

Thu 30 Mar

Θεώρημα Taylor και εύρεση Ακροζάδων

(I) Άσκηση (συνέχεια προηγούμενης φορές)

$$u(x,y) = u(r(x,y), \theta(x,y))$$

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$r(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\tan \theta = y/x$$

$$\partial r / \partial y = y / \sqrt{x^2 + y^2} = r \sin \theta / r = \sin \theta, \quad \partial r / \partial x = x / \sqrt{x^2 + y^2} = r \cos \theta / r = \cos \theta.$$

$$(1/\cos^2 \theta) \cdot (\partial \theta / \partial x) = -y/x^2 \Rightarrow \partial \theta / \partial x = -[(r \sin \theta) / (r^2 \cos^2 \theta)] \cdot \cos^2 \theta = -\sin \theta / r$$

$$(1/\cos^2 \theta) \cdot (\partial \theta / \partial y) = 1/x \Rightarrow \partial \theta / \partial y = (1/r \cos \theta) \cdot \cos^2 \theta = \cos \theta / r$$

$$\partial u / \partial x = (\partial u / \partial r) \cdot (\partial r / \partial x) + (\partial u / \partial \theta) \cdot (\partial \theta / \partial x)$$

$$= (\partial u / \partial r) \cdot \cos \theta - (\partial u / \partial \theta) \cdot (\sin \theta / r)$$

$$\partial u / \partial y = (\partial u / \partial r) \cdot (\partial r / \partial y) + (\partial u / \partial \theta) \cdot (\partial \theta / \partial y)$$

$$= (\partial u / \partial r) \cdot \sin \theta + (\partial u / \partial \theta) \cdot (\cos \theta / r)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \partial / \partial x [(\partial u / \partial r) \cdot \cos \theta - (\partial u / \partial \theta) \cdot (\sin \theta / r)]$$

$$= \partial / \partial r [(\partial u / \partial r) \cdot \cos \theta - (\partial u / \partial \theta) \cdot (\sin \theta / r)] \cdot (\partial r / \partial x)$$

$$+ \partial / \partial \theta [(\partial u / \partial r) \cdot \cos \theta - (\partial u / \partial \theta) \cdot (\sin \theta / r)] \cdot (\partial \theta / \partial x)$$

$$= [(\partial^2 u / \partial r^2) \cdot \cos \theta - (\partial^2 u / \partial r \partial \theta) \cdot (\sin \theta / r) + (\partial u / \partial \theta) \cdot (\sin \theta / r^2)] \cdot \cos \theta$$

$$+ [(\partial^2 u / \partial \theta \partial r) \cdot \cos \theta - (\partial u / \partial r) \cdot \sin \theta - (\partial^2 u / \partial \theta^2) \cdot (\sin \theta / r) - (\partial u / \partial \theta) \cdot (\cos \theta / r)] \cdot (-\sin \theta / r)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \partial / \partial y [(\partial u / \partial r) \cdot \sin \theta + (\partial u / \partial \theta) \cdot (\cos \theta / r)]$$

$$= [(\partial^2 u / \partial r^2) \cdot \sin \theta + (\partial^2 u / \partial r \partial \theta) \cdot (\cos \theta / r) - (\partial u / \partial \theta) \cdot (\cos \theta / r^2)]$$

$$+ [(\partial^2 u / \partial \theta \partial r) \cdot \sin \theta + (\partial u / \partial r) \cdot \cos \theta + (\partial^2 u / \partial \theta^2) \cdot (\cos \theta / r) - (\partial u / \partial \theta) \cdot (\sin \theta / r)] \cdot (\cos \theta / r)$$

Απορρίπτουμε και απλοποιώντας, τελικά βγαίνει

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial r}.$$

(2) Θεώρημα Taylor - 1 μεταβλητή

$f: U \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, C^{k+1} φορές παραγωγίσιμη και η $(k+1)$ παράγωγος συνεχής

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot h + (f''(x_0)/2) \cdot h^2 + \dots + (f^{(k)}(x_0)/k!) h^k + R_k(x_0, h)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} [R_k(x_0, h)/h^k] = 0$$

Αρκεί C^k και $(k+1)$ παραγωγίσιμες να έχουμε την παραπάνω έκφραση.

Αν επιπλέον η $(k+1)$ είναι συνεχής, τότε υπάρχει και τύπος για το

$$R_k(x_0, h) = \int_{x_0}^{x_0+h} \frac{(x_0+h-z)^k}{k!} \cdot f^{(k+1)}(z) dz.$$

Πολλές φορές χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό:

$$R_k(x_0, h) = o(h^k)$$

Γενικά λέμε ότι μια $g(h) = o(r(h)) \Leftrightarrow g(h)/r(h) \rightarrow 0$

Προσέγγιση της 1ης τάξης της f :

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \underbrace{R_1(x_0, h)}_{o(h)}$$

Προσέγγιση της 2ης τάξης της f :

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + (f''(x_0)/2) \cdot h^2 + \underbrace{R_2(x_0, h)}_{o(h^2)}$$

(3) Θεώρημα Taylor σε n-μεταβλητές

$f: U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 1ης τάξης

$$f(\vec{x}_0 + \vec{h}) = f(\vec{x}_0) + \sum_{i=1}^n [\partial f(\vec{x}_0) / \partial x_i] \cdot h_i + o(\|\vec{h}\|) = R_1(\vec{x}_0 + \vec{h}). \quad \left(\lim_{\vec{h} \rightarrow 0} [R(\vec{x}_0, \vec{h}) / \|\vec{h}\|] = 0 \right)$$

$$f(\vec{x}_0 + \vec{h}) = f(\vec{x}_0) + \nabla f(\vec{x}_0) \cdot \vec{h} + o(\|\vec{h}\|)$$

$f: U^2 \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 2ης τάξης

$$f(\vec{x}_0 + \vec{h}) = f(\vec{x}_0) + \sum_{i=1}^n [(\partial f(\vec{x}_0) / \partial x_i) \cdot h_i] + 1/2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n [(\partial^2 f(\vec{x}_0) / \partial x_i \partial x_j) \cdot h_i \cdot h_j] + R_2(\vec{x}_0, \vec{h})$$

$$\downarrow$$

$$o(\|\vec{h}\|^2), \vec{h} \rightarrow 0$$

Ορίζουμε $\forall x_0: Hf(\vec{x}_0)$ συνάρτηση: $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ όπου

$$Hf(\vec{x}_0)(\vec{h}) = 1/2 \cdot \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n [(\partial^2 f(\vec{x}_0) / \partial x_i \partial x_j) \cdot h_i \cdot h_j]$$

$$= 1/2 (h_1, h_2, \dots, h_n) \begin{pmatrix} \partial^2 f / (\partial x_1 \partial x_1) & \dots & \partial^2 f / (\partial x_1 \partial x_n) \\ \dots & \dots & \dots \\ \partial^2 f / (\partial x_n \partial x_1) & \dots & \partial^2 f / (\partial x_n \partial x_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \dots \\ h_n \end{pmatrix} =$$

$$= \vec{h}^T B \vec{h} / 2$$

Σεματάμε στην 2η τάξη γιατί αυτό αρκεί για τα ακρότατα

$$\text{Όποτε } f(\vec{x}_0 + \vec{h}) = f(\vec{x}_0) + \nabla f(\vec{x}_0) \cdot \vec{h} + Hf(\vec{x}_0)(\vec{h}) + o(\|\vec{h}\|), \vec{h} \rightarrow 0$$

(4) Εναλλακτική μορφή Taylor

$$\rightarrow f(x) \approx f(\vec{x}_0) + \nabla f(\vec{x}_0) \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0)$$

$$\rightarrow f(x) \approx f(\vec{x}_0) + \nabla f(\vec{x}_0) \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0) + \frac{1}{2} f''(\vec{x}_0) (\vec{x} - \vec{x}_0)^2$$

π.χ.

$$f(x,y) = (x^2 - y^2) \cdot e^{-(x^2 - y^2)/2}, \quad x, y \in \mathbb{R}^2$$

προσεγγίσεις Taylor 1ης και 2ης τάξης στα σημεία $(0,0)$, $(\sqrt{2}, 0)$

$$\partial f / \partial x = 2xe^{-(x^2 - y^2)/2} - (x^2 - y^2)e^{-(x^2 - y^2)/2} \cdot x = xe^{-(x^2 - y^2)/2} (2 - x^2 + y^2) = e^{-(x^2 - y^2)/2} (2x - x^3 + y^2x)$$

$$\partial f / \partial y = -2ye^{-(x^2 - y^2)/2} - (x^2 - y^2)e^{-(x^2 - y^2)/2} \cdot y = ye^{-(x^2 - y^2)/2} (-2 - x^2 + y^2) = e^{-(x^2 - y^2)/2} (-2y - x^2y + y^3)$$

$$\partial^2 f / \partial x^2 = -xe^{-(x^2 - y^2)/2} (2x - x^3 + y^2x) + e^{-(x^2 - y^2)/2} (2 - 3x^2 + y^2) = e^{-(x^2 - y^2)/2} (-2x^2 + x^4 - y^2x^2 + 2 - 3x^2 + y^2)$$

$$\partial^2 f / \partial y^2 = e^{-(x^2 - y^2)/2} (-2y^2 + y^4 - y^2x^2 + 3y^2 - x^2)$$

$$\partial^2 f / \partial x \partial y = -xe^{-(x^2 - y^2)/2} (-2y - x^2y + y^3) + e^{-(x^2 - y^2)/2} (-2xy) = e^{-(x^2 - y^2)/2} (x^3y - xy^3)$$

$$(\partial f / \partial x)(0,0) = 0 \quad (\partial f / \partial y)(0,0) = 0 \quad (\partial^2 f / \partial x^2)(0,0) = 2$$

$$(\partial^2 f / \partial x \partial y)(0,0) = 0 \quad (\partial^2 f / \partial y^2)(0,0) = -2$$

Άρα στο $(0,0)$: $f(x,y) \approx x^2 - y^2$

Στο $(\sqrt{2}, 0)$: Η προσέγγιση 2ης τάξης είναι $f(x,y) = 2/e - (4/e)(x - \sqrt{2})^2 - (4/e)y^2$

(κοντά στο $(\sqrt{2}, 0)$)

$$f(x,y) \approx f(x_0,y_0) + (\partial f / \partial x)(x_0,y_0) \cdot (x-x_0) + (\partial f / \partial y)(x_0,y_0) \cdot (y-y_0) \\ + (1/2) \cdot (\partial^2 f / \partial x^2)(x_0,y_0) \cdot (x-x_0)^2 + (\partial^2 f / \partial x \partial y)(x_0,y_0) \cdot (x-x_0) \cdot (y-y_0) \\ + (1/2) (\partial^2 f / \partial y^2)(x_0,y_0) \cdot (y-y_0)^2$$

Όσο προχωράς στις τάξεις τόσο πιο καλά προσεγγίζεις τη συνάρτηση σε λίγο πιο μακρινά σημεία

(5) Ορισμός ακροζάτων σε n-μεταβλητές

$$f: \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \vec{x}_0 \in \mathcal{U}, \vec{x}_0 \text{ τοπικό μέγιστο της } f \Leftrightarrow \exists r > 0 : f(\vec{x}_0) \geq f(\vec{x}), \forall \vec{x} : \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < r$$

$$\text{Το } \vec{x}_0 \text{ τοπικό ελάχιστο της } f \Leftrightarrow \exists r > 0 : f(\vec{x}_0) \leq f(\vec{x}), \forall \vec{x} : \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < r$$

$$x_0 \text{ τοπικό ακρότατο της } f \Leftrightarrow \text{τοπικό μέγιστο ή τοπικό ελάχιστο}$$

$$x_0 \text{ κρίσιμο σημείο της } f \Leftrightarrow \text{σημείο μη διαφορισιμότητας ή } \nabla f(x_0) = 0$$

$$\text{Σαγματικό σημείο της } f \Leftrightarrow \text{κρίσιμο αλλά όχι τοπικό ακρότατο}$$

$$\text{Σημεία πιθανού ακροζάτου είναι και τα συνοριακά σημεία}$$

$$\text{Συνθήκες ακροζήτων - 1 μεταβλητή} \quad f: \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \mathcal{C}^2 \rightarrow \text{παντού διαφορίσιμη} \\ \rightarrow \text{ανοικτό (δεν έχει άκρα)}$$

$$x_0 \text{ τοπικό ακρότατο} \Rightarrow f'(x_0) = 0$$

$$x_0 \text{ τοπικό μέγιστο} \Rightarrow f''(x_0) \leq 0 \quad (\text{αν } f'(x_0) = f''(x_0) = 0)$$

$$x_0 \text{ τοπικό ελάχιστο} \Rightarrow f''(x_0) \geq 0 \quad \text{τότε δεν ξέρω και} \rightarrow \text{επόμενες παραμέτρους)}$$

$$\text{με } f'(x_0) = 0, f''(x_0) < 0 \Rightarrow x_0 \text{ τοπικό μέγιστο}$$

$$\text{με } f'(x_0) = 0, f''(x_0) > 0 \Rightarrow x_0 \text{ τοπικό ελάχιστο}$$

$$\text{αντιστροφα δεν ισχύουν (π.χ. } f(x) = x^3 \text{)}$$

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + (f''(x_0) \cdot h^2)/2 + o(h^2) \Rightarrow$$

$$f(x_0+h) \geq f(x_0) + f'(x_0)h + (f''(x_0) \cdot h^2)/2 \text{ και αν } (f''(x_0) \cdot h^2)/2 \geq 0 \Rightarrow f(x_0+h) > f(x_0)$$

$$\geq 0 \Rightarrow f(x_0+h) < f(x_0)$$

Αντίστοιχα σε n - διαστάσεις:

$$f: U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad C^2 \text{ (υ ακοικτό)}$$

$$\vec{x}_0 \text{ τοπικό ακρότατο} \Rightarrow \nabla f(\vec{x}_0) = \vec{0}$$

$$\vec{x}_0 \text{ τοπικό μέγιστο} \Rightarrow Hf(\vec{x}_0)(\vec{h}) \leq 0 \quad \forall \vec{h} \text{ (αρνητικά ημιορισμένη)}$$

$$\vec{x}_0 \text{ τοπικό ελάχιστο} \Rightarrow Hf(\vec{x}_0)(\vec{h}) \geq 0 \quad \forall \vec{h} \text{ (θετικά ημιορισμένη)}$$

$$\vec{x}_0 \text{ με } \nabla f(\vec{x}_0) = 0 \text{ και } Hf(\vec{x}_0)(\vec{h}) < 0 \quad \forall \vec{h} \neq \vec{0} \text{ (αρνητικά ορισμένη)} \Rightarrow \vec{x}_0 \text{ τοπικό μέγιστο}$$

$$\vec{x}_0 \text{ με } \nabla f(\vec{x}_0) = 0 \text{ και } Hf(\vec{x}_0)(\vec{h}) > 0 \quad \forall \vec{h} \neq \vec{0} \text{ (θετικά ορισμένη)} \Rightarrow \vec{x}_0 \text{ τοπικό ελάχιστο}$$

Απόδειξη της αναγκαίας συνθήκης ακροτάτων της τάξης

$$\vec{x}_0 \text{ τοπικό ακρότατο} \Rightarrow \nabla f(\vec{x}_0) = \vec{0} \text{ (}\vec{x}_0 \text{ εσωτερικό)}$$

$$\text{έστω } \vec{x}_0 \text{ τοπικό μέγιστο, τότε } \exists r > 0: f(\vec{x}_0) \geq f(\vec{x}) \quad \forall \vec{x}: \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < r$$

$$\text{τότε έστω } g(t) = f(\vec{x}_0 + t\vec{h}), \quad t \in [-r, r], \quad \|\vec{h}\| = 1$$

$$\text{θα έχω τοπικό μέγιστο της } g \text{ στο } 0, \text{ άρα, } g'(0) = 0 \Rightarrow \nabla f(\vec{x}_0) \cdot \vec{h} = 0$$

$$\text{Έχω ότι } \forall \vec{h} \text{ με } \|\vec{h}\| = 1 \text{ ισχύει όποτε και για } \vec{h} = (\nabla f(\vec{x}_0)) / \|\nabla f(\vec{x}_0)\|$$

$$\text{έχω } \nabla f(\vec{x}_0) \cdot [(\nabla f(\vec{x}_0))^T / \|\nabla f(\vec{x}_0)\|] = \|\nabla f(\vec{x}_0)\| = 0 \Rightarrow \nabla f(\vec{x}_0) = \vec{0}.$$