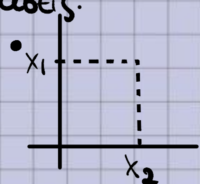
Mon 20 Feb

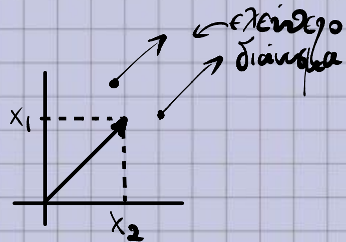
Ανάλυση ΙΙ
= Διανυσματικός λογισμός
Eclass
- Οδηγός Μελέτης
- Βιβλίο:
  Marsden & Tromba
  Διανυσματικός Λογισμός

① Βασικές έννοιες διανυσμάτων σε 2 & 3 διαστάσεις

Διάνυσμα σε 2 διαστάσεις:
- (x_1, x_2)
  ↑
  διατεταγμένο ζεύγος



Σημείο στο Επίπεδο



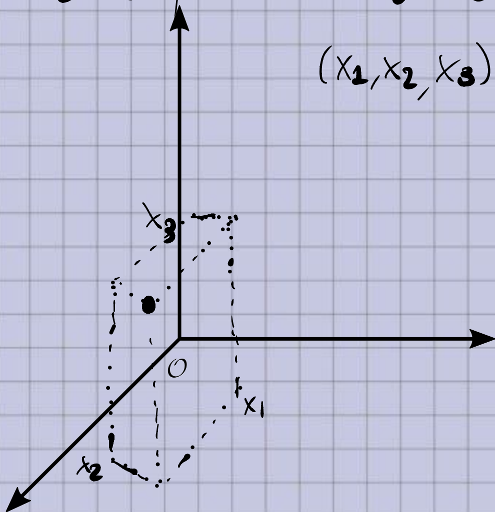
Προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα

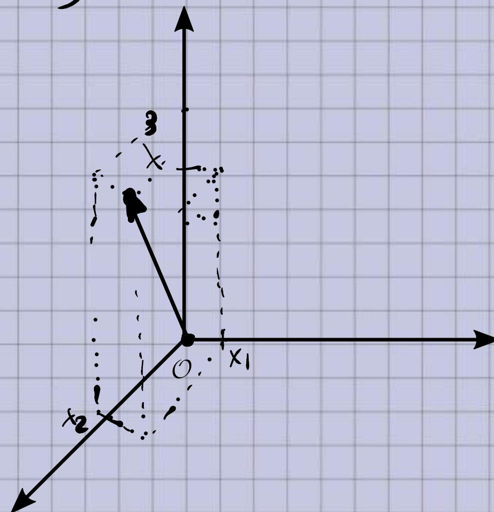
② Πράξεις

- Πρόσθεση
- Βαθμωτός πολ/σμός
- Αφαίρεση
- Εσωτερικό γινόμενο
- Εξωτερικό γινόμενο

Διανύσματα σε 3 διαστάσεις

(x_1, x_2, x_3)



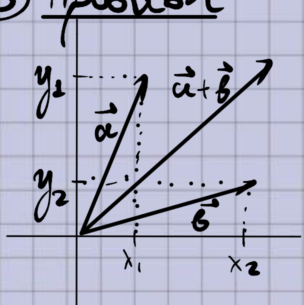


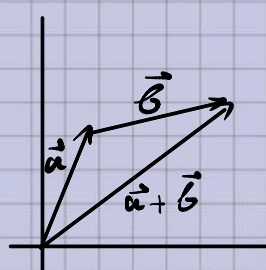
Σημείο στον χώρο

Προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα

· Όλες οι πράξεις ορίζονται για n διαστάσεις $n=1,2,3,\dots$ εκτός από το εξωτερικό γινόμενο που ορίζεται για $n=3$ <u>ΜΟΝΟ</u>

③ <u>Πρόσθεση</u>

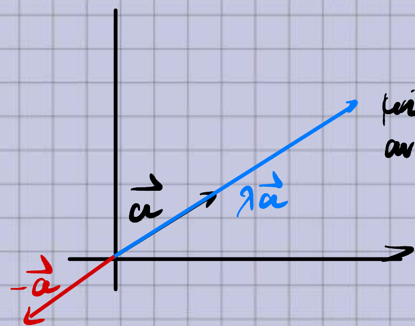




$$(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) \overset{\text{ορσ.}}{=} (x_1+x_2,\ y_1+y_2,\ z_1+z_2)$$

④ Βαθμωτός πολ/σμός

$\lambda\cdot(x,y,z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$



$\lambda\vec{a}$: ίδια διεύθυνση με το $\vec{a}$ με μήκος $|\lambda|$ φορές "μεγαλύτερο", με ίδια φορά αν $\lambda>0$ και αντίθετη αν $\lambda<0$

⑤ Διανυσματικός χώρος

$\mathbb{R}^n$: Διαν. χώρος με n διασ: $=\{(x_1,x_2,\dots x_n),\ x_i\in\mathbb{R},\ i=1,\dots,n\}$

$+,\dots$ $\vec{x}+\vec{y}=\vec{y}+\vec{x}$

$(\vec{x}+\vec{y})+\vec{z}=\vec{x}+(\vec{y}+\vec{z})$

$\exists\vec{0}: \vec{x}+\vec{0}=\vec{x}$

$\forall\vec{x}\ \exists-\vec{x}: (-\vec{x}+\vec{x})=\vec{0}$

$(\lambda\cdot\mu)\cdot\vec{x}=\lambda\cdot(\mu\cdot\vec{x})$

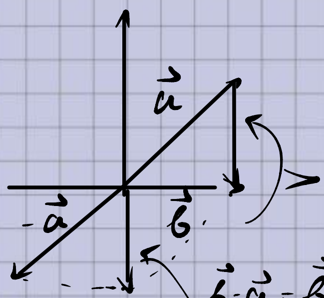
$(\lambda\cdot\mu)\cdot\vec{x}=\lambda\vec{x}+\mu\vec{x}$

$\lambda\cdot(\vec{x}+\vec{y})=\lambda\vec{x}+\lambda\vec{y}$

$1\cdot\vec{x}=\vec{x}$

⑥ Αφαίρεση

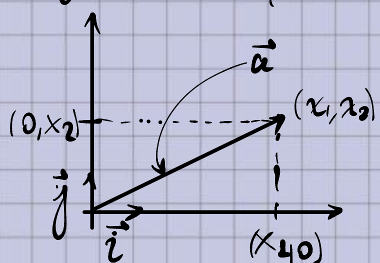
$(x_1,y_1,z_1)-(x_2,y_2,z_2)=(x_1-x_2, y_1-y_2, z_1-z_2)$



$\vec{b}-\vec{a}=\vec{b}+(-\vec{a})$

⑦ Συνήθης βάση

Στο επίπεδο, κάθε διάνυσμα μπορεί να γραφεί με μοναδικό τρόπο με βάση 2 διανύσματα, το $\vec{i}=\vec{e_1}=(1,0)$ και το $\vec{j}=\vec{e_2}=(0,1)$, χρησιμοποιώντας $+, \cdot$



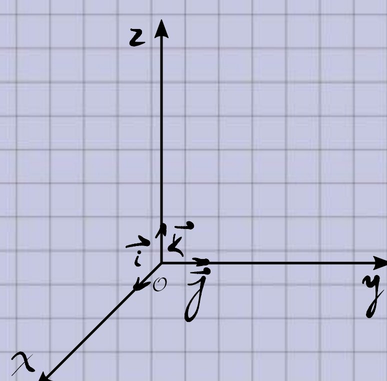
$\vec{a}=x_1\vec{i}+x_2\vec{j}$

Στον χώρο έχω τη συνήθη βάση

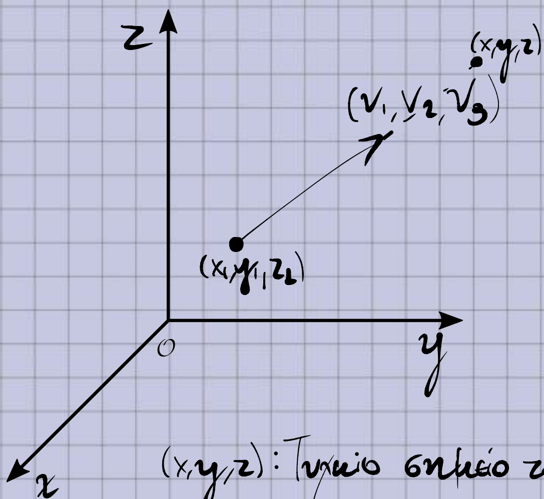
$\vec{i}=\vec{e_1}=(1,0,0)$

$\vec{j}=\vec{e_2}=(0,1,0)$

$\vec{k}=\vec{e_3}=(0,0,1)$



(8) Εξίσωση ευθείας



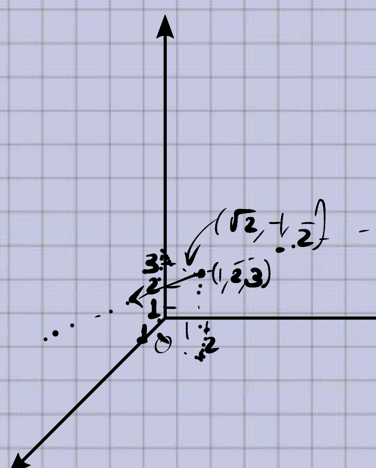
Εξίσωση ευθείας που περνάει από το (x_1,y_1,z_1) και έχει διεύθυνση (v_1,v_2,v_3)

(x,y,z): Τυχαίο σημείο της ευθείας

$$(x,y,z)=(x_1,y_1,z_1)+t(v_1,v_2,v_3)$$

Π.χ.

Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το $(1,2,3)$ με κατεύθ. $(\sqrt{2},-1,\frac{1}{2})$

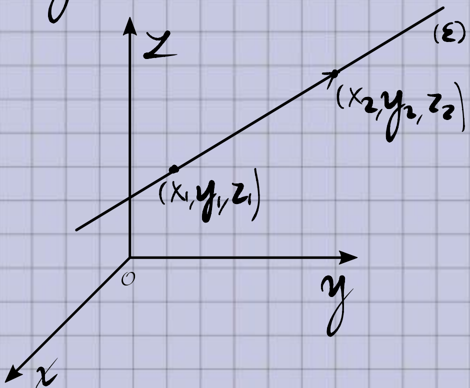


Άρα η εξίσωση είναι

$$(x,y,z)=(1,2,3)+t(\sqrt{2},-1,\tfrac{1}{2})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=1+\sqrt{2}t \\ y=2-t \\ z=3+\frac{1}{2}t \end{cases},\ t\in\mathbb{R}$$

⑨ Εξίσωση ευθείας από δύο σημεία



≡ Εξίσ. ευθείας που διέρχ. από το (x_1,y_1,z_1) με κατεύθ. $\vec{v}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$

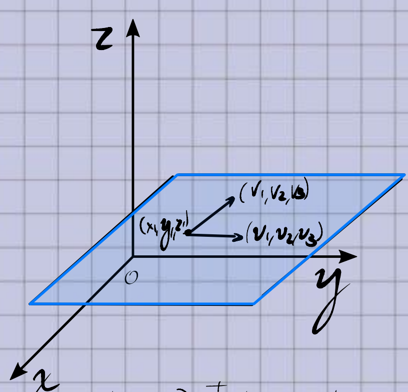
$$(x,y,z)=(x_1,y_1,z_1)+t(x_2-x_1,\,y_2-y_1,\,z_2-z_1)$$

$$\Rightarrow \left.\begin{cases} x=x_1+(x_2-x_1)t \\ y=y_1+(y_2-y_1)t \\ z=z_1+(z_2-z_1)t \end{cases}, \ t\in\mathbb{R} \right\}$$ Παραμ. εξίσ. ευθείας

Παρατ.

Το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα (x_1,y_1,z_1) και (x_2,y_2,z_2) έχει παραμετρική εξίσωση τα ίδια για $t\in[0,1]$

⑩ Εξίσωση επιπέδου



(x,y,z): Τυχαίο σημείο του επιπέδου

Εξίσ. επιπέδου που διέρχεται από σημείο (x_1,y_1,z_1) και το οποίο περιλαμβάνει τις κατευθ. (v_1,v_2,v_3) και $(\upsilon_1,\upsilon_2,\upsilon_3)$

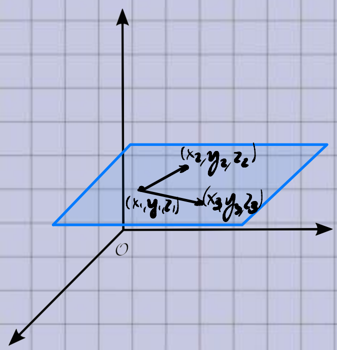
$$(x,y,z)=(x_1,y_1,z_1)+t(v_1,v_2,v_3)+s(\upsilon_1,\upsilon_2,\upsilon_3),\ t,s\in\mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=x_1+tv_1+s\upsilon_1 \\ y=y_1+tv_2+s\upsilon_2 \\ z=z_1+tv_3+s\upsilon_3 \end{cases}, \ t,s\in\mathbb{R}$$

Παρατήρηση: Αν περιορίσω $t,s\in[0,1]$ παίρνω εξίσ. παραλληλογράμμου

11 Παραδ. Εξίσωση επιπέδου από 3 σημεία

$$\begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1)t + (x_3 - x_1)s \\ y = y_1 + (y_2 - y_1)t + (y_3 - y_1)s \\ z = z_1 + (z_2 - z_1)t + (z_3 - z_2)s \end{cases}, \quad t, s \in \mathbb{R}$$



12 Παραδ: Έλεγχος τομής ευθειών

• Έστω οι ευθείες:

$(x, y, z) = (t, -6t+1, 2t-8)$

$(x, y, z) = (3t+1, 2t, 0)$

Τέμνονται;

$(x, y, z) = (0, 1, -8) + (1, -6, 2)\cdot t, \ t \in \mathbb{R}$

$(x, y, z) = (1, 0, 0) + (3, 2, 0)\cdot t, \ t \in \mathbb{R}$

Λύνουμε το σύστημα

$(0, 1, -8) + (1, -6, 2)t_1 = (1, 0, 0) + (3, 2, 0)t_2$

Αν λύνεται, τέμνονται, αν όχι είναι ασύμβ