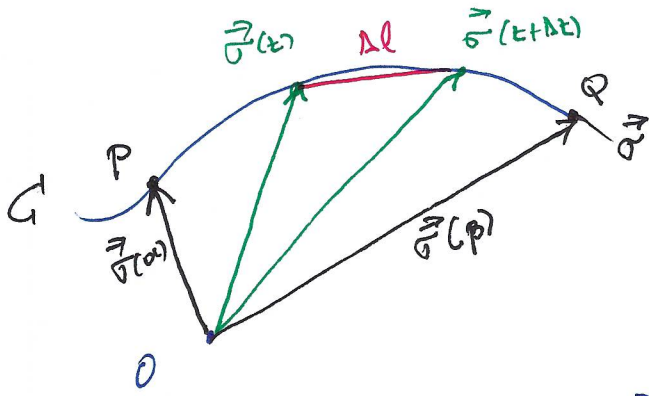


Μήκος τόξου.



$$\vec{r}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$$

Καμπύλη στον $\mathbb{R}^n$.

$$\Delta l = \|\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)\| =$$

$$= \left\{ [x_1(t+\Delta t) - x_1(t)]^2 + \dots + [x_n(t+\Delta t) - x_n(t)]^2 \right\}^{1/2}$$

Εάν η $\vec{r}$ είναι διαφορίσιμη $\Rightarrow x_i(t)$ διαφορίσιμες

$\Downarrow$ (Θεώρημα μέσης τιμής)

$$x_i(t+\Delta t) - x_i(t) = \Delta t \frac{dx_i}{dt}(t_i^*)$$

$$t < t_i^* < t + \Delta t$$

$\Downarrow$

$$\Delta l = \Delta t \left\{ \left[\frac{dx_1}{dt}(t_i^*) \right]^2 + \dots + \left[\frac{dx_n}{dt}(t_i^*) \right]^2 \right\}^{1/2}$$

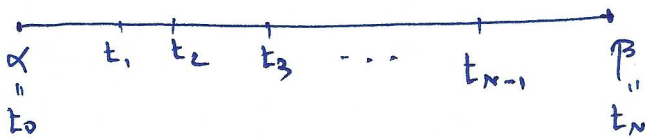
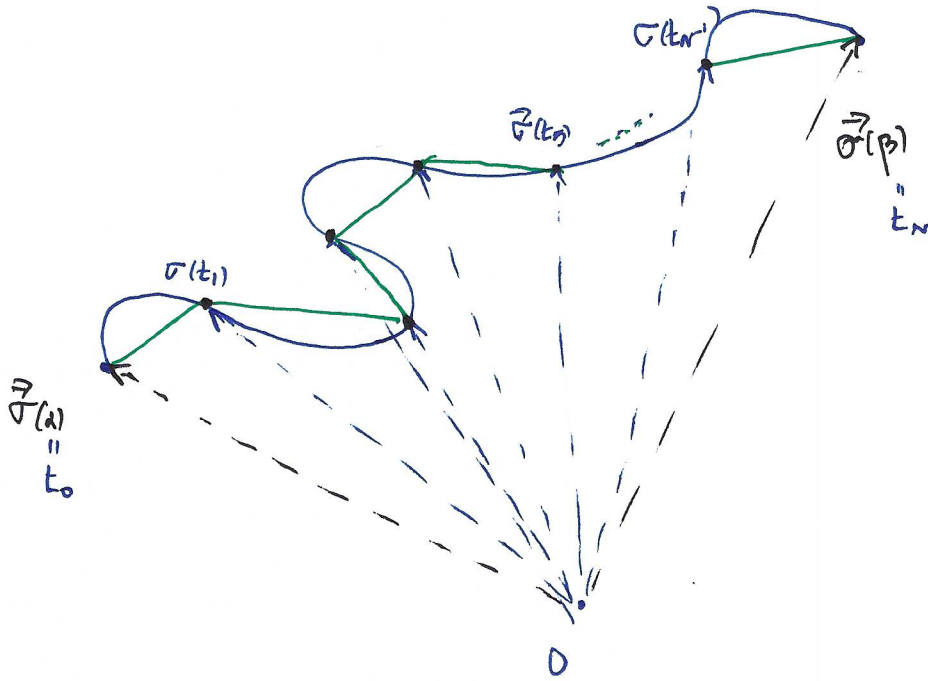
$\Downarrow \Delta t \rightarrow 0 \quad (t_i^* \rightarrow t)$

$$\frac{dl}{dt} = \left\| \frac{d\vec{r}}{dt} \right\|$$

$$dl = \left\| \frac{d\vec{r}}{dt} \right\| dt \quad \begin{array}{l} \text{Στοιχείο} \\ \text{μήκους} \end{array}$$

$$l(C[PQ]) = \int_a^b \left\| \frac{d\vec{r}}{dt} \right\| dt = \int_{C[PQ]} dl$$

(2).



$$S_N = \sum_{i=0}^{N-1} \|\vec{\sigma}(t_{i+1}) - \vec{\sigma}(t_i)\|$$

$$\|\vec{\sigma}(t_{i+1}) - \vec{\sigma}(t_i)\| = \left[(\chi_1(t_{i+1}) - \chi_1(t_i))^2 + \dots + (\chi_n(t_{i+1}) - \chi_n(t_i))^2 \right]^{1/2} \Rightarrow$$

$$\chi_m(t_{i+1}) - \chi_m(t_i) = (t_{i+1} - t_i) \frac{d\chi_m}{dt} \left(t_i^{(m)} \right), \quad m = 1, \dots, n$$

(Θέωρημα μέσης τιμής για διαφορίσιμες συναρτήσεις)

$$t_{i+1} < t_i^{(m)} < t_i$$

$$S_N = \sum_{i=0}^{N-1} (t_{i+1} - t_i) \left[\left(\frac{d\chi_1}{dt} \left(t_i^{(1)} \right) \right)^2 + \dots + \left(\frac{d\chi_n}{dt} \left(t_i^{(n)} \right) \right)^2 \right]$$

$$S_N = S_{0N} + [S_N - S_{0N}]$$

όπου

$$S_{0N} = \sum_{i=0}^{N-1} (t_{i+1} - t_i) \left[\left(\frac{dx}{dt}(t_i^*) \right)^2 + \dots + \left(\frac{dx_n}{dt}(t_i^*) \right)^2 \right]^{1/2}$$

$$t_i < t_i^* < t_{i+1}$$

Όταν

$$N \rightarrow \infty$$

$$t_{i+1} - t_i \rightarrow 0$$

και $x_m(t)$ είναι C^1
(C^1 καμπύλη)

$$S_{0N} \rightarrow \int_{\alpha}^{\beta} \left\| \frac{d\vec{\sigma}}{dt} \right\| dt$$

και αποδεικνύεται ότι $S_N - S_{0N} \rightarrow 0$.

Επομένως το μικρό τόξο ($t \in [\alpha, \beta]$) μιας C^1 καμπύλης δίνεται από την έκφραση:

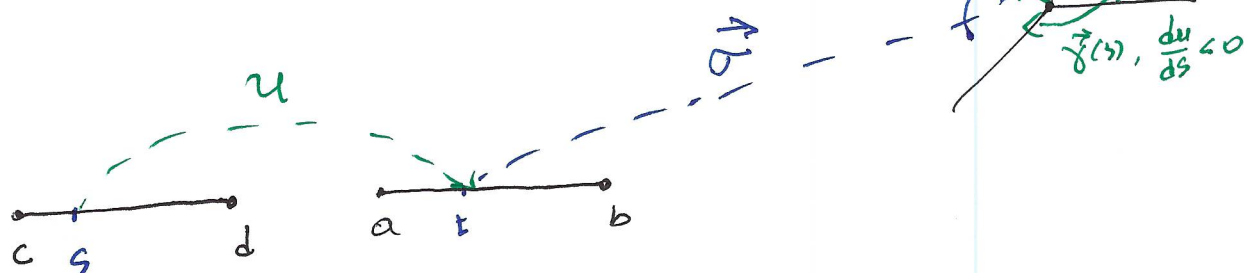
$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \left\| \frac{d\vec{\sigma}}{dt} \right\| dt.$$

Η έκφραση ισχύει και για "Τμηματικά C^1 " καμπύλες.

→ Τμηματικά C^1 όταν $\alpha' \xrightarrow{t_0} t_1 \dots t_i \dots t_{i+1} \dots t_N' \xrightarrow{t_N}$ όταν είναι διαφορετικό
στα (t_i, t_{i+1}) με συνεχή παραγώγους στα $[t_i, t_{i+1}]$.

(4).

Αναπαράμετροποίηση καμπύλης.



$$u: [c, d] \rightarrow [a, b]$$

$$\vec{\sigma}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$\vec{\sigma}(a), \vec{\sigma}(b)$ τα άκρα

$$\vec{\gamma} = \vec{\sigma} \circ u: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\vec{\gamma}(s) = \vec{\sigma}(t) = \vec{\sigma}(u(s))$$

$t = u(s)$: πιο απλός συμβολισμός

Αναπαράμετροποιώντας οι οποίες δίνονται ως ιδιότητες της καμπύλης.

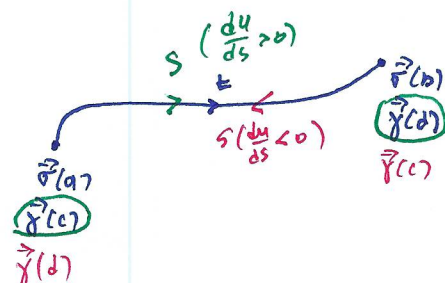
• u ένα προς ένα. $t = u(s), s = u^{-1}(t), \vec{\gamma}(s)$ ακριβώς η $\vec{\sigma}(t)$

• u συνεχής. $\vec{\sigma}(t)$ συνεχής $\Rightarrow \vec{\gamma}(s)$ συνεχής

• $\vec{\sigma}$ γλίσσα $\Rightarrow \frac{d\vec{\sigma}}{dt} \neq 0$.
 $\frac{d\vec{\gamma}}{ds} = \frac{du}{ds} \frac{d\vec{\sigma}}{dt} \rightarrow \frac{du}{ds} \neq 0 \rightarrow \vec{\gamma}(s)$ γλίσσα.

$$\frac{du}{ds} > 0 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} u(c) = a \\ u(d) = b \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \vec{\gamma}(c) = \vec{\sigma}(a) \\ \vec{\gamma}(d) = \vec{\sigma}(b) \end{array} \right.$$

$$\frac{du}{ds} < 0 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} u(c) = b \\ u(d) = a \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \vec{\gamma}(c) = \vec{\sigma}(b) \\ \vec{\gamma}(d) = \vec{\sigma}(a) \end{array} \right.$$



(5).

- Το μήκος είναι ανεξάρτητο τις παραμετροποιήσεων.

$$\vec{\sigma}(t) : \quad l(t) = \int_a^b \left\| \frac{d\vec{\sigma}(t)}{dt} \right\| dt$$

$$\vec{\gamma}(s) : \quad l(s) = \int_c^d \left\| \frac{d\vec{\gamma}(s)}{ds} \right\| ds$$

Η αλλαγή μεταστροφής σε οδοτρόπια δίνεται από την
Έκφραση :

$$\int_c^d f(u(s)) \frac{du}{ds} ds = \int_{u(c)}^{u(d)} f(t) dt$$

$$l(s) = \int_c^d \left\| \frac{d\vec{\gamma}(s)}{ds} \right\| ds = \int_c^d \left\| \frac{d\vec{\sigma}(u(s))}{ds} \right\| ds$$

$$= \int_c^d \left| \frac{du}{ds} \right| \left\| \frac{d\vec{\sigma}}{dt} \right\| ds$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \int_c^d \left(\frac{du}{ds} \right) \left\| \frac{d\vec{\sigma}}{dt} \right\| ds, \quad \frac{du}{ds} > 0 \\ \int_d^c \frac{du}{ds} \left\| \frac{d\vec{\sigma}}{dt} \right\| ds, \quad \frac{du}{ds} < 0 \end{array} \right\} = \int_a^b \left\| \frac{d\vec{\sigma}}{dt} \right\| dt = l(t)$$

⇓

$$\boxed{l = l(t) = l(s)}$$

• Παράμετρος "μικρός κόβου".

(6).

$$\vec{\sigma}(t), \quad t \in [a, b]$$

$$l(t) = \int_a^t \left\| \frac{d\vec{\sigma}}{dt'} \right\| dt'$$

$$S = l(t) = \int_a^t \left\| \frac{d\vec{\sigma}}{dt'}(t') \right\| dt'$$

$$\frac{ds}{dt} = \left\| \frac{d\vec{\sigma}}{dt}(t) \right\| > 0 \quad (\text{για } t \text{ για κανονική})$$

$$t \in [a, b] \Rightarrow s \in [0, l]$$

$$\vec{\gamma}(s) = \vec{\sigma}(t(s))$$

$$\frac{ds}{dt} > 0 \Rightarrow s(t) \text{ αντιστρέφεται} \Rightarrow t(s)$$

(γινώσκω ούρα)

$$\frac{d\vec{\gamma}}{ds} = \frac{d}{ds} \vec{\sigma}(t(s)) = \frac{d\vec{\sigma}}{dt} \frac{dt}{ds}$$

$$= \frac{d\vec{\sigma}}{dt} \frac{1}{\left(\frac{ds}{dt} \right)} \Rightarrow \frac{d\vec{\gamma}}{ds} = \frac{1}{\left\| \frac{d\vec{\sigma}}{dt} \right\|} \frac{d\vec{\sigma}}{dt} = \frac{\hat{T}}{\| \hat{T} \|}$$

(μοναδιαίο εφαπτόμενο)

↓

$$\left\| \frac{d\vec{\gamma}}{ds} \right\| = 1$$

(Παράμετρος μοναδιαίας ταχύτητας)

"Ομοκινούμενο" σύστημα.

(7)

Έστω $\vec{\gamma}(s)$ καμύνη, s : η παράμετρος "μήκος τόξου"
 για στον $\mathbb{R}^3$ (μοναδιαία ταχύτητα)

$$\frac{d}{ds} \vec{\gamma}(s) \equiv \vec{\gamma}'(s) = \hat{T}, \quad \hat{T}: \text{μοναδιαίο εφαπτόμενο στην καμύνη}$$

$$\hat{T} \cdot \hat{T} = 1 \Rightarrow \frac{d\hat{T}}{ds} \cdot \hat{T} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d\hat{T}}{ds} \perp \hat{T} \Rightarrow \frac{d\hat{T}}{ds} (= \gamma''(s)) = k \hat{N} \quad \hat{N}: \text{πρωτεύον κάθετο}$$

$$k = \left\| \frac{d\hat{T}}{ds} \right\|, \quad k: \text{καμυφότητα}$$

$$k=0 \Rightarrow \frac{d\hat{T}}{ds} = 0 \Rightarrow \hat{T}: \text{σταθερό διάνυσμα}$$

$$\frac{d\vec{\gamma}(s)}{ds} = \hat{T} \Rightarrow \vec{\gamma}(s) = \vec{\gamma}(0) + s\hat{T}$$

(ημικυκλίου με ακτίνα $\gamma(0)$ και κατεύθυνση $\hat{T}$).

Με $n=3$:

$$\hat{B} = \hat{T} \times \hat{N} \Rightarrow \|\hat{B}\|=1, \hat{B} \perp \hat{T}, \hat{N}. \quad \hat{B}: \text{δευτερεύον κάθετο.}$$

Επιμέγεθος: $\hat{T}, \hat{N}, \hat{B}$ ορθόγων, τετραεδρικό
 σύστημα (βάση) σε κάθε
 σημείο της καμύνης.

$$\|\hat{T}\| = \|\hat{N}\| = \|\hat{B}\| = 1$$

$$\hat{T} \cdot \hat{N} = \hat{T} \cdot \hat{B} = \hat{N} \cdot \hat{B} = 0$$

$$\hat{B} = \hat{T} \times \hat{N}, \quad \hat{N} = \hat{B} \times \hat{T}, \quad \hat{T} = \hat{N} \times \hat{B}.$$

$$(\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}.$$

Σχίσμα Frenet.

$$\vec{r}'(s) = \hat{T}$$

$$\frac{d\hat{T}}{ds} = k \hat{N}, \quad k: \text{καμπυλότητα.}$$

$$\hat{B} = \hat{T} \times \hat{N} \Rightarrow \frac{d\hat{B}}{ds} = \frac{d\hat{T}}{ds} \times \hat{N} + \hat{T} \times \frac{d\hat{N}}{ds}$$

$$= k \underbrace{\hat{N} \times \hat{N}}_0 + \hat{T} \times \frac{d\hat{N}}{ds} \Rightarrow \frac{d\hat{B}}{ds} = \hat{T} \times \frac{d\hat{N}}{ds}$$

$$\left. \begin{aligned} \Rightarrow \frac{d\hat{B}}{ds} \cdot \hat{T} &= 0 \\ \Rightarrow \frac{d\hat{B}}{ds} \cdot \hat{B} &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{matrix} n=3 \\ \Rightarrow \end{matrix}$$

$$\frac{d\hat{B}}{ds} = -\tau \hat{N}, \quad \tau: \text{στρέψη.}$$

($\tau=0 \Rightarrow$ ευθεία καμπύλη).

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{N}}{ds} &= \frac{d}{ds} (\hat{B} \times \hat{T}) = \frac{d\hat{B}}{ds} \times \hat{T} + \hat{B} \times \frac{d\hat{T}}{ds} = -\tau \hat{N} \times \hat{T} + k \hat{B} \times \hat{N} \\ &= \tau \hat{B} - k \hat{T}. \end{aligned}$$

$$\frac{d\hat{T}}{ds} = k \hat{N}, \quad \frac{d\hat{N}}{ds} = \tau \hat{B} - k \hat{T}, \quad \frac{d\hat{B}}{ds} = -\tau \hat{N}$$

k : καμπυλότητα

τ : στρέψη

Σχίσμα
Frenet

Ασκηση.

1. Δίδεται το κυρτοειδές :

$$\vec{\sigma}(t) = a(t - \sin t, 1 - \cos t).$$

Να υπολογιστεί το μήκος του στο ίδιο $t \in [0, 2\pi]$.

2. Να υπολογιστεί το συνωστισμό μήκους διαγράμματος το κυρτοειδές ως γράφημα συνάρτησης $y = y(x)$.

3. Να δείχθεί ότι :

$$k = \|\vec{\gamma}''(s)\|$$

$$\tau = \frac{[\vec{\gamma}'(s) \times \vec{\gamma}''(s)] \cdot \vec{\gamma}'''(s)}{\|\vec{\gamma}''(s)\|^2}$$

4. Για τυχόν παραμετροποίηση να δείχθεί ότι :

$$k = \frac{\|\vec{\sigma}'(t) \times \vec{\sigma}''(t)\|}{\|\vec{\sigma}'(t)\|}$$

$$\tau = \frac{[\vec{\sigma}'(t) \times \vec{\sigma}''(t)] \cdot \vec{\sigma}'''(t)}{\|\vec{\sigma}'(t) \times \vec{\sigma}''(t)\|^2}$$

5. Να υπολογιστεί το μήκος του υποκυβελίου

$$\vec{\sigma}(t) = a(\cos^3 t, \sin^3 t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

6. Δίδεται η έλικα:

$$\vec{\sigma}(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$$

στο τόξο $t \in [0, 2\pi]$.

- (i). Να ελεγχθεί το μήκος.
- (ii). Να παραμετροποιηθεί με την παραμέτρο "μήκος τόξου".
- (iii). Να κατασκευαστεί το σύστημα Frenet.
- (iv). Να ελεγχθούν η καμπυλότητα και η στρέψη.