Διανυσματικές Συναρτήσεις μίας μεταβλητής.

Καμπύλες στον $\mathbb{R}^n$.

A. Καμπύλες στο επίπεδο.

- Γεωμετρικός ορισμός.

  Σημεία του επιπέδου τα οποία συνδέονται με κάποια ιδιότητα.

- Αναλυτική περιγραφή.

(i). $y = f(x)$: Γράφημα συνάρτησης μίας μεταβλητής.

(ii). $F(x,y) = 0$: Πεπλεγμένη μορφή.

(iii). $\vec{\sigma}(t) = (x(t), y(t))$: Παραμετρική περιγραφή (παραμετρική καμπύλη).

$t \in I$ (διάστημα του $\mathbb{R}$)

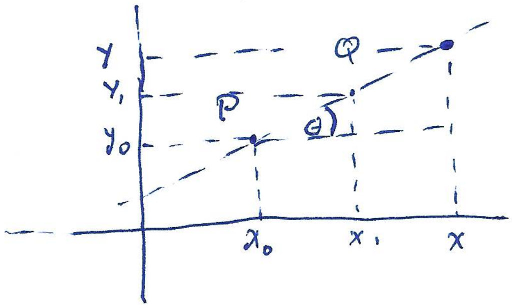
Διανυσματική συνάρτηση:

$\vec{\sigma} : I \to \mathbb{R}^2$.

Παραδείγματα.

1. Ευθεία.

"ευθεία γραμμή είναι ..."



$$\tan\theta = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = c \quad \rightarrow \quad \frac{y - y_0}{x - x_0} = c \Rightarrow \begin{cases} y = y_0 + c(x - x_0) & \rightarrow \text{γράφημα} \\ (y - y_0) - c(x - x_0) = 0 & \rightarrow \text{πεπλ. μορφή} \end{cases}$$

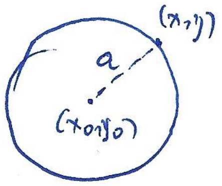
$$* \; \left(y = y_1 + c(x - x_1)\right)$$

$$x - x_0 = \alpha t \Rightarrow \left.\begin{aligned} x(t) &= x_0 + \alpha t \\ y(t) &= y_0 + \beta t \qquad (\beta = \alpha c) \end{aligned}\right\} \text{παραμετρική έκφραση}$$

$$\vec{\sigma}(t) = \vec{r}_0 + \vec{a}\, t \;, \quad \vec{r}_0 = (x_0, y_0), \quad \vec{a} = (\alpha, \beta).$$

2. Κύκλος.

"Σημεία που ισαπέχουν ..."

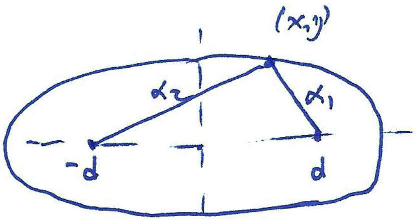


$$\underbrace{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = a^2}_{\text{πεπλ. μορφή}} \quad \rightarrow \quad \underbrace{y = y_0 \pm \sqrt{a^2 - (x - x_0)^2}}_{\text{δεν είναι γράφημα}}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{x - x_0}{a} &= \cos t \\ \frac{y - y_0}{a} &= \sin t \end{aligned}\right\} \rightarrow \quad \vec{\sigma}(t) = \vec{r}_0 + a(\cos t, \sin t)$$

3. Έλλειψη.

"Τα σημεία των οποίων το άθροισμα των..."



$$\underbrace{\sqrt{(x-d)^2+y^2}}_{\alpha_1} + \underbrace{\sqrt{(x+d)^2+y^2}}_{\alpha_2} = 2a$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 2a$$

$$(x-d)^2+y^2 = 4a^2 + (x+d)^2+y^2 - 4a\sqrt{(x+d)^2+y^2} \Rightarrow$$

$$4a^2 + 4xd = 4a\sqrt{(x+d)^2+y^2} \Rightarrow a + \frac{xd}{a} = \sqrt{x^2+d^2+2xd+y^2} \Rightarrow$$

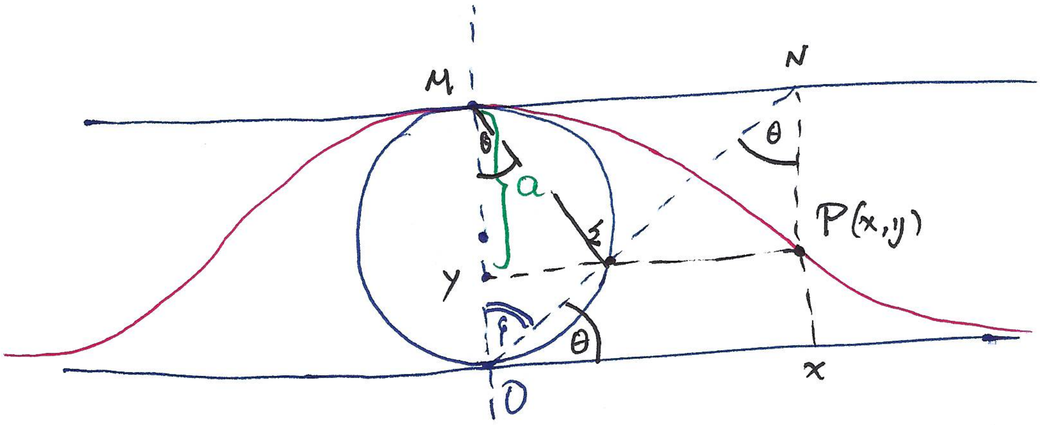
$$a^2 + \frac{x^2d^2}{a^2} + \cancel{2xd} = x^2+d^2+y^2+\cancel{2xd} \Rightarrow$$

$$x^2\left(1-\frac{d^2}{a^2}\right) + y^2 = a^2-d^2 \quad (a>d) \Rightarrow$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad b^2 = a^2-d^2 \qquad \text{(όχι τέλειωμα)}$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{x}{a} = \cos t \\ \frac{y}{a} = \sin t \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{r}(t) = (a\cos t, b\sin t)$$

4. Καμπύλη της Agnesi.



$\theta \to 0 :\quad x \to \infty,\ y \to 0$

$\to \frac{\pi}{2} :\quad x \to 0,\ y \to 2a$

$\theta \to \pi :\quad x \to -\infty,\ y \to 0$

$$\tan\theta = \frac{2a}{x} \Rightarrow x = 2a/\tan\theta$$

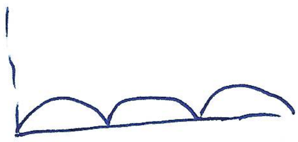
$$\left.\begin{aligned} y &= (O\Sigma)\sin\theta \\ (O\Sigma) &= 2a\sin\theta \end{aligned}\right\} \Rightarrow y = 2a\sin^2\theta$$

$$\vec{\sigma}(\theta) = 2a\left(\frac{1}{\tan\theta},\ \sin^2\theta\right)$$

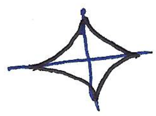
$$x^2 = 4a^2\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} \Rightarrow x^2 + 4a^2 = \frac{4a^2}{\sin^2\theta} = \frac{4a^2}{\frac{y}{2a}} \Rightarrow$$

$$y = \frac{8a^3}{x^2+4a^2}$$

5. Κυκλοειδής. $\quad \vec{\sigma}(t) = (t - \sin t,\ 1 - \cos t)$.



6. Γράφημα. $\quad \vec{\sigma}(t) = (t, f(t))$.



$(t \in [-1,1])$

7. Υποκυκλοειδής. $\quad \vec{\sigma}(t) = (\cos^3 t,\ \sin^3 t)$

8. Παραβολή. $\quad \vec{\sigma}(t) = (t, t^2)$

B. Καμπύλες στον $\mathbb{R}^n$.

$$\vec{r} = (x_1, \dots, x_n)$$

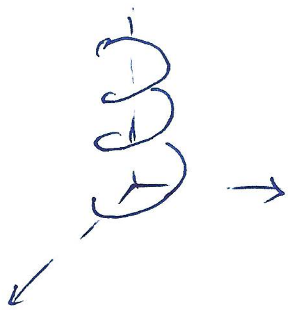
(i). $x_i = f_i(x_j), \quad i \neq j$

(ii). $F_1(x_1, \dots, x_n) = \dots = F_{n-1}(x_1, \dots, x_n) = 0$

(iii). $\vec{\sigma}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)), \qquad \vec{\sigma} : I \to \mathbb{R}^n, \quad I \subset \mathbb{R}$.

π.χ. $\mathbb{R}^3$.

$\vec{\sigma}(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$: έλικα.



Γ. Μελέτη καμπυλών.

Η παραμετρική διατύπωση των καμπυλών επιτρέπει την αναλυτική μελέτη τους με χρήση της ανάλυσης συναρτήσεων μιας μεταβλητής.

Ο λόγος είναι ο ακόλουθος:

$$f : I \to \mathbb{R}$$

$$\left.\begin{array}{l} f(x) \to c \\ x \to x_0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} f(x) - c \to 0 \\ x \to x_0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} | \quad | \to 0 \\ x \to x_0 \end{array}\right.$$

(μόνο το 0 έχει απόλυτη τιμή 0).

$$\vec{\sigma} : I \to \mathbb{R}^n$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{\sigma}(t) \to \vec{c} \\ t \to t_0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \vec{\sigma}(t) - \vec{c} \to 0 \\ t \to t_0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \|\vec{\sigma}(t) - \vec{c}\| \to 0 \\ t \to t_0 \end{array}\right.$$

(μόνο το $\vec{0}$ έχει μέτρο 0).

Έστω $\vec{\sigma}(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$

$\vec{c} = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$

$$\|\vec{\sigma}(t) - \vec{c}\| = \left[(x_1(t)-\gamma_1)^2 + \cdots + (x_n(t)-\gamma_n)^2\right]^{1/2} \to 0 \Leftrightarrow$$

$$x_i(t) - \gamma_i \to 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$ (${x_i(t)}$ πραγμ. συν. μιας πραγμ. μετ.)

$$\lim_{t \to t_0} \vec{\sigma}(t) = \vec{c} \iff \lim_{t \to t_0} x_i(t) = \gamma_i$$

Επομένως μπορούμε να έχουμε καμπύλες με τις (π.χ.) ακόλουθες ιδιότητες:

$$t \longmapsto (x_1(t), \dots, x_n(t))$$

(a). Συνεχής καμπύλη : $x_i(t)$ συνεχείς συναρτήσεις.

(b). Διαφορίσιμη καμπύλη : $x_i(t)$ διαφορίσιμες -//- . *

(c). C^1 -//- : $x_i(t)$ συνεχώς διαφορίσιμες.

(d). Λεία καμπύλη : C^1 και $\frac{d\vec{\sigma}}{dt} \neq 0$.

*

$\vec{\sigma}(t)$ διαφορίσιμη

$$\boxed{\vec{v}(t) = \frac{d\vec{\sigma}(t)}{dt} = \left(\frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \dots, \frac{dx_n}{dt}\right)} \quad **$$

L: "ταχύτητα καμπύλης"

**

$$\frac{d\vec{\sigma}(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{\sigma}(t+\Delta t) - \vec{\sigma}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{x_1(t+\Delta t) - x_1(t)}{\Delta t}, \dots, \frac{x_n(t+\Delta t) - x_n(t)}{\Delta t} \right)$$

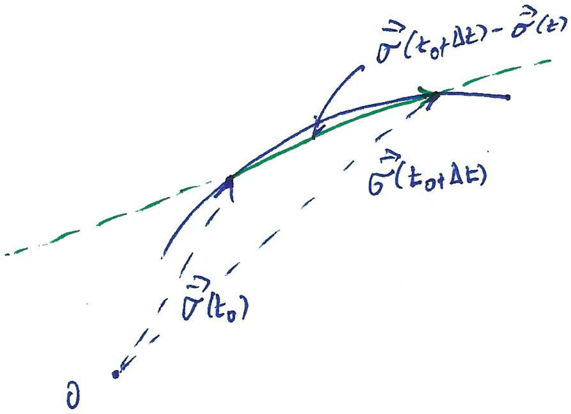
$$= \left(\lim_{\Delta t \to 0} \frac{x_1(t+\Delta t) - x_1(t)}{\Delta t}, \dots, \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x_n(t+\Delta t) - x_n(t)}{\Delta t} \right)$$

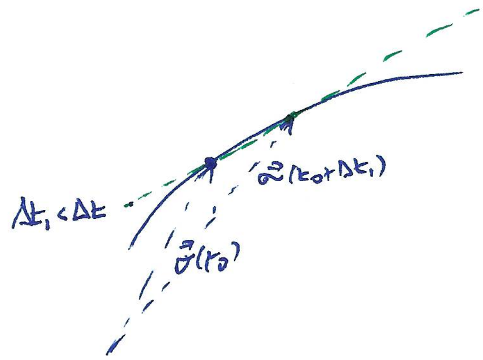
$$= \left(\frac{dx_1(t)}{dt}, \dots \frac{dx_n(t)}{dt} \right).$$

"Επιτάχυνση" καμπύλης.

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d^2\vec{\sigma}(t)}{dt^2}.$$

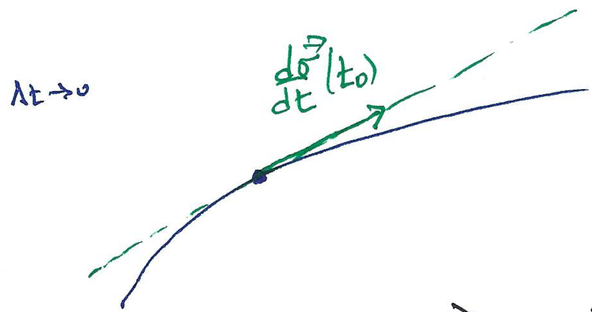
"Γεωμετρία της ταχύτητας".





$\frac{1}{\Delta t}\left(\vec{\sigma}(t_0+\Delta t)-\vec{\sigma}(t_0)\right)$: διάνυσμα από το $\vec{\sigma}(t_0)$ στο $\vec{\sigma}(t_0+\Delta t)$) $\frac{1}{\Delta t}$

$\vec{\sigma}(t_0)+\lambda\left[\vec{\sigma}(t_0+\Delta t)-\vec{\sigma}(t_0)\right]$: ευθεία η οποία διέρχεται από τα δύο σημεία



$\frac{d\vec{\sigma}}{dt}(t_0)$: διάνυσμα εφαπτόμενο στην καμπύλη στο σημείο $\vec{\sigma}(t_0)$.

$$\vec{\gamma}(\ ) = \vec{\sigma}(t_0) + \lambda \underbrace{\frac{d\vec{\sigma}}{dt}(t_0)}_{\vec{v}(t_0)}$$: ευθεία εφαπτόμενη της καμπύλης στο σημείο $\vec{\sigma}(t_0)$.

"Γραμμική προσέγγιση" της καμπύλης.

· Έστω $f : I \to \mathbb{R}$ διαφορίσιμη στο σημείο x_0, με $\frac{df}{dx}(x_0) \neq 0$.

· Έστω: $f(x_0+h) = f(x_0) + h\frac{df}{dx}(x_0) + h\eta(h)$

$\Rightarrow$ $\left.\eta(h) \xrightarrow[h\to 0]{} 0\right\} \Rightarrow \forall \epsilon>0, \exists \delta>0 : \quad |h|<\delta \Rightarrow |\eta(h)|<\epsilon$

$$\Rightarrow -\delta\epsilon < h\eta(h) < \delta\epsilon$$

Δηλαδή η ποσότητα $h\eta$ μπορεί να γίνει αυθαίρετα μικρότερη (κατ' απόλυτη τιμή) από την ποσότητα $h\frac{df}{dx}(x_0)$ $\rightarrow$ σε "κατάλληλη" περιοχή του x_0 η συνάρτηση προσεγγίζεται με "ίση ακρίβεια" θέλουμε γραμμικά:

$$f(x_0+h) \simeq f(x_0) + h\frac{df}{dx}(x_0).$$

Το ανάλογο συμβαίνει και με τις καμπύλες:

$$\vec{\sigma}(t_0+h) = \vec{\sigma}(t_0) + h\frac{d\vec{\sigma}}{dt}(t_0) + h\vec{\eta}(h), \quad \vec{\eta}(h) \xrightarrow[h\to 0]{} 0$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{\sigma}(t_0+h) \simeq \vec{\sigma}(t_0) + h\frac{d\vec{\sigma}}{dt}(t_0).$$

Παραδείγματα.

(i). $\vec{\sigma}(t) = (t, f(t)) \Rightarrow \vec{\sigma}(t)$: λεία

(γράφημα)

$$\frac{d\vec{\sigma}}{dt} = \left(1, \frac{df}{dt}\right) \neq \vec{0}$$

(ii). $\vec{\sigma}(t) = (a\cos t, a\sin t)$

$$\frac{d\vec{\sigma}}{dt} = (-a\sin t, a\cos t), \quad \frac{d^2\vec{\sigma}}{dt^2} = -(a\cos t, a\sin t)$$

(iii). Έλικα. $\vec{\sigma}(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$

$$\vec{v}(t) = (-a\sin t, a\cos t, b)$$

$$\vec{a}(t) = (-a\cos t, a\sin t, 0).$$

(iv). $\vec{\sigma}(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$

$$\vec{v}(t) = (1 - \cos t, \sin t)$$

$$\vec{v}(t_n) = (0, 0), \quad t_n = 2n\pi$$

κατά τμήματα λεία καμπύλη.

(v). $$\frac{d}{dt}\left(\vec{a}(t)\cdot\vec{b}(t)\right) = \frac{d\vec{a}(t)}{dt}\cdot\vec{b}(t) + \vec{a}(t)\cdot\frac{d\vec{b}(t)}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{a}(t)\times\vec{b}(t)\right) = \frac{d\vec{a}(t)}{dt}\times\vec{b}(t) + \vec{a}(t)\times\frac{d\vec{b}(t)}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\left[\vec{c}(t)\cdot\left(\vec{a}(t)\times\vec{b}(t)\right)\right] = \frac{d\vec{c}}{dt}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) + \vec{c}\cdot\left(\frac{d\vec{a}}{dt}\times\vec{b}\right) + \vec{c}\cdot\left(\vec{a}\times\frac{d\vec{b}}{dt}\right)$$

(vi). $\|\vec{\sigma}(t)\| = \underbrace{c}_{\text{σταθερά}} \Rightarrow \vec{\sigma}(t)\cdot\vec{\upsilon}(t) = 0$

$$\|\vec{\sigma}(t)\|^2 = c^2 = \vec{\sigma}(t)\cdot\vec{\sigma}(t)$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{d\vec{\sigma}}{dt}\cdot\vec{\sigma} + \vec{\sigma}\cdot\frac{d\vec{\sigma}}{dt} \Rightarrow 2\,\vec{\upsilon}\cdot\vec{\sigma} = 0$$

(vii). $\vec{r}(t)$: τροχιά

$\vec{p}(t) = m\vec{\upsilon}(t)$: ορμή

$$\frac{d}{dt}(m\vec{\upsilon}(t)) = m\underbrace{\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}}_{\vec{a}} = \vec{F}(\vec{r}(t))$$

$$\frac{d}{dt}\underbrace{(\vec{r}\times\vec{p})}_{\text{στροφορμή}} = \underbrace{\vec{\upsilon}\times\vec{p}}_{=0} + \underbrace{\vec{r}\times\vec{F}}_{\text{ροπή}}$$