Mon 6 Mar

# ① Όριο συνάρτησης

• Ορισμός

$f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$\vec{x}_0$ σημείο συσσωρ του A

$\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f(\vec{x}) = \vec{b} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \vec{x} \in A$ και $0 < \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \delta \Rightarrow \|f(\vec{x}) - \vec{b}\| < \varepsilon$

# ② Συνέχεια

• Ορισμός

$f \ \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ανοικτό}}}{U} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$\vec{x}_0 \in U$

$f$ συνεχής στο $\vec{x}_0 \Leftrightarrow \lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0)$

# ③ Ιδιότητες

Τα όρια και η συνέχεια συμπεριφέρονται "αναμενόμενα" ως : όλες τις πράξεις $(+, \cdot, -, :, \circ$ (σύνθεση))

# ④ Χαρακτηρισμός σύγκλισης

• Πρόταση.

$f \ A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$\vec{x} \longmapsto f(\vec{x}) = (f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}), \ f_m(\vec{x}))$

Τα ακόλουθα ειναι ισοδυναμα

1) $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f(\vec{x}) = \vec{b} = (b_1, b_2, \dots b_m)$

2) $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f_i(\vec{x}) = b_i$, για καθε $i = 1,2,\dots,m$

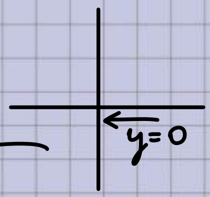
## ⑤ Μεθοδολογία

Ύπαρξη ορίου → ε-δ ορισμός
Αλλαγή μεταβλητών για αναγωγή σε μονοδιάστατη περίπτωση

Ανύπαρξη ορίου → Ευρεση 2 "καμπυλών" προσέγγισης του σημείου ώστε να δίνουν διαφορετικά όρια

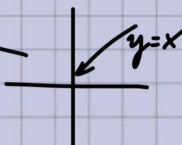
## ⑥ Παράδειγμα

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin xy}{x^2+y^2} = ;$ (υπάρχει, αν ναι προσδιορισμός)




$f(x,y)=\frac{\sin(xy)}{x^2+y^2}$

Στην "καμπύλη" $y=0$ $f(x,0)=\frac{\sin 0}{x^2}=0$ (Άρα το όριο είτε θα είναι 0, είτε δεν υπάρχει)




Στην "καμπύλη" $y=x$ $f(x,y)=\frac{\sin x^2}{2x^2}=\frac{1}{2}$

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \neq \lim\limits_{(x,y)\to(x,x)} f(x,y)$ άρα το όριο δεν υπάρχει

## ⑦ Παράδειγμα

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x-y)^2}{x^2+2y^2} = ;$$

$$\left.\begin{aligned} &y=0 \quad f(x,y)=f(x,0)=\frac{x^2}{x^2} \to 1 \text{ καθώς } x\to 0 \\ &y=x \quad f(x,x)=0\to 0 \end{aligned}\right\} \nexists \text{ όριο}$$

## ⑧ Παράδειγμα

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2} = ;$$

$$\left.\begin{aligned} &y=0: f(x,y)=f(x,0)\to 0 \text{ καθώς } x\to 0 \\ &y=x \quad f(x,y)=f(x,x)\to \infty \text{ καθώς } x\to 0^+ \end{aligned}\right\} \nexists \text{ όριο}$$

(εναλλακτικά, $y=x^2 \to f(x,x^2)=\frac{x^4}{2x^4} \to \frac{1}{2}$ καθώς $x\to 0$)

## ⑨ Παράδειγμα

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \Rightarrow$$

$y=0 \to f(x,0)\to 0$

$y=x \to f(x,x)=\frac{x^2}{\sqrt{2}\,x} \to 0$

Μάλλον $\exists$ lim και είναι 0

• $1^{ος}$ τρόπος ($\varepsilon-\delta$)

Έστω $\varepsilon>0$

$$\left|f(x,y)-0\right| = \left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| = \frac{|xy|}{x^2+y^2}\sqrt{x^2+y^2} = \underbrace{\frac{|xy|}{x^2+y^2}}_{\leq \frac{1}{2}}\|(x,y)-(0,0)\|$$

(γιατί $(x-y)^2\geq 0$
$\Leftrightarrow x^2+y^2-2xy\geq 0$
$\Leftrightarrow \frac{xy}{x^2+y^2}\leq\frac{1}{2}$)

Άρα παίρνοντας $\delta=2\varepsilon$ έχω

$0<\|(x,y)-(0,0)\|<\delta$

$\Rightarrow |f(x,y)-0|\leq \frac{1}{\cancel{2}}\cancel{2}\varepsilon$

$\Rightarrow |f(x,y)|\leq\varepsilon$

• $2^{ος}$ τρόπος (πολικές) $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{r\to 0}\frac{r\cos\theta\, r\sin\theta}{\sqrt{r^2\cos^2\theta+r^2\sin\theta}} \Rightarrow \lim_{r\to 0}\frac{r^2\cos\theta\sin\theta}{\cancel{\sqrt{r^2}}} = \lim_{r\to 0}\frac{r^{\cancel{2}}\cos\theta\sin\theta}{\cancel{r}}$$

$$=\lim_{r\to 0} r\cos\theta\sin\theta = 0$$

## 10 Παρατήρηση

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)\\[2ex] \lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)\end{array}\right\}\text{επαναλαμβανόμενα όρια}$$

$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) \leftarrow$ (δισδιάστατο) όριο

Αν το όριο υπάρχει, τα επαναλαμβανόμενα όρια υπάρχουν, και είναι ίσα

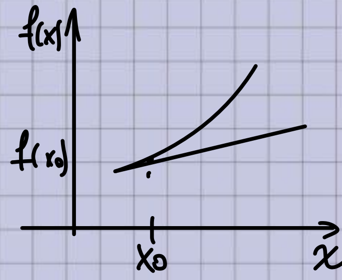
Το αντίστροφο δεν ισχύει

# (11) Παραγωγισιμότητα

Στη 1 μεταβλητή

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - \left(f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)\right)}{x - x_0} = 0$$



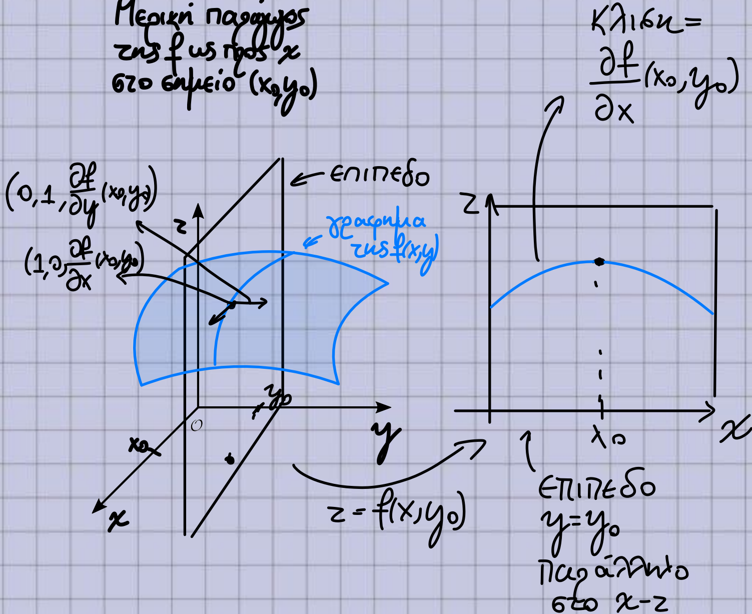

Στις πολλές διαστάσεις θα ήθελα $f$ παραγωγίσιμη στο $(x_0, y_0)$

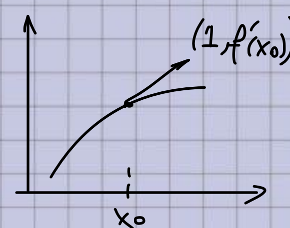
$\Leftrightarrow$ Η $f$ προσεγγίζεται απ' το εφαπτόμενο επίπεδο της "καλά"

# (12) Μερικές παράγωγοι

$f \quad A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)}_{\text{Μερική παράγωγος της } f \text{ ως προς } x \text{ στο σημείο } (x_0, y_0)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$



Αν το εφαπτόμενο επίπεδο του γραφήματος της $f$ στο $(x_0,y_0)$ υπάρχει, τότε ορίζεται από

1) Το σημείο $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$

2) Τα διανύσματα $\left(1,0,\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right)$ και $\left(0,1,\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)$

Η εξίσωσή του θα είναι

$$(x_0,y_0,f(x_0,y_0))+t\left(1,0,\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right)+s\left(0,1,\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right),\ t,s\in\mathbb{R}$$

$$=\left(\overbrace{x_0+t}^{x},\overbrace{y_0+s}^{y},f(x_0,y_0)+t\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)+s\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)$$

Άρα η εξίσωση είναι

$$\boxed{z=f(x_0,y_0)+\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)}$$