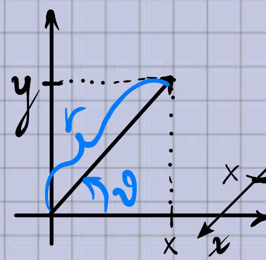
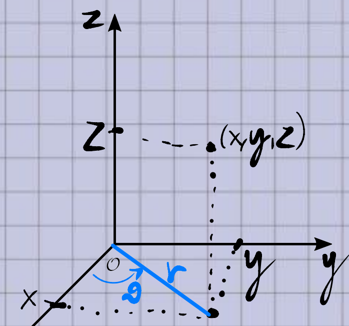
Thu 2 Mar

① Πολικές συντεταγμένες

$\mathbb{R}^2$

Ευκλείδειες (Καρτεσιανές)		Πολικές
(x,y)	$\longleftrightarrow$	(r,θ)
$x,y\in\mathbb{R}$		$r\geq 0$
		$\theta\in[0,2\pi)$





$$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases} \Leftrightarrow r=\sqrt{x^2+y^2}$$

ϑ: γωνία με tan ίση με $\frac{y}{x}$ στο $[0,2\pi]$

② Κυλινδρικές συντεταγμένες

$\mathbb{R}^3$

Ευκλείδειες (Καρτεσιανές)		Κυλινδρικές
(x,y,z)	$\longleftrightarrow$	(r,ϑ,z)
$x,y,z\in\mathbb{R}$		$r\geq 0$
		$\vartheta\in[0,2\pi)$
		$z\in\mathbb{R}$

$$\begin{cases} x=r\cos\vartheta \\ y=r\sin\vartheta \\ z=z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r=\sqrt{x^2+y^2} \\ \vartheta = \text{γωνία με } \tan\frac{y}{x} \\ z=z \end{cases}$$

③ Παράδειγμα: Ευκλείδειες → Κυλινδρικές

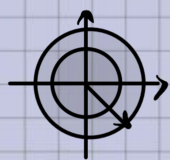
Έστω $P(1,-1,2)$ σε Ευκλ. συντ.
Να γραφτεί σε κυλινδρικές

$r=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$

$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\theta=\frac{7\pi}{4}$



Σε κυλινδρικές:
$(r,\theta,z)=(\sqrt{2},\frac{7\pi}{4},2)$

④ Παράδειγμα: Κυλινδρικές → Ευκλείδειες

Έστω το σημείο:
$(r,\theta,z)=(2,\frac{\pi}{6},3)$ σε κυλινδρικές.
Να βρεθεί σε Ευκλ.

$x=r\cos\theta=2\cos\frac{\pi}{6}=2\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$
$y=r\sin\theta=2\sin\frac{\pi}{6}=2\frac{1}{2}=1$
$z=3$

Άρα $(x,y,z)=(\sqrt{3},1,3)$

⑤ Παράδειγμα: Εξισώσεις σχημάτων κυλίδρου

Εξίσωση επιπέδου: $y=x$

Σε κυλινδρικές: $\theta=\frac{\pi}{4}$ ή $\theta=\frac{5\pi}{4}$

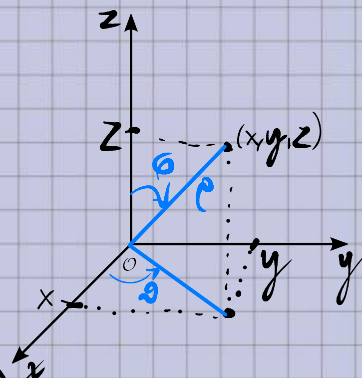
Εξίσωση κυλίνδρου: $x^2+y^2=c^2$

Σε κυλινδρικές: $r=c$

⑥ Σφαιρικές συντεταγμένες

$\mathbb{R}^3$

Ευκλείδειες (Καρτεσιανές) (x,y,z) $x,y,z\in\mathbb{R}$ $\Longleftrightarrow$ Σφαιρικές (ρ,θ,φ) $\rho\geq 0$ $\theta\in[0,2\pi)$ $\varphi\in[0,\pi]$



$$\begin{cases} x=\rho\sin\varphi\cos\theta \\ y=\rho\sin\varphi\sin\theta \\ z=\rho\cos\varphi \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \rho=\sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \theta \text{ γωνία με } \tan\frac{x}{y} \\ \varphi \text{ γωνία με } \cos\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \end{cases}$$

⑦ Παράδειγμα: Ευκλείδιες → Σφαιρικές

$P(1,-1,1)$ Ευκλείδιες $\rightarrow$ (ρ,θ,φ) Σφαιρικές

$$\rho=\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}=\sqrt{3}$$

$$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin\theta=\frac{-1}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\theta=\frac{7\pi}{4}$$

$$\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow\varphi=\cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$(\rho,\theta,\varphi)=\left(\sqrt{3},\frac{7\pi}{4},\cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)$$

⑧ Εξισώσεις σχημάτων σε σφαιρικές συντεταγμένες

	Ευκλείδιες	Σφαιρικές
Εξίσωση σφαίρας	$x^2+y^2+z^2=c^2$	$\rho=c$
Επιφάνεια	$xz=1$	$\rho^2\sin\varphi\cos\theta\cos\varphi=1$
Επιφάνεια	$x^2+y^2-z^2=1$	$\rho^2\sin^2\varphi\cos^2\theta+\rho^2\sin^2\varphi\sin^2\theta-\rho^2\cos^2\varphi=1$

$$\Rightarrow\rho^2\sin^2\varphi-\rho^2\cos^2\varphi=1$$

$$\Rightarrow\rho^2(\sin^2\varphi-\cos^2\varphi)=1$$

$$\Rightarrow-\rho^2\cos2\varphi=1$$

9 Πραγματικές συναρτήσεις

$f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

πραγματική συνάρτηση

$m>1$: πραγματική συνάρτηση πολλών μεταβλητών

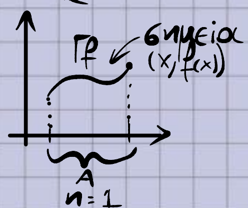
$m=1$: βαθμωτή συνάρτηση πολλών μεταβλητών

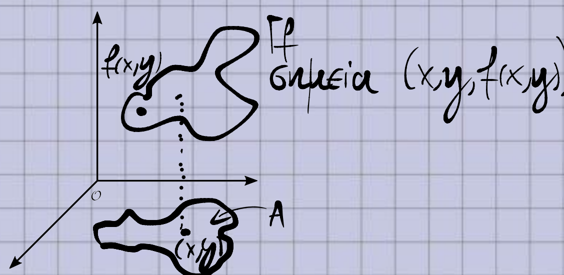
$m>1$: διανυσματική συνάρτηση πολλών μεταβλητών

Γράφημα συνάρτησης για $m=1$

$\Gamma f = \{(x_1, x_2, \dots, x_n, f(x_1, x_2, \dots, x_m)) : (x_1, x_2, \dots, x_n) \in A\}$

$\subseteq \mathbb{R}^{m+1}$





10 Σύνολο στάθμης – Τομές

$f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Σύνολο στάθμης (σ.σ.)

$L_c = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in A : f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c\}$

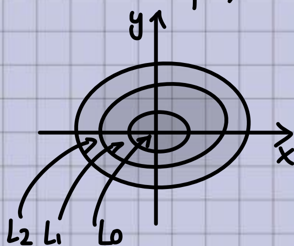
= Τομή του Γραφήματος με το επίπεδο $z=c$

= Τομή του Γραφήματος με τα επίπεδα $x_1=c, \dots x_n=c$

11 Σύνολα στάθμης και Τομές για συναρτήσεις $f\ A\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$

Παράδειγμα $f(x,y)=x^2+4y^2$

Σύνολα στάθμης



$L_{-2}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ x^2+4y^2=-2\}=\emptyset$

$L_0=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2=x^2+4y^2=0\}=\{0\}$

$L_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2=x^2+4y^2=1\}$

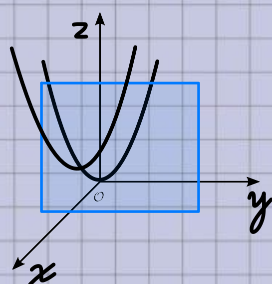
$L_4=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2=x^2+4y^2=4\}$

Τομές με τα ημιεπίπεδα

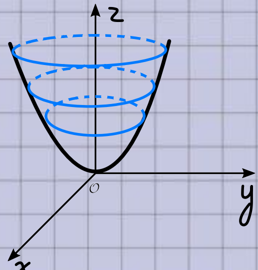
$x=-2\quad z=f(x,y)=4+4y^2$

$x=0\quad z=f(x,y)=4y^2$

$x=2\quad z=f(x,y)=4+4y^2$



Το γράφημα είναι παραβολοειδές

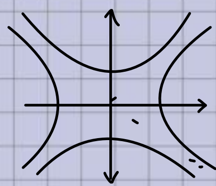


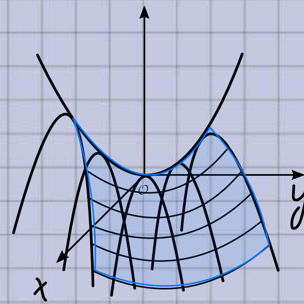
(12) Παράδειγμα

$f(x,y)=x^2-y^2$

Καμπύλες στάθμης

$x^2-y^2=c^2$ ← Υπερβολή

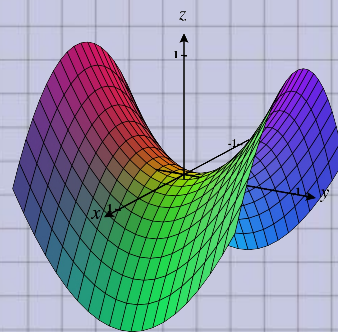




Τομές

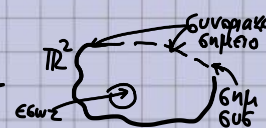
$x=c$ $\quad z=c^2-y^2$ παραβολή

$y=c$ $\quad z=x^2-c^2$ παραβολή



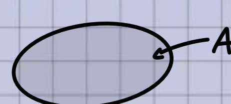
(13) Στοιχεία τοπολογίας στον $\mathbb{R}^n$

- $D_r(\vec{x})=\{\vec{y}\in\mathbb{R}^n \;\; \|\vec{y}-\vec{x}\|<r\}$ Ανοικτή σφαίρα με κέντρο $\vec{x}$ και ακτίνα r



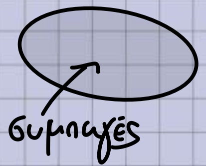
- $A\in\mathbb{R}^n$ $\vec{x}\in A$ εσωτερικό σημείο $\Leftrightarrow \exists\, r>0$ $D_r(\vec{x})\subseteq A$
- $A\subseteq\mathbb{R}^n$ $\vec{x}$ σημείο συσσώρευσης του $A \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0$ $(D_\varepsilon(\vec{x})\cap A)\setminus\{\vec{x}\}\neq\emptyset$
- $A\subseteq\mathbb{R}^n$ ανοικτό $\Leftrightarrow \forall \vec{x}\in A$ $\vec{x}$ εσωτ σημείο του A

- $A\subseteq\mathbb{R}^n$ κλειστό $\Leftrightarrow A^c$ ανοικτό
  $\Leftrightarrow$ Το A περιέχει όλα τα σημεία συσσώρευσής του



- $A\in\mathbb{R}^n$ φραγμένο $\Leftrightarrow \exists\, \vec{x}\in\mathbb{R}^n, r>0$ $A\subseteq D_r(\vec{x})$

— $A \subseteq \mathbb{R}^n$ συμπαγές $\Leftrightarrow$ A κλειστό και φραγμένο



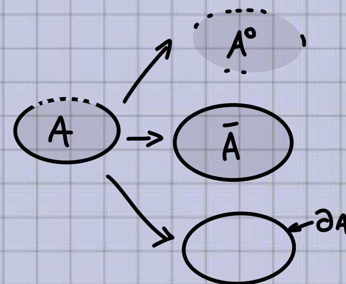
← κλειστό αλλά όχι
φραγμένο
όχι συμπαγές

— Αν $A \subseteq \mathbb{R}^n$

Εσωτερικό του $A = A^\circ$ = Εσωτ σημ του A

Κλειστότητα του $A = \bar{A}$ = Εσωτ + Συνορ σημεία του A

Σύνορο του $A = \partial A$ = Συνοριακά σημεία του A



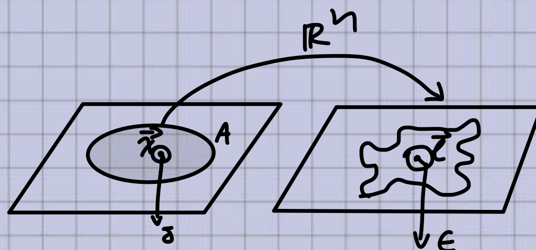
(14) Όριο συνάρτησης

$f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$\vec{x}_0$ σημείο συσσώρευσης του A

$\lim_{\vec{x} \to \vec{x}_0} f(\vec{x}) = \vec{\ell}$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \vec{x} \in A$ και $0 < \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \delta \Rightarrow \|f(\vec{x}) - \vec{\ell}\| < \varepsilon$



(15) Υπολογισμός ορίων

Ύπαρξη
+
Υπολογισμός → ε-δ μέθοδος
αλλαγή μεταβλητών

Μη ύπαρξη → Βρίσκω τρόπους προσέγγισης του $\vec{x}$ που δίνουν διαφορετικά 1-διάστατα όρια

(16) Παράδειγμα 1

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin xy}{x+1} = \frac{\sin 0}{0+1} = \frac{0}{1} = 0$$

(17) Παράδειγμα 2

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}}_{f(x,y)}$$

Αν υπάρχει το όριο πρέπει να είναι 0

$\left(\text{γιατί } \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+0}} = 0\right)$

νόρμα x,y

$$\|f(x,y)-0\| = \left|\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| = \left|\frac{x^2}{x^2+y^2}\sqrt{x^2+y^2}\right| = \frac{x^2}{x^2+y^2}\|x,y\| < \|x,y\|$$

Έστω $\varepsilon > 0$

παίρνω $\delta = \varepsilon \Rightarrow$ τότε αν $0 < \|(x,y)-(0,0)\| < \delta$

$$\Rightarrow \|f(x,y)-0\| < \varepsilon$$

β' τρόπος (πολικές)

φραγμένο από το 1

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{r\to 0} \frac{r^2\cos^2\theta}{\sqrt{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta}} = \lim_{r\to 0} \frac{r^2\cos^2\theta}{r\sqrt{1}} = \lim_{r\to 0} \frac{r^2\cos^2\theta}{r} = 0$$