Mon 20 Mar

Διαδρομές & Καμπύλες

① Ορισμός

διάστημα $\subseteq \mathbb{R}$

Μία συνάρτηση $\gamma: I \to \mathbb{R}^n$ λέγεται διαδρομή στον $\mathbb{R}^n$
Το $c = \gamma(I) = \{\gamma(t) : t \in I\}$ λέγεται καμπύλη στον $\mathbb{R}^n$

② Παράδειγμα

Ευθεία στον $\mathbb{R}^n$ διέρχεται από σημείο (x_0, y_0, z_0) και κατεύθυνση το (v_1, v_2, v_3) είναι καμπύλη με μια διαδρομή

$\gamma: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$

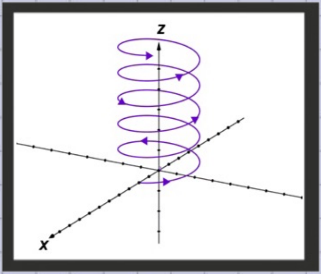
$$t \to \underbrace{(x_0 + t v_1, y_0 + t v_2, z_0 + t v_3)}_{\gamma(t)}$$

③ Παράδειγμα

$\gamma: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$

$\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t),\ t \in \mathbb{R}$

είναι παραμετροποίηση σπείρας



④ Παράδειγμα

Ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα (x_0, y_0, z_0) και (x_1, y_1, z_1)
Μια διαδρομή παραμετρ είναι η
$\gamma: [0,1] \to \mathbb{R}^3$ με $\gamma(t) = (x_0, y_0, z_0)\cdot(1-t) + (x_1, y_1, z_1)t$ με $t \in [0,1]$

⑤ Παράδειγμα

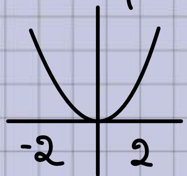
$f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

διάστημα

Γράφημα της $f = \{(t, f(t))\ t \in I\}$

είναι καμπύλη με παραμετροποίηση
$\tau: I \to \mathbb{R}$, $\tau(t) = (t, f(t))$, $t \in I$

⑥ Παράδειγμα



Η καμπύλη

$\{y = x^2,\ x \in [-2, 2]\}$

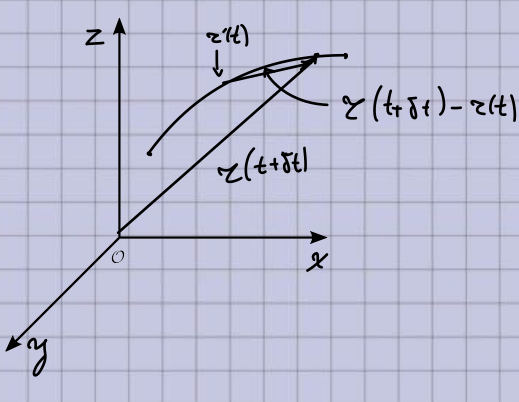
Δύο παραμετροποιήσεις είναι

1) $\tau_1: [-2, 2] \to \mathbb{R}$
$\tau_1(t) = (t, t^2),\ t \in [-2, 2]$

2) $\tau_2: [-\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2}] \to \mathbb{R}$
$\tau_2(t) = (t^3, t^6),\ t \in [-\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2}]$

⑦ Ταχύτητα διαδρομής

Μια διαδρομή $\tau: I \to \mathbb{R}^n$ λέγεται διαφορίσιμη αν υπάρχει το $D\tau(t)$ για κάθε $t \in I$
Τότε η $\tau'(t) = D\tau(t)$ είναι η ταχύτητα της $\tau(t)$. Το διάνυσμα $\tau'(t)$ είναι εφαπτόμενο στην καμπύλη που παραμετροποιεί η $\tau(t)$



$$\lim_{\delta t \to 0} \frac{\tau(t+\delta t) - \tau(t)}{\delta t}$$

⑧ Παράδειγμα

Έστω η καμπύλη με παραμετροποίηση
$\tau\ [0,1]\to\mathbb{R}^2$
$\tau(t)=\left(\frac{1}{\cos t}, e^t, te^t\right)$

Να βρεθεί η εξίσωση εφαπτομένης της στο σημείο $(1,1,0)$

Εδώ $\tau(0)=(1,1,0)$ ανήκει στην εφαπτομένη
και η κατεύθυνση της είναι το $\tau'(0)$
Είναι
$\tau'(t)=\left(\frac{\sin t}{\cos^2 t}, e^t, e^t+te^t\right)$
οπότε $\tau'(0)=(0,1,1)$

Η ζητούμενη εφαπτομένη είναι

$\ell(t)=(1,1,0)+t(0,1,1)=(1,1+t,t)$

⑨ Ιδιότητες παραγώγου

1) $f\ U\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ παραγ. στο $\vec{x}_0$
$g\ U\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$
τότε
$f+g, f-g$ παραγώγ. στο $\vec{x}_0$
και
$D(f+g)(\vec{x}_0)=Df(\vec{x}_0)+Dg(\vec{x}_0)$
$D(f-g)(\vec{x}_0)=Df(\vec{x}_0)-Dg(\vec{x}_0)$

Αν επιπλέον $m=1$ τότε
$f\cdot g$ παραγωγ. στο $\vec{x}_0$
f/g παραγωγ. στο $\vec{x}_0$, εφόσον $g(\vec{x}_0)\neq 0$
και
$D(f\cdot g)(\vec{x}_0)=f(\vec{x}_0)Dg(\vec{x}_0)+g(\vec{x}_0)Df(\vec{x}_0)$
$D(f/g)(\vec{x}_0)=\frac{g(\vec{x}_0)Df(\vec{x}_0)-f(\vec{x}_0)Dg(\vec{x}_0)}{g(\vec{x}_0)^2}$

⑩ Παράδειγμα

$f(x,y)=x^2\tan y$
$g(x,y)=y\ln(x^2+1)$
$D(f\cdot g)(x,y)=,$

$Df(x,y)=\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)=\left(2x\tan y, \frac{x^2}{\cos^2 y}\right)$

$Dg(x,y)=\left(\frac{\partial g}{\partial x}(x,y), \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)\right)=\left(y\frac{2x}{x^2+1}, \ln(x^2+1)\right)$

$D(f\cdot g)(x,y)=g(x,y)Df(x,y)+f(x,y)Dg(x,y)=\left(2x\tan y\cdot y\ln(x^2+1), \frac{x^2}{\cos^2 y}\cdot y\cdot\ln(x^2+1)\right)$
$=\left(x^2\tan y\cdot y\frac{2x}{x^2+1}, x^2\tan y\ln(x^2+1)\right)$

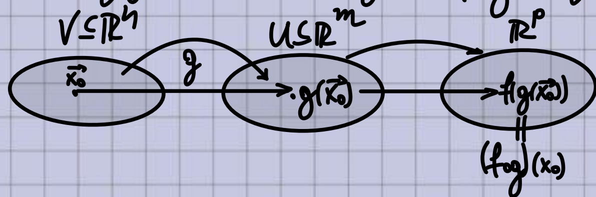
11 Παραγώγιση σύνθεσης συναρτήσεων - Κανόνας αλυσίδας

Στη 1-μεταβλητή

$f \; U \subseteq \mathbb{R} \to U$ παραγ στο $g(x_0)$

$g \; V \subseteq \mathbb{R} \to U$ παραγ στο x_0

$\Rightarrow f \circ g \; V \to \mathbb{R}$ παραγ στο x_0 και $(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$



Θεώρημα.

$f \; U \in \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ παραγ στο $g(\vec{x_0})$

$g: V \in \mathbb{R}^n \to U$ παραγ στο $\vec{x_0}$

$\Rightarrow f \circ g \; V \to \mathbb{R}^p$ παραγ. στο $\vec{x_0}$

12 Παράδειγμα

$f(x,y,z) = (xy^2, yz^2)$ $(f \; \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2)$

$g(s,t) = (e^s, s\cos t, s+t)$ $(g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3)$

$D(f \circ g)(s,t) =,$ $(f \circ g \; \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2)$

Έχω $Df(x,y,z) = \begin{pmatrix} y^2 & 2xy & 0 \\ 0 & z^2 & 2yz \end{pmatrix}$

$Dg(s,t) = \begin{pmatrix} e^s & 0 \\ \cos t & -s \cdot \sin t \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Άρα $D(f \circ g)(s,t) = \begin{pmatrix} s^2\cos^2 t & 2e^s \cdot s\cos t & 0 \\ 0 & (s+t)^2 & 2s\cos t(s+t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^s & 0 \\ \cos t & -s\sin t \\ 1 & 1 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} s^2\cos^2 t \cdot e^s + 2e^s s\cos^2 t, & -2e^s s^2 \cos t \sin t \\ (s+t)^2\cos t + 2s\cos t(s+t), & -(s+t)^2 s\sin t + 2s\cos t(s+t) \end{pmatrix}$