Thu 23 Mar

Κανόνες Αλυσίδας & Εφαρμογές

① Κανόνας Αλυσίδας

$f: U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ παραγωγίσιμη στο $g(\vec{x}_0)$
$g: V \subseteq \mathbb{R}^l \to U$ παραγωγίσιμη στο $\vec{x}_0$

$\Rightarrow f\circ g: V \to \mathbb{R}^p$ παραγωγίσιμη στο $\vec{x}_0$ και ισχύει: $D(f\circ g)(\vec{x}_0) = Df(g(\vec{x}_0))\, Dg(\vec{x}_0)$

② Ειδική περίπτωση

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ και $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\vec{r}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n : t \Leftrightarrow$ τότε $\frac{d}{dt} f(\vec{r}(t)) = \nabla f(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t)$

Δηλαδή ισχύει

$\vec{r}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n : t \to (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$
$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \to (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto f(x_1, \ldots, x_n)$

Άρα $\frac{df(\vec{r}(t))}{dt} = \left[\frac{df(\vec{r}(t))}{dx_1}, \frac{df(\vec{r}(t))}{dx_2}, \ldots, \frac{df(\vec{r}(t))}{dx_n}\right] \begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \frac{df(\vec{r}(t))}{dt} = \frac{df}{dx_1}(\vec{r}(t))\, x_1'(t) + \frac{df}{dx_2}(\vec{r}(t))\, (x_2'(t)) + \ldots + \frac{df}{dx_n}(\vec{r}(t))\, x_n'(t)$

π.χ. $t \to$ χρόνος
$\vec{r}(t) \to (x(t), y(t), z(t)) \to$ θέση στο χώρο τη στιγμή t
$f(x,y,z) \to$ θερμοκρασία στο σημείο του χώρου (x,y,z)

$f(\vec{r}(t)) \to$ θερμοκρασία στην θέση που βρίσκομαι τη στιγμή t

③ Ειδικη περιπτωση ΙΙ

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\quad f(u,v)$

$g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ $\quad g(x,y,z)=(u,v)$

$h = f\circ g$

$h=f\circ g \qquad h(x,y,z)=f(g(x,y,z))=f(u(x,y,z), v(x,y,z))$

$$\frac{\partial h}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial h}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial h}{\partial z}=\frac{\partial f}{\partial u}\,\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial v}\,\frac{\partial v}{\partial z}$$

④ Παράδειγμα

$f(u,v)=u^2+uv-v$

$g(x,y,z)=(\underbrace{xy}_{u=(xy)}, z-y)$ $\quad v(x,y,z)$

$$h(x,y,z)=f(g(x,y,z))=\overbrace{(xy)^2}^{u^2}+\overbrace{(xy)(z-y)}^{u\cdot v}-\overbrace{(z-y)}^{v}$$

$$\frac{\partial h}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$$

$=(2u+v)y+(u-1)0$

$=(2u+v)y$

$=(2xy+z-y)y$

⑤ Άσκηση

Έστω $z=\dfrac{u^2+v^2}{u^2-v^2}$, $u=e^{-x-y}$ και $v=e^{xy}$

$\dfrac{\partial z}{\partial x}=,$

Εδώ θα έχω

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=$$

$$=\frac{2u(u^2-v^2)-(u^2+v^2)2u}{(u^2-v^2)^2}\cdot(-e^{-x-y})+\frac{2v(u^2-v^2)-(u^2+v^2)(-2v)}{(u^2-v^2)^2}\cdot ye^{xy}$$

$$=\frac{-4uv^2}{(u^2-v^2)^2}(-e^{-x-y})+\frac{4vu^2}{(u^2-v^2)^2}ye^{xy}$$

Άρα $$\frac{dz}{dx}=\frac{-4e^{-x-y}e^{2xy}}{(e^{-2x-2y}-e^{2xy})^2}\cdot e^{-x-y}+\frac{4e^{xy}e^{-2x-2y}}{(e^{-2x-2y}-e^{2xy})^2}\cdot ye^{xy}$$

$$=-\frac{4e^{-2x-2y}e^{2xy}}{(e^{-2x-2y}-e^{2xy})^2}+\frac{4ye^{2xy}e^{-2x-2y}}{(e^{-2x-2y}-e^{2xy})^2}=\frac{4e^{-2x-2y}e^{2xy}(y-1)}{(e^{-2x-2y}-e^{2xy})^2}$$

⑥ Άσκηση

Έστω $h(x,y)=f(\underbrace{x-y}_{u})$

Να υπολογίσετε το $\frac{dh}{dx}+\frac{dh}{dy}=;$

$(x,y)\xrightarrow{g}\underbrace{x-y}_{u}$

$u\xrightarrow{f}f(u)$

Οπότε: $\frac{\partial h}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot 1=\frac{\partial f}{\partial u}$

$\frac{\partial h}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}(-1)=-\frac{\partial f}{\partial u}$

Άρα $\frac{dh}{dx}+\frac{dh}{dy}=\frac{\partial f}{\partial u}-\frac{\partial f}{\partial u}=0.$

⑦ Κατευθυνόμενη παράγωγος

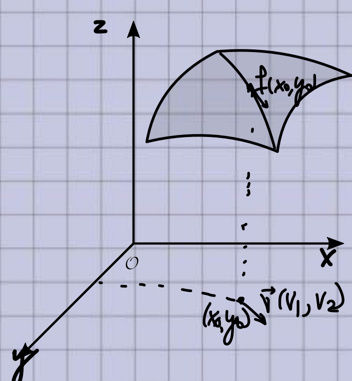
Ορισμός

$f: U\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$

$\vec{v}\in\mathbb{R}^n$ (ανύσμα $\|\vec{v}\|=1$)

Κατευθ. παράγωγος της f προς την κατεύθυνση των $\vec{v}$ στο $\vec{x_0}$ είναι

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{v}}(\vec{x_0})=D_{\vec{v}}(\vec{x_0})=\lim_{h\to 0}\frac{f(\vec{x_0}+h\vec{v})-f(\vec{x_0})}{h}$$



$f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = D_{\vec{v}}(\vec{x}_0)$: **Αριθμοί**

$Df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$: **Διάνυσμα**

$\frac{\partial f}{\partial x} = D_{\overrightarrow{(1,0)}} f$, $\frac{\partial f}{\partial y} = D_{\overrightarrow{(0,1)}} f$: Οι μερικές παράγωγοι είναι ειδικές περιπτώσεις κατευθυνόμενων παραγώγων

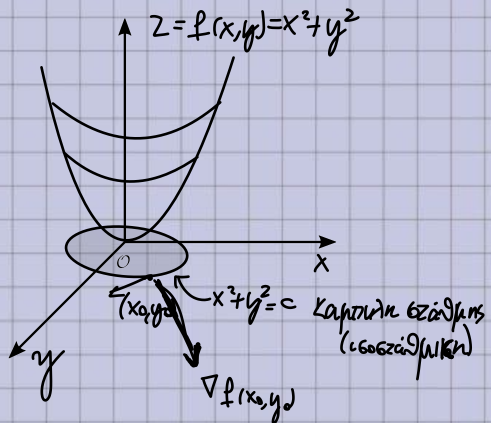
Πράγματι

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{\overbrace{f(x_0+h, y_0)}^{f((x_0,y_0)+h(1,0))} - f(x_0,y_0)}{h} = D_{\overrightarrow{(1,0)}} f(x_0,y_0)$$

⑧ Βαθμίδα/Κλίση/Ανάδελτα μιας συν. f

$f\ U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$\nabla f(\vec{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}), \dots \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x})\right)$$
$$\parallel$$
$$Df(\vec{x})$$



1) Το $\nabla f(\vec{x}_0)$ δείχνει την κατεύθυνση του γραφήματος μέγιστης αύξησης της f από το $\vec{x}_0$

2) Το $\nabla f(\vec{x}_0)$ είναι κάθετο στην καμπύλη στάθμης που περνάει απ' το $\vec{x}_0$

Αιτιολόγ των 1)

Θέλουμε το διάνυσμα $\vec{v}$ με $\|\vec{v}\| = 1$ ώστε $D_{\vec{v}} f(\vec{x}_0)$ να είναι μέγιστο

όμως

$$D_{\vec{v}} f(\vec{x}_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\vec{x}_0 + \vec{v}h) - f(\vec{x}_0)}{h}$$

Έστω $g(h) = f(\vec{x}_0 + \vec{v}h)$, τότε $D_{\vec{v}} f(\vec{x}_0) = \lim_{h\to 0} \frac{g(h)-g(0)}{h} = g'(0)$

Αλλά $g'(h) = \nabla f(\vec{x}_0 + \vec{v}h)\vec{v}$

Άρα $D_{\vec{v}}(\vec{x}_0) = \nabla f(\vec{x}_0) \cdot \vec{v}$ λόγω C-S (Ανισότητα Cauchy-Schwartz)

$$|D_{\vec{v}} f(\vec{x}_0)| = |\nabla f(\vec{x}_0)\vec{v}| \leq \|\nabla f(\vec{x}_0)\| \, \|\vec{v}\|$$

Η ισότητα $D_{\vec{v}} f(\vec{x}_0) = \|\nabla f(\vec{x}_0)\| \|\vec{v}\|$ → για $\vec{v}, \nabla f(\vec{x}_0)$ στην ίδια κατεύθυνση

Ενώ $-D_{\vec v} f(\vec x_0) = \|\nabla f(\vec x_0)\|\cdot\|\vec v\|$ πάντα για $\vec v$, $\nabla f(\vec x_0)$ έχουν αντίθετη κατεύθυνση

$$\left(g(h) = \underset{u(h)}{\cancel{f(\vec x_0+\vec v h)}} = f(u(h)) \Rightarrow \underbrace{\nabla f(u(h))}_{\nabla f(\vec x_0+\vec v h)\cdot\vec v}\, u'(h) = g'(h) \Rightarrow g'(0) = \nabla f(\vec x_0)\cdot\vec v \Rightarrow D_{\vec v} f(\vec x_0) = \nabla f(\vec x_0)\cdot\vec v \right)$$

Αιτιολόγηση του 2)

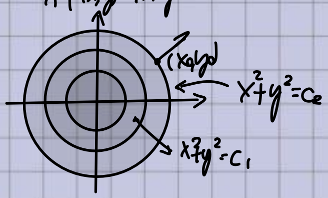
Εικόνα για συν. 2 μετ:

$f(x,y)$

Καμπύλη στάθμης $f(x,y)=c$ $\quad \nabla f(x,y) = (2x, 2y)$

$f(x,y)=C$

π.χ $f(x,y) = x^2+y^2$



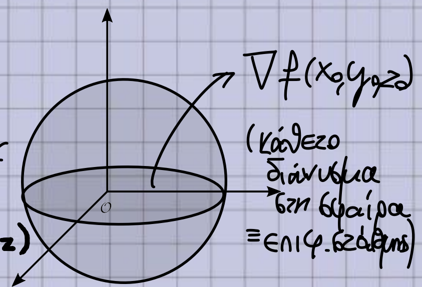
$f(x,y,z)$

Επιφ. στάθμης $f(x,y,z)=C$

π.χ. $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$

$\nabla f(x,y,z) = (2x, 2y, 2z)$

Εικόνα για συν. 3 μετ:



Θέλουμε να δούμε ότι το $\nabla f(\vec x_0)$ είναι κάθετο στο εφαπτ. επιπ/ευθεία στην ισοσταθμική που περνά απ' το $\vec x_0$

Έστω ότι είμαστε στις 3 διαστ. $w = f(x,y,z)$

Μια ισοστάθμιση είναι της μορφής $f(x,y,z)=c$

Έστω (x,y,z) σημείο της

Έστω μια καμπύλη $\tau: I \to \mathbb{R}^3$

$\tau(t)$ πάνω στην ισοσταθμική με $\vec\tau(0) = (x_0,y_0,z_0)$

Έχω $f(\tau(t)) = c,\ t\in I$ ← Η f είναι σταθερή, ίση με c, πάνω στην ισοσταθμική, άρα και σε κάθε καμπύλη που βρίσκεται πάνω στην ισοσταθμική

$\Rightarrow \frac{d}{dt} f(\vec\tau(t)) = 0,\ t\in I$

$\Rightarrow \nabla f(\vec\tau(t))\cdot\vec\tau'(t) = 0$

$\overset{t=0}{\Rightarrow} \nabla f(x_0,y_0,z_0)\cdot(\vec\tau'(0)) = 0$ — εφαπτ. διαν. της καμπύλης στο (x_0,y_0,z_0)

Άρα $\nabla f(x_0,y_0,z_0)$ κάθετο στο εφαπτ. επιπ. της ισοσταθμικής επιφάνειας.

9 Άσκηση

$\frac{d}{dx}\int_0^x f(x,y)\,dy = ;\ \Rightarrow h(x) = \int_0^x f(x,y)\,dy$

Θέτω: $g(u,v) = \int_0^u f(v,y)\,dy$

$h(x) = g(x,x) = g(k(x))$ $\quad k(x) = (x,x)$

Από κανόνα αλυσίδας:

$$\frac{dh}{dx} = \frac{\partial g}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$= f(v,u)\cdot 1 + \int_0^u \frac{\partial f}{\partial v}(v,y)\,dy\cdot 1 = f(x,x) + \int_0^x \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,dy.$$