Wed 13 Mar

① Υπενθυμίσεις

$f\ A\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$
$(x,y)\to f(x,y)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=\lim_{h\to0}\frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=\lim_{h\to0}\frac{f(x_0,y_0+h)-f(x_0,y_0)}{h}$$

Αν υπάρχει εφαπτόμενο επίπεδο στο γράφημα της f στο (x_0,y_0) θα πρέπει να έχει εξίσωση

$$z=f(x_0,y_0)+\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)$$

(θυμίζει στην μια μεταβλητή την εξίσωση εφαπτομένης)

$$f(x)\xrightarrow[\text{εξισ } x_0]{\text{εφαπ}} z=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$$

② Παράδειγμα

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & x=0 \text{ ή } y=0\\ 0, & \text{διαφορετικά}\end{cases}$$

$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}=0$ στο $\mathbb{R}^2$ όπου ορίζονται

(π.χ. δεν ορίζεται η $\frac{\partial f}{\partial x}$ στα σημεία $(0,y)$ με $y>0$)

Εδώ βλέπαμε ότι παρότι οι $\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}$ υπάρχουν παντού σχεδόν, αλλά

1) Στα σημεία (x,y) με $x=0$ ή $y=0$ η συνάρτηση δεν είναι συνεχής, και

2) Στα σημεία (x,y) με $x=0$ ή $y=0$ δεν υπάρχει εφαπτόμενο επίπεδο

③ Παράδειγμα

$f(x,y)=x^{\frac{1}{3}}\cdot y^{\frac{1}{3}}$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}&=\frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1}y^{\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}\cdot y^{\frac{1}{3}}\\ \frac{\partial f}{\partial y}&=\frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}}\cdot y^{\frac{1}{3}-1}=\frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{2}{3}}\end{aligned}\right\}\text{ για } x,y\neq 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,0)-f(x,0)}{h}=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,y)=0$$

Υπάρχουν παντού οι μερικές Παράγωγοι
Όμως $g(x)=f(x,x)$ που είναι η σύνθεση της f με την $h(x,y)=(x,x)$
δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0

$$g'(x)=\left[x^{\frac{1}{3}}\cdot x^{\frac{1}{3}}\right]'=\left(x^{\frac{2}{3}}\right)'=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}},\ x\neq 0$$

Παράδοξο Η σύνθεση δύο "καλών" συναρτήσεων ως προς την παραγώγιση δεν είναι παραγωγίσιμη

④ Ορισμός

Ορισμός παραγωγισιμότητας για $f\ A\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$.

f παραγωγίσιμη/διαφορίσιμη στο $(x_0,y_0)\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \lim_{(x,y)}\frac{f(x,y)-f(x_0,y_0)-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)-\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)}{\|(x,y)-(x_0,y_0)\|}=0$$

[κατ' αναλογία με την μία διάσταση $f(x)$ παραγωγίσιμη $\Leftrightarrow \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f'(x_0)(x-x_0)}{x-x_0}=0$]

⑤ Ορισμός

Ορισμός παραγωγισιμότητας για $f\ A\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$

Η f παραγωγίσιμη στο $\vec{x_0} \Leftrightarrow \lim_{\vec{x}\to\vec{x_0}} \dfrac{\|f(\vec{x})-f(\vec{x_0})-T(\vec{x}-\vec{x_0})\|}{\|\vec{x}-\vec{x_0}\|}$, για κάποιο πίνακα $T(m\times n)$

Θεώρημα

Αν η $f=(f_1,f_2,\ldots f_m)$

Αν η f είναι παραγωγίσιμη τότε ο T είναι μοναδικός και επιπλέον

$$T=Df(\vec{x_0})=\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(\vec{x_0})}{\partial x_1}, & \frac{\partial f_1(\vec{x_0})}{\partial x_2}, & \cdots & \frac{\partial f_1(\vec{x_0})}{\partial x_n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial f_m(\vec{x_1})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m(\vec{x_0})}{\partial x_2}, & \cdots & \frac{\partial f_m(\vec{x_0})}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

⑥ Βασικά Θεωρήματα

- Θεώρημα 1

  $f\cdot A\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$

  f παραγωγ. στο $x_0 \Rightarrow$ f συνεχής στο $\vec{x_0}$

- Θεώρημα 2

  $f\cdot A\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$

  η f συνεχεις μερικές παραγώγους σε περιοχή του $\vec{x_0}\Rightarrow$ η f παραγωγίσιμη στο $\vec{x_0}$

⑦ Ορολογία

$$\begin{matrix} Df(\vec{x_0}) \\ \| \\ df(\vec{x_0}) \end{matrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\vec{x_0}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\vec{x_0}) \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\vec{x_0}) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\vec{x_0}) \end{pmatrix}$$

Διαφορικό λέγεται πολλές φορές η συνάρτηση $T(\underset{\mathbb{R}^n}{\vec{h}})=\underset{m\times n}{Df(\vec{x_0})}\cdot\vec{h}$

Ειδικά για $m=1$ $(f\cdot A\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R})$

$\nabla f(\vec{x_0})=Df(\vec{x_0})=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x_0}),\frac{\partial f}{\partial x_2}(\vec{x_0}),\ldots,\frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x_0})\right)$

κλίση, ανάδελτα, βαθμίδα

⑧ Παράδειγμα

$z=f(x,y)=e^{xy^2}\ln(x^2+y^2+1)$

i) Να εξετασθεί αν η f είναι διαφορίσιμη

ii) Αν είναι να γραφτεί η εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου $(x_0,y_0)=(0,1)$

iii) Να προσεγγισθεί η τιμή της f στο σημείο (0,1, 0,99) μέσω του παραπάνω εφαπτόμενου επιπέδου

Λύση

i) $\frac{\partial f}{\partial x}=e^{xy^2}y^2\ln(x^2+y^2+1)+e^{xy^2}\frac{1}{x^2+y^2+1}\cdot 2x$

$\frac{\partial f}{\partial y}=2xye^{xy^2}\ln(x^2+y^2+1)+e^{xy^2}\cdot\frac{1}{x^2+y^2+1}\cdot 2y$

Συνεχείς στο $\mathbb{R}^2$ άρα απο το θεώρημα 2 η f είναι παραγωγίσιμη

$Df(x,y)=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\right)$

ii) $f(0,1)=e^0[\ln 0+1+1]=\ln 2$

$\frac{\partial f}{\partial x}(0,1)=e^0\,1\ln(0+1+1)+e^0\frac{1}{0+1+1}\cdot 0=\ln 2$

$\frac{\partial f}{\partial y}(0,1)=2\,0\cdot 1\;e^0\ln(0+1+1)+e^0\frac{1}{0+1+1}2=1$

Άρα $z=f(x_0,y_0)+\frac{\partial f}{x}(x_0,y_0)(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)$

$z=\ln 2+\ln 2(x-0)+1(y-1)$

$z=\ln 2+x\ln 2+y-1$

iii) $f(0{,}1,\,0{,}99)\simeq\ln 2+\ln 2(0{,}1-0)+1(0{,}99-1)$

$\simeq\ln 2+0{,}1\ln 2-0{,}01$

$\simeq 1{,}1\ln 2-0{,}01$

⑨ Παράδειγμα

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

i) Είναι συνεχής;
ii) Έχει μερικές παραγώγους;
iii) Που είναι συνεχής οι μερικές παράγωγοι;
iv) Είναι διαφορίσιμη;

Λύση.

i) Προφανώς συνεχής για $(x,y)\neq(0,0)$
Για $(x,y)\to(0,0)$

$$|f(x,y)-f(0,0)|=\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|=\underbrace{\left|\frac{xy}{x^2+y^2}\right|}_{\text{φραγμένο από το } \frac{1}{2},\ \leq\frac{1}{2}}\sqrt{x^2+y^2}\sim\|(x,y)-(0,0)\|$$

Οπότε συνεχής και στο $(0,0)$

ii) Για $(x,y)\neq(0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=y\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}-\frac{x}{2\sqrt{x^2+y^2}}2x}{x^2+y^2}\right)=y\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}-\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=y\frac{x^2+y^2-x^2}{(x^2+y^2)(\sqrt{x^2+y^2})}\Rightarrow\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{y^3}{(x^2+y^2)(\sqrt{x^2+y^2})}\Rightarrow\frac{\partial f}{\partial x}=\left[\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right]^3$$

Και ομοίως

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\left[\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right]^3$$

Για $(x,y)=(0,0)$ $\quad \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=0$

Και ομοίως $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$ Άρα οι μερικές παράγωγοι υπάρχουν παντού

iii) Σίγουρα οι μερικές παράγωγοι είναι συνεχείς για $(x,y) \neq (0,0)$

Για το $(x,y)=(0,0)$ να πάω με τον ορισμό ή προηγούμενο στο ερώτημα 4

1) Ορισμός $(x,y) \to (0,0)$ $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^3$

Για την καμπύλη $y=x$

$f(x,x) = \left(\frac{x}{\sqrt{2x^2}}\right)^3 = \left(\frac{x}{\sqrt{2}x}\right)^3 = \frac{1}{2\sqrt{2}}$

Για την $y=0$

$f(x,0) = \left(\frac{0}{\sqrt{x^2}}\right)^3 = 0$

iv) Παραγωγίσιμη για κάθε $(x,y) \neq (0,0)$ λόγω συνέχειας των μερικών παραγώγων

Εξετάζω παραγωγισιμότητα στο $(0,0)$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|f(x,y)-0-0(x-0)-0(y-0)|}{\|(x,y)-(0,0)\|}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|f(x,y)|}{\|(x,y)\|}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left|\frac{xy}{x^2+y^2}\right| \begin{cases} \xrightarrow{x=0} f(0,y) = \left|\frac{0}{0^2+y^2}\right| = 0 \\ \xrightarrow{y=x} f(x,x) = \left|\frac{x^2}{2x^2}\right| = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left|\frac{xy}{x^2+y^2}\right|$$

άρα όχι παραγωγίσιμη στο $(0,0)$