνση (u,v) με $uv \neq 0$.

Λύση: Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $(0,0)$ με παράγωγο $f'(0,0) = [0 \ 0]$ (βλέπε 4ο μάθημα, Άσκηση 5). Όσον αφορά την κατευθυνόμενη παράγωγο, από τον Ορισμό 1 έχουμε ότι

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+uh, 0+vh) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{uvh^2}{(u^2+v^2)h^2}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{uv}{h} = \begin{cases} 0 & \text{για } uv = 0 \\ \text{δεν υπάρχει το όριο για } uv \neq 0 \end{cases}$$

(καθώς $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{uv}{h} = (uv)(+\infty)$ και $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{uv}{h} = (uv)(-\infty)$). Επομένως δεν υπάρχει η κατευθυνόμενη παράγωγος $f_{(u,v)}(0,0)$ της f στο $(0,0)$ ως προς την κατεύθυνση (u,v) για $uv \neq 0$.

Άσκηση 3: Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^4}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

έχει κατευθυνόμενη παράγωγο $f_{(u,v)}(0,0)$ στο $(0,0)$ ως προς κάθε κατεύθυνση $\vec{u} = (u, v)$ αλλά δεν είναι συνεχής στο $(0,0)$.

Λύση: Από τον Ορισμό 1 έχουμε ότι

$$f_{(u,v)}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+uh, 0+vh) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{uv^2h^3}{u^2h^2 + v^4h^4}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{uv^2}{u^2 + v^4h^2} = \frac{uv^2}{u^2} = \frac{v^2}{u} \text{ για } u \neq 0$$

Για την περίπτωση $u = 0$, παίρνουμε την κατεύθυνση $(u, v) = (0, 1)$ (ώστε $\|(u, v)\| = 1$) και επομένως έχουμε

$$f_{(0,1)}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+0h, 0+1h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{0}{h^4} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0-0}{h} = 0$$

Επομένως, η f έχει κατευθυνόμενες παραγώγους στο σημείο $(0,0)$ ως προς όλες τις κατευθύνσεις $\vec{u} = (u, v)$.

Η συνάρτηση f όμως δεν είναι συνεχής στο $(0,0)$ καθώς δεν υπάρχει καν το όριο $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ αφού

$$f(x, 0) = \frac{0}{x^2} = 0 \rightarrow 0 \quad \text{και} \quad f(y^2, y) = \frac{y^4}{y^4 + y^4} = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2}.$$

Άσκηση 4: Να υπολογιστεί η κατευθυνόμενη παράγωγος της συνάρτησης

$f(x, y, z) = xe^y + z \sin y$ στο σημείο $\vec{a} = (1, 0, 1)$ ως προς την κατεύθυνση του διανύσματος $\vec{u} = (1, 1, 0)$.

Λύση: Η συνάρτηση f είναι διαφορίσιμη διότι οι μερικές της παράγωγοι

$$f_x(x, y, z) = e^y, \quad f_y(x, y, z) = xe^y + z \cos y, \quad f_z(x, y, z) = \sin y$$

υπάρχουν και είναι συνεχείς. Η κλίση της f είναι η $\nabla f(x, y, z) = (f_x(x, y, z), f_y(x, y, z), f_z(x, y, z)) = (e^y, xe^y + z \cos y, \sin y)$ η οποία παίρνει στο σημείο $(1, 0, 1)$ την τιμή $\nabla f(1, 0, 1) = (1, 2, 0)$.

Το διάνυσμα $\vec{u} = (1, 1, 0)$ δεν είναι μοναδιαίο (δηλαδή $\|u\| \neq 1$) επομένως θέλουμε να βρούμε την κατεύθυνσή του ώστε να βρούμε έπειτα την κατευθυνόμενη παράγωγο της f στο σημείο $(1,0,1)$ ως προς την κατεύθυνση του $\vec{u}$. Επομένως η ζητούμενη κατεύθυνση (δηλαδή το ζητούμενο μοναδιαίο διάνυσμα) είναι η

$$\vec{w} = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = \frac{(1, 1, 0)}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2}} = \frac{(1, 1, 0)}{\sqrt{2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right)$$

Επομένως από το Θεώρημα 1 υπάρχει η κατευθυνόμενη παράγωγος της f στο σημείο $(1,0,1)$ ως προς την κατεύθυνση του διανύσματος $\vec{u} = (1, 1, 0)$ (δηλαδή ως προς το μοναδιαίο διάνυσμα $\vec{w} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$) και δίνεται από τον τύπο

$$f_{\vec{w}}(\vec{a}) = \nabla f(1, 0, 1) \cdot \vec{w} = (1, 2, 0) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right) = 1 \frac{1}{\sqrt{2}} + 2 \frac{1}{\sqrt{2}} + 0 = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Άσκηση 5: Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

έχει κατευθυνόμενη παράγωγο στο $(0, 0)$ ως προς την κατεύθυνση $\vec{u} = (u, v)$ αλλά δεν είναι διαφορίσιμη στο $(0, 0)$.

Λύση: Από τον ορισμό της κατευθυνόμενης παραγώγου έχουμε

$$f_{(u,v)}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(uh, vh) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{u^3 h^3}{(u^2 + v^2)h^2}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} u^3 = u^3$$

(όπου χρησιμοποιήθηκε η σχέση $u^2 + v^2 = \|\vec{u}\|^2 = 1^2 = 1$).

Άρα η f έχει κατευθυνόμενη παράγωγο στο σημείο $(0, 0)$ ως προς κάθε κατεύθυνση $\vec{u} = (u, v)$ και **επομένως** είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $(0, 0)$ με κλίση $\nabla f(0, 0) = (1, 0)$. Όμως το όριο

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|f(x, y) - f(0, 0) - \nabla f(0, 0) \cdot (x, y)|}{\|(x, y) - (0, 0)\|} &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|f(x, y) - f(0, 0) - (1, 0) \cdot (x, y)|}{\|(x, y) - (0, 0)\|} \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\left| \frac{x^3}{x^2 + y^2} - x \right|}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|x|y^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

δεν υπάρχει, καθώς

$$\begin{cases} \lim_{(x,0) \rightarrow (0,0)} \frac{|x|y^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = \lim_{(x,0) \rightarrow (0,0)} \frac{0}{(y^2)^{3/2}} = 0 \\ \lim_{(x,x) \rightarrow (0,0)} \frac{|x|y^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = \lim_{(x,x) \rightarrow (0,0)} \frac{|x|x^2}{(2x^2)^{3/2}} = \lim_{(x,x) \rightarrow (0,0)} \frac{|x|^3}{(\sqrt{2})^3 |x|^3} = \frac{1}{(\sqrt{2})^3} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{cases}$$

(από $(x^2)^{3/2} = (\sqrt{x^2})^3 = |x|^3$ και προφανώς $x^2 = |x|^2$). Επομένως από το Θεώρημα 2 του 5ου μαθηματος, η f δεν είναι διαφορίσιμη στο $(0, 0)$ (εφόσον έχουμε ήδη πεί ότι είναι παραγωγίσιμη οπότε για να είναι διαφορίσιμη θα έπρεπε το παραπάνω όριο να υπάρχει και να είναι ίσο με μηδέν).

Άσκηση 6: Έστω $f(x, y, z) = x - y^2 + xz^3$. (i) Να βρεθούν οι κατευθύνσεις $\vec{u}$ για τις οποίες παίρνει η κατευθυνόμενη παράγωγος της f στο σημείο $\vec{a} = (0, 0, 0)$ μέγιστη και ελάχιστη τιμή. (ii) Αντίστοιχα, να βρεθούν οι κατευθύνσεις $\vec{u}$ για τις οποίες παίρνει η κατευθυνόμενη παράγωγος της f στο σημείο $\vec{a} = (2, 1, 1)$ μέγιστη και ελάχιστη τιμή.

Λύση: $\nabla f(x, y, z) = (f_x(x, y, z), f_y(x, y, z), f_z(x, y, z)) = (1 + z^3, -2y, 3xz^2)$

(i) Στο σημείο $\vec{a} = (0, 0, 0)$ έχουμε $\nabla f(0, 0, 0) = (1, 0, 0)$.

Επομένως, από το Θεώρημα 2 έχουμε ότι η κατεύθυνση για την οποία η κατευθυνόμενη παράγωγος $f_{\vec{u}}(0, 0, 0)$ παίρνει μέγιστη τιμή είναι η

$$\vec{u} = \frac{\nabla f(0, 0, 0)}{\|\nabla f(0, 0, 0)\|} = \frac{(1, 0, 0)}{\|(1, 0, 0)\|} = (1, 0, 0)$$

και η κατεύθυνση για την οποία η κατευθυνόμενη παράγωγος $f_{\vec{u}}(0, 0, 0)$ παίρνει ελάχιστη τιμή είναι η

$$\vec{u} = -\frac{\nabla f(0, 0, 0)}{\|\nabla f(0, 0, 0)\|} = -\frac{(1, 0, 0)}{\|(1, 0, 0)\|} = (-1, 0, 0).$$

(ii) Στο σημείο $\vec{a} = (2, 1, 1)$ έχουμε $\nabla f(2, 1, 1) = (2, -2, 6)$.

Επομένως, από το Θεώρημα 2 έχουμε ότι η κατεύθυνση για την οποία η κατευθυνόμενη παράγωγος $f_{\vec{u}}(2, 1, 1)$ παίρνει μέγιστη τιμή είναι η

$$\vec{u} = \frac{\nabla f(2, 1, 1)}{\|\nabla f(2, 1, 1)\|} = \frac{(2, -2, 6)}{\|(2, -2, 6)\|} = \left(\frac{2}{\sqrt{44}}, \frac{-2}{\sqrt{44}}, \frac{6}{\sqrt{44}}\right)$$

και η κατεύθυνση για την οποία η κατευθυνόμενη παράγωγος $f_{\vec{u}}(2, 1, 1)$ παίρνει ελάχιστη τιμή είναι η

$$\vec{u} = -\frac{\nabla f(2, 1, 1)}{\|\nabla f(2, 1, 1)\|} = -\frac{(2, -2, 6)}{\|(2, -2, 6)\|} = \left(\frac{-2}{\sqrt{44}}, \frac{2}{\sqrt{44}}, \frac{-6}{\sqrt{44}}\right).$$