Thu 23 Feb

Εσωτερικό & Εξωτερικό γινόμενο διανυσμάτων

① Ορισμός

$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3),\ \vec{b} = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$

$\underbrace{\vec{a}\cdot\vec{b}}_{\text{εσωτ. γιν}} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$

Άλλος συμβολισμός

$\vec{a}\cdot\vec{b} = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \vec{a}^T \vec{b}$

Συμβολισμοί διανυσμάτων

$\vec{a}$

$\mathbf{a} \leftarrow$ bold

$\underset{\sim}{a}$

$\underline{a}$

② Ιδιότητες

1) $\vec{a}\cdot\vec{a} \geq 0,\ \vec{a}\cdot\vec{a} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$
2) $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$
3) $\vec{a}\cdot(\beta\vec{b} + \gamma\vec{c}) = \beta(\vec{a}\cdot\vec{b}) + \gamma(\vec{a}\cdot\vec{c})$

③ Σχόλια

$\mathbb{R}^n$: διατ. n-άδες με στοιχεία από το $\mathbb{R}$

$\equiv$ n-διαστ. διανύσματα

$\equiv$ $n\times 1$ πίνακες (στήλες)

<u>$n=3$</u>

π.χ.

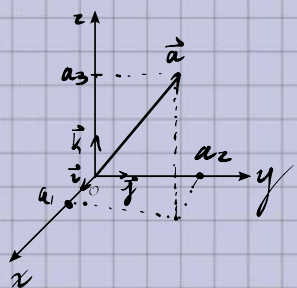
$\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$

$\vec{a}\cdot\vec{b} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{ως γιν.}\\ \text{πινάκων}}}{=} \vec{a}^T\cdot\vec{b} = \begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}^T \begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix} = \underset{}{\overset{1\times 3}{(a_1, a_2, a_3)}} \overset{3\times 1}{\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$

④ Μήκος - Μέτρο - Νόρμα διανύσματος

$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$

$\|\vec{a}\| = (\vec{a}\cdot\vec{a})^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$



⑤ Ιδιότητες

1) $\|\vec{a}\| \geq 0$, $\|\vec{a}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$

2) $\|a\vec{a}\| = |a| \cdot \|\vec{a}\|$

3) $\|\vec{a} + \vec{b}\| \leq \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|$

⑥ Παραδείγματα

$\vec{a} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$, $\vec{b} = (1, -\sqrt{3}, 0)$

$\vec{a}\cdot\vec{b} = \frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}(-\sqrt{3}) + 0\cdot 0 = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -1$

$\|\vec{a}\| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 0^2} = 1 \rightsquigarrow \vec{a}$ μοναδιαίο διάνυσμα

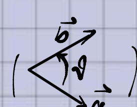
$\|\vec{b}\| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2 + 0^2} = 2$

⑦ Γεωμετρική ερμηνεία εσωτερικού γινομένου

Θεωρ.

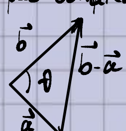
$\vec{a}\cdot\vec{b} = \|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|\cdot\cos\vartheta$

ϑ = γωνία των $\vec{a}, \vec{b}$



Απόδ.

Νόμος συνημιτόνων



$$\left.\begin{array}{l} \|\vec{b}-\vec{a}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 - 2\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\cos\vartheta \\ \| \\ (\vec{b}-\vec{a})\cdot(\vec{b}-\vec{a}) = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 - 2\vec{a}\vec{b} \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{a}\vec{b} = \|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|\cdot\cos\vartheta$$

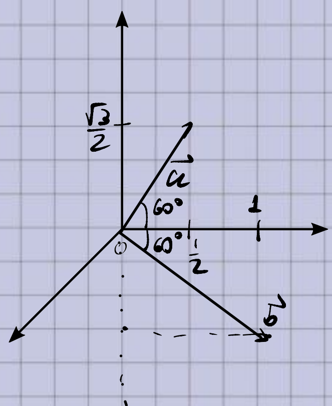
8 Παράδειγμα (συνέχεια)

Γωνία ϑ των

$\vec{a} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$

$\vec{b} = \left(1, -\sqrt{3}, 0\right)$

$$\cos\vartheta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|} = -\frac{1}{2} \quad \text{άρα } \vartheta = 120° = \frac{2\pi}{3} \text{ rad}$$



9 Ορθογώνια διανύσματα

$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vartheta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$

$\Leftrightarrow \cos\vartheta = 0$

$\Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = 0$

π.χ. τα $(\cos\vartheta, \sin\vartheta)$, $(\sin\vartheta, -\cos\vartheta)$ είναι ορθογώνια

10 Ανισότητα Cauchy-Bunyakovski-Schwartz (CBS)

$|\vec{a}\cdot\vec{b}| \leq \|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|$

Ισχύει στον $\mathbb{R}^3$, αλλά επεκτείνεται στον $\mathbb{R}^n$

Απόδ (στον $\mathbb{R}^3$)

$$\left|\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|}\right| = |\underbrace{\cos\vartheta}_{\text{γωνία των } \vec{a},\vec{b}}| \leq 1 \Rightarrow |\vec{a}\cdot\vec{b}| \leq \|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|$$

Στον $\mathbb{R}^n$, η ανισότητα λέει:

$$|a_1b_1+\dots+a_nb_n| \le \sqrt{a_1^2+\dots+a_n^2}\sqrt{b_1^2+\dots+b_n^2}$$

Αποδ στην $\mathbb{R}^n$

Αν $\vec{a}$ & $\vec{b}$ είναι $\vec{0}$ τότε προφ. ισχύει

Έστω λοιπόν, $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$ και τότε για κάθε λ: $0 \le \|\lambda\vec{a}+\vec{b}\|^2 = (\lambda\vec{a}+\vec{b})(\lambda\vec{a}+\vec{b}) = \lambda^2\|\vec{a}\|^2 + 2\lambda\vec{a}\cdot\vec{b} + \|\vec{b}\|^2 \Rightarrow \Delta \le 0$

$\Rightarrow (2\vec{a}\cdot\vec{b})^2 - 4\|\vec{a}\|^2\|\vec{b}\|^2 \le 0 \Rightarrow |\vec{a}\cdot\vec{b}| \le \|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|$

(11) Συγγραμμικότητα

γωνία των $\vec{a},\vec{b}$

$\vec{a}\cdot\vec{b} = \|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\| \Leftrightarrow \cos\theta = 1 \Leftrightarrow \vec{a} = \lambda\vec{b}$ για κάποιο $\lambda \ge 0$
ή $\vec{b} = \vec{0}$

$\vec{a}\cdot\vec{b} = -\|\vec{a}\|\|\vec{b}\| \Leftrightarrow \cos\theta = -1 \Leftrightarrow \vec{a} = \lambda\vec{b}$ για κάποιο $\lambda \le 0$
ή $\vec{b} = \vec{0}$

(12) Τριγωνική ανισότητα νόρμας

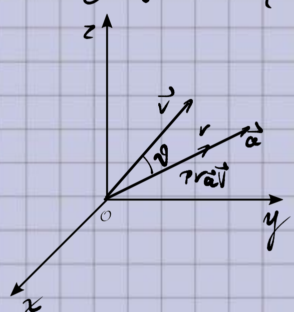
$\|\vec{a}+\vec{b}\| \le \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|$
(ισχύει και στον $\mathbb{R}^n$)

Αποδ:

$\|\vec{a}\cdot\vec{b}\|^2 = (\vec{a}+\vec{b})(\vec{a}+\vec{b}) = \|\vec{a}\|^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b} + \|\vec{b}\|^2$

$\overset{CBS}{\le} \|\vec{a}\|^2 + 2\|\vec{a}\|\|\vec{b}\| + \|\vec{b}\|^2 = (\|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|)^2$

(13) Ορθογώνια προβολή



$pr_{\vec{a}}\vec{v} = \|\vec{v}\|\cos\theta\dfrac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} = \cancel{\|\vec{v}\|}\cdot\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{v}}{\|\vec{a}\|\cdot\cancel{\|\vec{v}\|}}\cdot\dfrac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}$

$= \left(\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{v}}{\vec{a}\cdot\vec{a}}\right)\cdot\vec{a}$

Ισχύει και στον $\mathbb{R}^n$

Αποδ:

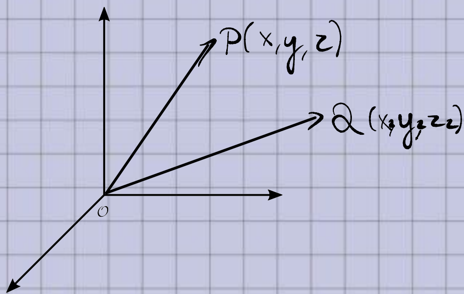
$\vec{v} = pr_{\vec{a}}\vec{v}$, $\vec{v}' \perp \vec{a}$ $\quad pr_{\vec{a}}\vec{v} = \lambda\vec{a}$

$\Rightarrow \vec{a}\vec{v} = \vec{a}\,pr_{\vec{a}}\vec{v} + \cancel{\vec{a}\vec{v}'}^{\,0}$

$\Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{v} = \vec{a}\cdot\lambda\cdot\vec{a}$

$\Rightarrow \lambda = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{v}}{\vec{a}\cdot\vec{a}}$

(14) Απόσταση σημείων



$d(P,Q)=|\vec{PQ}|=\|\vec{OP}-\vec{OQ}\|$

↑ απόσταση των P, Q

(15) Ιδιότητες

1) $d(P,Q)\geq 0$, $d(P,Q)=0 \Rightarrow P=Q$

2) $d(P,Q)=d(Q,P)$

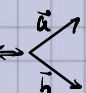
3) $d(P,Q)\leq d(P,R)+d(R,Q)$ (R τυχαίο σημείο)

(16) Υπενθυμίσεις από ορίζουσες

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

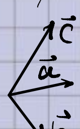
$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow$



$\vec{a}, \vec{b}$ γραμμικώς ανεξάρτητα
(όχι πολλαπλάσιο το ένα του άλλου)

$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow$



$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ γραμμικά ανεξάρτητα
(το τρίτο σε διαφορετικό επίπεδο από τα άλλα)

(17) Ορισμός

Εξωτερικό γινόμενο των $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^{3}$ ← ΜΟΝΟ

$\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\vec{b}(b_1,b_2,b_3)$

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\vec{k}$$

→ συνήθης βάση

(18) Παράδειγμα

$\vec{a} = (3,-1,1)$, $\vec{b} = (1,2,-1)$

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\vec{k} = -\vec{i}+4\vec{j}+7\vec{k} = (-1,4,7)$$

(19) Ιδιότητες

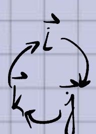
1) $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0} \Leftrightarrow \vec{a}=\lambda\vec{b}$ ή $\vec{b}=\vec{0}$

2) $\vec{b}\times\vec{a} = -\vec{a}\times\vec{b}$ (δεν είναι αντιμεταθετικό)

3) Όχι προσεταιριστικότητα : Γενικά $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) \neq (\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$

4) $\vec{a}\times(\beta\vec{b}+\gamma c) = \beta(\vec{a}\times\vec{b})+\gamma(\vec{a}\times\vec{c})$

5)



$\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}$
$\vec{j}\times\vec{k}=\vec{i}$
$\vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}$

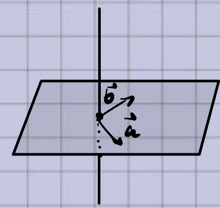
(20) Μικτό ή τριπλό γινόμενο

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}\cdot(c_1,c_2,c_3) = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right)\cdot(c_1,c_2,c_3)$$

2.1 Γεωμετρική ερμηνεία εξωτερικού γινομένου

1) $\vec{a}\times\vec{b} = 0 \Rightarrow \perp \vec{a}, \vec{b}$



Αποδ.

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{a} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \vec{a}\times\vec{b} \perp \vec{a}$$

Όμοια μετά το $\vec{b}$

γωνία των $\vec{a}, \vec{b}$

2) $\|\vec{a}\times\vec{b}\| = \|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|\cdot|\sin\theta|$

Αποδ

$$\|\vec{a}\times\vec{b}\|^2 = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2 = (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_1b_3 - a_3b_1)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2$$

$$= a_1^2b_2^2 + a_1^2b_3^2 + a_2^2b_1^2 + a_2^2b_3^2 + a_3^2b_1^2 + a_3^2b_2^2 - 2a_1b_1a_2b_2 - 2a_1b_1a_3b_3 - 2a_2b_2a_3b_3$$

$$= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 = \|a\|^2\|b\|^2 - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2$$

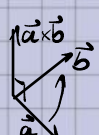
$$\Leftrightarrow \|\vec{a}\times\vec{b}\|^2 + (\vec{a}\cdot\vec{b})^2 = \|\vec{a}\|^2\cdot\|\vec{b}\|^2$$

$$\Leftrightarrow \|\vec{a}\times\vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2\|\vec{b}\|^2 - \|\vec{a}\|^2\|\vec{b}\|^2\cos^2\theta$$

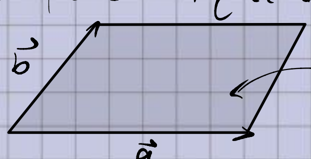
$$\Rightarrow \|\vec{a}\times\vec{b}\| = \|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|\cdot|\sin\theta|$$

3) Φορά του $\vec{a}\times\vec{b}$

Κανόνας Δεξιού $\Rightarrow$

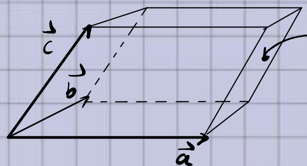


2.2 Εμβαδόν παραλληλογράμμου



Εμβαδό παρ/μου $= \|\vec{a}\times\vec{b}\|$

23 Όγκος παραλληλεπιπέδου

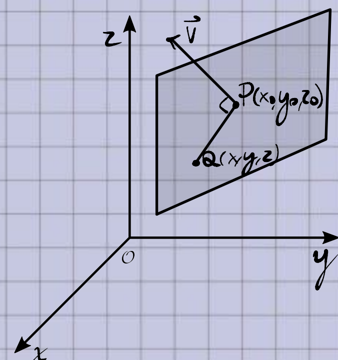


Εμβαδό παρ/δου = Εμβ βάσης × Ύψος

$= \|\vec a\times\vec b\|\cdot\|pr_{\vec a\times\vec b}\,\vec c\|$

$= \|\vec a\times\vec b\|\cdot\left\|\frac{(\vec a\times\vec b)\cdot c}{(\vec a\times\vec b)(\vec a\times\vec b)}\cdot(\vec a\times\vec b)\right\| = |(\vec a\times\vec b)\vec c| = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}$

24 Εξίσωση επιπέδου



Εξισ. επιπέδου κάθετο στο διάνυσμα

$V=(A,B,C)$ που περνά από το $P(x_0,y_0,z_0)$

Έστω $Q(x,y,z)$ ένα τυχαίο σημείο του επιπέδου

Έχουμε:

$\vec{QP}\perp\vec V \Leftrightarrow \vec V\cdot\vec{PQ}=0$

$\Leftrightarrow A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)$

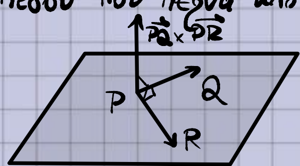
$\Leftrightarrow Ax+By+Cz+D=0$, όπου $D=-Ax_0-By_0-Cz_0$

Εξίσωση επιπέδου που περνά από τα σημεία

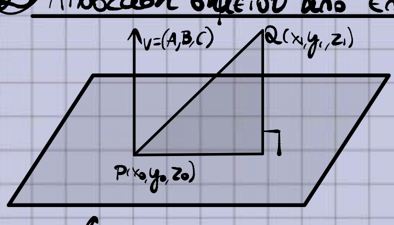
$P(x_0,y_0,z_0)$

$R(x_1,y_1,z_1)$

$Q(x_2,y_2,z_2)$



25 Απόσταση σημείου από επίπεδο



$Ax+By+Cz+D=0$

Απόσταση του Q από το επίπεδο $=\|pr_{\vec V}\vec{PQ}\|$

$=\left\|\frac{\vec{PQ}\cdot\vec V}{\|\vec V\|^2}\vec V\right\| = \frac{|\vec{PQ}\cdot\vec V|}{\|\vec V\|^{\cancel{2}}}\cancel{\|\vec V\|} = \left|\frac{A(x_1-x_0)+B(y_1-y_0)+C(z_1-z_0)}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right|$

$=\left|\frac{Ax_1+By_1+Cz_1+\overbrace{(-Ax_0-By_0-Cz_0)}^{D}}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right|$

$=\frac{|Ax_1+By_1+Cz_1+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$