

Mon 3 Apr

Εύρεση Ακροζάτων στις πολλές μεταβλητές

(1) Σύνοψη

$\mathcal{U}$ ανοικτό, c^2

$f: \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\vec{x}_0 \in \mathcal{U}$

$\vec{x}_0$ τοπικό ακρότατο $\Rightarrow \nabla f(\vec{x}_0) = 0$

$\vec{x}_0$ με $\nabla f(\vec{x}_0) = 0$, $Hf(\vec{x}_0)(\vec{h})$ θετικά ορισμένη $\Rightarrow \vec{x}_0$ τοπικό ελάχιστο

$\vec{x}_0$ με $\nabla f(\vec{x}_0) = 0$, $Hf(\vec{x}_0)(\vec{h})$ αρνητικά ορισμένη $\Rightarrow \vec{x}_0$ τοπικό μέγιστο

$\vec{x}_0$ με $\nabla f(\vec{x}_0) = 0$, $Hf(\vec{x}_0)(\vec{h})$ μη ορισμένη $\Rightarrow \vec{x}_0$ σαγματικό σημείο

Όπου $Hf(\vec{x}_0)$ μη ορισμένη $\Rightarrow \exists h_1, h_2$ ώστε $Hf(\vec{x}_0)(\vec{h}_1) > 0$

$$Hf(\vec{x}_0)(\vec{h}_2) < 0$$

(2) Κριτήρια θετικά / αρνητικά / μη ορισμένων συναρτήσεων

Έστω $H: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

με $H(h) = (1/2) \cdot h^T \cdot B \cdot h$

όπου

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\Theta \acute{\epsilon}\tau\omega \quad B_k = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1k} \\ b_{k1} & \dots & b_{kk} \end{pmatrix} \quad k=1,2,\dots,n$$

[1] Αν $\det(B_k) > 0 \quad \forall k=1,2,\dots,n \Rightarrow$ Η θετικά ορισμένη

[2] Αν $\det(B_k)$ είναι εναλλάξ $-, +, -, + \Rightarrow$ Η αρνητικά ορισμένη

[3] Αν δεν ισχύει κάτι από τα παραπάνω, και $\det B \neq 0 \Rightarrow$ Η μη ορισμένη

Για $n = 2$

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \quad \text{Το κριτήριο γίνεται}$$

[1] Αν $a > 0, ad - b^2 > 0$ τότε Η θετικά ορισμένη

[2] Αν $a < 0, ad - b^2 > 0$ τότε Η αρνητικά ορισμένη

[3] Αν $ad - b^2 < 0$ τότε Η μη ορισμένη

(3) Παράδειγμα!

$$\left. \begin{array}{l} f(x,y) = x^2 + y^2 \\ \partial f / \partial x = 2x = 0 \\ \partial f / \partial y = 2y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow (x,y) = (0,0) \text{ μοναδικό κρίσιμο}$$

$$\det(B_1) = 2 > 0$$

Άρα $Hf(0,0)$ θετικά ορισμένη

$$\det(B_2) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0$$

Άρα $(0,0)$ τοπικό ελάχιστο

(4) Παράδειγμα 2

$$f(x,y) = x^2 - y^2$$

$$\partial f / \partial x = 2x = 0, \partial f / \partial y = -2y = 0 \Rightarrow (x,y) = (0,0) \text{ μοναδικό κρίσιμο}$$

$$\begin{pmatrix} \partial^2 f / \partial x^2 & \partial^2 f / \partial x \partial y \\ \partial^2 f / \partial x \partial y & \partial^2 f / \partial y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Εδώ } \det(B_1) = 2 > 0$$

Άρα το $(0,0)$ σαγματικό σημείο

$$\det(B_2) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -4 < 0$$

(5) Παράδειγμα 3

$$f(x,y) = x^2 y + x y^2$$

$$\left. \begin{aligned} \partial f / \partial x &= 2xy + y^2 = 0 \\ \partial f / \partial y &= x^2 + 2xy = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow (x,y) = (0,0) \text{ μοναδικό κρίσιμο}$$

$$\begin{pmatrix} \partial^2 f / \partial x^2 & \partial^2 f / \partial x \partial y \\ \partial^2 f / \partial x \partial y & \partial^2 f / \partial y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y & 2x + 2y \\ 2x + 2y & 2x \end{pmatrix} \Bigg|_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Εδώ $\det(B_1) = 0$
 $\det(B_2) = 0$
Δεν βγαίνει συμπέρασμα
 $(x,y) = (0,0)$

Εδώ παρατηρούμε ότι $f(x,x) = 2x^3$

Άρα $\forall r > 0$ έχω ότι υπάρχουν σημεία κοντά στο $(0,0)$ (το πρώτο σε απόσταση r) ώστε η f να παίρνει και $+$ και $-$ τιμές

Άρα το $(0,0)$ είναι σχηματικό σημείο

(6) Παράδειγμα 4

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x,y) = (x^2 - y^2) e^{(-x^2 - y^2)/2}$$

$$\partial f / \partial x = x e^{(-x^2 - y^2)/2} (2 - x^2 + y^2)$$

$$\partial f / \partial y = y e^{(-x^2 - y^2)/2} (-2 - x^2 + y^2)$$

$$\partial^2 f / \partial x^2 = (2 - 5x^2 + x^4 - x^2 y^2 + y^2) e^{(-x^2 - y^2)/2}$$

$$\partial^2 f / \partial x \partial y = (x^3 y - x y^3) e^{(-x^2 - y^2)/2}$$

$$\partial^2 f / \partial y^2 = (-2 + 5y^2 + y^2 x^2 - y^4 - x^2) e^{(-x^2 - y^2)/2}$$

Τα κρίσιμα σημεία είναι λύσεις των $\partial f / \partial x = \partial f / \partial y = 0$

$$\left. \begin{array}{l} x(2 - x^2 + y^2) = 0 \\ y(-2 - x^2 + y^2) = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow (x,y) = (0,0) \text{ ή } (0,\sqrt{2}) \text{ ή } (0,-\sqrt{2}) \text{ ή } (\sqrt{2},0) \text{ ή } (-\sqrt{2},0)$$

Σημείο	$\partial^2 f / \partial x^2$	$\partial^2 f / \partial x \partial y$	$\partial^2 f / \partial y^2$	$[\partial^2 f / \partial x^2 \cdot \partial^2 f / \partial x \partial y \cdot \partial^2 f / \partial y^2]$
(0,0)	2	0	-2	-4 σαγματικό σημείο
($\sqrt{2}, 0$)	$-4/e$	0	$-4/e$	$16/e^2$ τοπικό μέγιστο
($-\sqrt{2}, 0$)	$-4/e$	0	$-4/e$	$16/e^2$ τοπικό μέγιστο
(0, $\sqrt{2}$)	$4/e$	0	$-4/e$	$16/e^2$ τοπικό ελάχιστο
(0, $-\sqrt{2}$)	$4/e$	0	$4/e$	$16/e^2$ τοπικό ελάχιστο

Ολικά Μέγιστα και Ελάχιστα

(1) Ορισμοί

$$f: D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\vec{x}_0 \text{ μέγιστο} \Leftrightarrow \forall \vec{x} \in D: f(\vec{x}) \leq f(\vec{x}_0)$$

$$\vec{x}_0 \text{ ελάχιστο} \Leftrightarrow \forall \vec{x} \in D: f(\vec{x}) \geq f(\vec{x}_0)$$

(2) Εύρεση μέγιστων / ελαχίστων - Τρόπος εργασίας

[1] Απόδειξη ύπαρξης μέγιστων / ελαχίστων της $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

(συνήθως D κλειστό & φραγμένο, και f συνεχής)

[2] Ψάχνω πιθανά βέλτιστα της f στο εσωτερικό του D

δηλαδή σημεία $\vec{x}$ με $\nabla f(\vec{x}) = 0$

[3] Ψάχνω πιθανά βέλτιστα σημεία της f πάνω στο σύνορο

του D (Γενικά παραμετροποιώ το σύνορο ∂D π.χ. αν $n = 2$ τότε το ∂D είναι καμπύλη, την οποία παραμετροποιώ και βρίσκω κρίσιμα σημεία)

[4] Υπολογίζω την f σε όλα τα σημεία των [2] και [3] και βρίσκω τα σημεία ολικού μέγιστου και ελάχιστου

