

Mon 27 Mar

Εφαρμογές κανόνα αλυσίδας - Παραγωγήσι πεπλεγμένων συναρτήσεων

Μερικές παράγωγοι n-οστής τάξης

(I) Παράγωγοι πεπλεγμένων συναρτήσεων

Μια πεπλεγμένη (implicit) συνάρτηση $f(x,y)$ είναι μια συνάρτηση που δεν δίνεται μέσω κάποιου τύπου $f(x,y)=\dots$, αλλά μέσω μιας εξίσωσης $H(x,y,f(x,y))=0$

π.χ.

$$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$$

δίνεται σε πεπλεγμένη μορφή ως $x^2+y^2-f(x,y)^2=0$

δηλαδή $H(x,y,f(x,y))=0$ με $H(x,y,z)=x^2+y^2-z^2$

Αυτό είναι χρήσιμο όταν η εξίσωση δεν "λύνεται"

π.χ.

$$\sin f(x,y)-f(x,y)+x^2 \tan y=0$$

Υπάρχει τρόπος να βρούμε τις

$\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$ από την $H(x,y,z)$ χωρίς να βρω την f

Αυτό γίνεται παραγωγίζοντας την H με κανόνα της αλυσίδας

$$H(x,y,f(x,y))=0 \iff \tilde{H}(x,y)=0 \text{ με } \tilde{H}(x,y)=H(x,y,f(x,y))$$
$$\stackrel{\partial/\partial x}{\Rightarrow} \partial \tilde{H}/\partial x=0$$

$$\Rightarrow \partial H/\partial x \times \underset{=1}{\partial x/\partial x} + \partial H/\partial y \times \underset{=0}{\partial y/\partial x} + \partial H/\partial z \times \underset{=\partial f/\partial x}{\partial z/\partial x}=0$$

$$\text{Άρα } \partial H / \partial x + \partial H / \partial z \times \partial f / \partial x = 0$$

$$\Rightarrow \partial f / \partial x = -(\partial H / \partial x) / (\partial H / \partial z), \text{ εφόσον } \partial H / \partial z \neq 0$$

Αν δουλεύαμε με πεπλεγμένη μορφή στο παράδειγμα με $H(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$,

$$\partial H / \partial x = 2x \quad \partial H / \partial z = -2z$$

$$\text{Άρα } \partial f / \partial x = -(\partial H / \partial x) / (\partial H / \partial z) = -(2x) / (-2z) = x/z \quad (\text{Μου δίνει και τις δύο λύσεις})$$

(2) Παράδειγμα

$$x^2 + y^2 - f(x, y)^2 = 0 \Leftrightarrow H(x, y, f(x, y)) = 0 \text{ με } H(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$$

Αν δουλεύατε απευθείας, θα είχατε $f(x, y) = \pm \sqrt{x^2 + y^2}$

$$\partial f / \partial x = 2x / (2\sqrt{x^2 + y^2}) = x / \sqrt{x^2 + y^2} \text{ για την περίπτωση } f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\text{και } \partial f / \partial x = 2x / (-2\sqrt{x^2 + y^2}) = -x / \sqrt{x^2 + y^2} \text{ για } f(x, y) = -\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Αν δουλεύαμε με πεπλεγμένη μορφή, τότε

$$\partial f / \partial x = 2x, \partial H / \partial y = 2y, \partial H / \partial z = -2z, \text{ οπότε (βλ. παραπάνω)}$$

$$\partial f / \partial x = -(\partial H / \partial x) / (\partial H / \partial z) = -2x / (-2z) = x/z \text{ που δίνει και τις δύο λύσεις ανάλογα με το αν } z = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ ή } -\sqrt{x^2 + y^2}.$$

(3) Σχολία για την μη ύπαρξη της $\partial f / \partial x$

Συνήθως ζητάμε την $\partial f / \partial x$, όχι ως τύπο αλλά ως τιμή σε σημείο (x_0, y_0)

$$\text{Δηλαδή έστω θέλω την } \partial f / \partial x (3, 4) = x/z = -3/5, \text{ βλ. γραφείο } (x, y) = (3, 4) \\ \text{ή } f(x_0, y_0) = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5.$$

$$\partial H / \partial z(x_0, y_0) = 0$$

Μη ύπαρξη της $\partial f / \partial x$

$$H(x, y, f(x, y)) = 0$$

$$\text{Είπαμε ότι } \partial f / \partial x = -(\partial H / \partial x) / (\partial H / \partial z)$$

Όταν η H δεν προσδιορίζει την f κοντά σε

αυτό το σημείο. Γι'αυτό δεν υπάρχει το $\partial f / \partial x$

(4) Μερικές παράγωγοι ανώτερης τάξης

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\partial f / \partial x_1, \partial f / \partial x_2, \dots, \partial f / \partial x_n$$

Μερικές παράγωγοι 1ης τάξης

$$\partial / \partial x_1 \times (\partial f / \partial x_1), \dots, \partial / \partial x_n \times (\partial f / \partial x_1), \partial / \partial x_1 \times (\partial f / \partial x_1), \dots, \partial / \partial x_n \times (\partial f / \partial x_2), \dots$$

$$\partial^2 f / \partial x_1^2$$

$$\partial^2 f / \partial x_n \partial x_1$$

Μερικές παραγωγοι 2ης τάξης

$$\text{Εναλλακτικός συμβολισμός: } \partial^2 f / \partial x_1 \partial x_2 = f_{x_2 x_1}, \partial^3 f / \partial x_1 \partial x_2^2 = f_{x_2 x_2 x_1}$$

(5) Ορισμός

Μια συνάρτηση $f: \mathbb{U} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται κλάσης $C^2(\mathbb{U})$ (συνεπώς παραγωγίσιμη n -φορές) αν υπάρχουν όλες οι μερικές παραγωγοί n τάξης και είναι συνεχείς

(6) Θεώρημα

$$f: \mathbb{U} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad C^2(\mathbb{U}) \text{ ή απλά } C^2$$

$$\partial^2 f / \partial x_i \partial x_j = \partial^2 f / \partial x_j \partial x_i$$

(7) Παράδειγμα

$$f(x,y) = e^x \cos y$$

$$\partial f / \partial x = e^x \cos y, \quad \partial f / \partial y = -e^x \sin y$$

$$\partial^2 f / \partial x^2 = e^x \cos y$$

$$\partial^2 f / \partial y \partial x = -e^x \sin y$$

$$\partial^2 f / \partial x \partial y = -e^x \sin y$$

$$\partial^2 f / \partial y^2 = -e^x \cos y$$

Αυτή η συνάρτηση έχει την ιδιότητα:

$$\Delta f = \partial^2 f / \partial x^2 + \partial^2 f / \partial y^2 = 0 \quad \Delta f \rightarrow \text{Τελεστής Laplace}$$

Μια τέτοια συνάρτηση λέγεται αρμονική

Μια άλλη αρμονική συνάρτηση είναι η $f(x,y) = x^2 - y^2$

$$\partial f / \partial x = 2x$$

$$\partial f / \partial y = -2y$$

$$\partial^2 f / \partial x^2 = 2$$

$$\partial^2 f / \partial x \partial y = \partial^2 f / \partial y \partial x, \quad \partial^2 f / \partial y^2 = -2$$

0

Το πρόβλημα του Laplace στις 2 διαστάσεις είναι δοθέντος ενός χωρίου D και μιας συνάντησης $g: \partial D \rightarrow \mathbb{R}$

να βρω f **τίποτα άλλο**

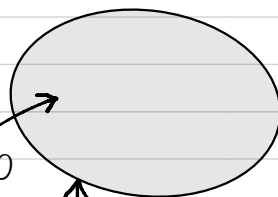
$$\partial^2 f / \partial x^2 + \partial^2 f / \partial y^2 = 0, \quad (x,y) \in \text{int} D$$

$$f(x,y) = g(x,y), \quad (x,y) \in \partial D \quad \text{έστω } \text{int του } D = D^\circ$$

Εσωτερικό του D

$$\text{int}(D) = D^\circ$$

∂D (σύνολο του D)



(8) Παράδειγμα

$U(x,y)$ συνάρτηση σε Ευκλείδειες συντεταγμένες και
και $\tilde{u}(r,\theta)$ η αντιστοιχιά της σε Πολικές
το συνήθως παραλείπεται

Πρόβλημα:

Να εκφραστεί ο

$$\Delta u = \partial^2 u / \partial x^2 + \partial^2 u / \partial y^2 \text{ ως πολικές συντεταγμένες. Έχουμε } r(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Άρα $\partial r / \partial x = x / \sqrt{x^2 + y^2}$, $\partial r / \partial y = y / \sqrt{x^2 + y^2}$
 $1 / \cos^2 \theta \times \partial \theta / \partial x = -y / x^2$, $1 / \cos^2 \theta \times \partial \theta / \partial y = 1 / x$

$$\text{Άρα } \partial r / \partial x = r \cos \theta / r = \cos \theta$$

$$\partial r / \partial y = \sin \theta$$

$$\partial \theta / \partial x = -\cos^2 \theta \times r \sin \theta / r^2 \cos^2 \theta = -\sin \theta / r$$

$$\partial \theta / \partial y = \cos^2 \theta \times 1 / r \cos \theta = \cos \theta / r$$

Έχω:

$$\partial u / \partial x = \partial u / \partial r \times \partial r / \partial x + \partial u / \partial \theta \times \partial \theta / \partial x$$

$$\text{Άρα } \partial u / \partial x = \cos \theta \times \partial u / \partial r - \sin \theta / r \times \partial u / \partial \theta$$

$$\partial u / \partial y = \sin \theta \times \partial u / \partial r + \cos \theta / r \times \partial u / \partial \theta$$