

Thu 6 Apr

Ολικά ελάχιστα και μέγιστα

(1) Διαδικασία εύρεσης

$$f: D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad C', \quad D = \overset{\text{ανοιχτό}}{\cup} \overset{\text{σύνορο}}{\partial} U$$

[1] Απόδειξη ύπαρξης ολικών ακροτάδων

[2] Εύρεση κρίσιμων σημείων στην f στο U

[3] Εύρεση κρίσιμων σημείων της f στο ∂U (παραμετροποίηση)

[4] Υπολογισμός της f στα κρίσιμα σημεία

(2) Θεώρημα Weierstrass

$f: D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής

D συμπαγές (κλειστό και φραγμένο)

$\Rightarrow$ Η f έχει ολικό μέγιστο και ολικό ελάχιστο στο D

(3) Έλεγχος κλειστότητας D

Αν το D ορίζεται μέσω συνεχών συναρτήσεων και $=$ ή $\geq$ ή $\leq$, τότε είναι κλειστό.

π.χ. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \geq 1, x^2 + 3y^2 = 100\}$

(4) Πόρισμα

$f: D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής

D κλειστό

Αν $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ τότε η f παίρνει ελάχιστο στο D .

Αν $\lim_{\|\vec{x}\| \rightarrow \infty} f(\vec{x}) = -\infty$ τότε η f παίρνει μέγιστο στο D .

Αιτιολόγηση:

Έστω $\lim_{\|\vec{x}\| \rightarrow \infty} f(\vec{x}) = \infty$, $f(\vec{x}_0) = M$. Τότε, εφαρμόζοντας τον ορισμό του ορίου για $\|\vec{x}\| \rightarrow \infty$ έχω ότι $\exists r > 0$ ώστε $\forall \vec{x}$ με $\|\vec{x} - \vec{x}_0\| > r$ να είναι $f(\vec{x}) > M$.

Οπότε:

Έξω από τον δίσκο με κέντρο $\vec{x}_0$ και ακτίνα r , η f παίρνει τιμές $> M$. Μέσα στο δίσκο παίρνει την τιμή M στο $\vec{x}_0$.

Τέλος,

Από Θ. Weierstrauss η f έχει ελάχιστη τιμή στο $\{\vec{x}: \|\vec{x} - \vec{x}_0\| \leq r, \vec{x} \in D\}$ που θα είναι $\leq M$ οπότε είναι η ελάχιστη τιμή της f σε όλο το D .

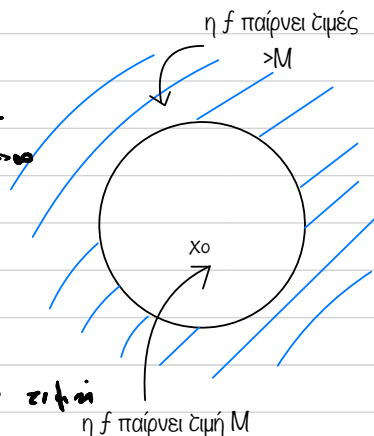
$f(\vec{x}_0)$

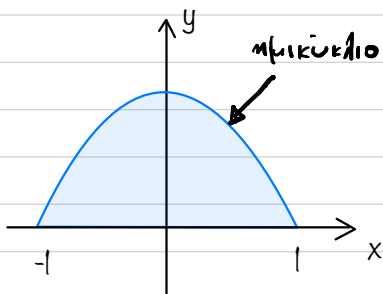
Προσοχή! Δεν είναι όλα τα κλειστά φραγμένα π.χ στο $\mathbb{R}^2$ $\{(x,y): x \geq 0, y \geq 0\}$ } κλειστά αλλά $\{(x,y): y \geq (1/x)\}$ } όχι φραγμένα

(5) Παράδειγμα

Να βρείτε ολικό μέγιστο/ελάχιστο της

$f(x,y) = 16x^2 - 24xy + 40y^2$ στο $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$





[1] f Πολυώνυμο $\Rightarrow f$ συνεχής

ημικύκλιο

$D \subseteq \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x, y)\| \leq 1\}$ φραγμένο

D ορίζεται μέσω των συνεχών συναρτήσεων

$g_1(x, y) = x^2 + y^2$, $g_2(x, y) = y$ και

$\leq, \geq$, άρα είναι κλειστό

Άρα από Θ. Weierstrauss $\exists$ ολικό ελάχιστο και μέγιστο της f στο D .

[2] Κρίσιμα σημεία στο εσωτερικό του D

$$\partial f / \partial x = 32x - 24y = 0$$

$$\partial f / \partial y = -24x + 80y = 0$$

$\Rightarrow (x, y) = (0, 0) \notin$ εσωτερικό του $D \Rightarrow$ Όχι κρίσιμα σημεία στο εσωτερικό του D .

[3] Εύρεση κρίσιμων σημείων στο σύνορο του D

Δύο μέρη:

$$D_1 = \{t, 0\} : t \in [-1, 1]\}$$

$$D_2 = \{(\cos t, \sin t) : t \in [0, \pi]\}$$

Στο D_1 έχουμε:

$$g(t) = f(t, 0) = 16t^2, t \in [-1, 1]$$

Κρίσιμα σημεία είναι για $t = -1, 0, 1$ οπότε τα κρίσιμα σημεία της f στο D_1

είναι $(-1, 0), (0, 0), (1, 0)$

Στο D_2 έχουμε $g_2(t) = f(\cos t, \sin t) = 16\cos^2 t - 24\cos t \sin t + 40\sin^2 t$,

$t \in [0, \pi]$

$$\text{Έχω } g_2'(t) = -32\cos t \sin t + 24\sin^2 t - 24\cos^2 t + 80\sin t \cos t = 0 \Leftrightarrow$$

$$2t = \pi/4 \text{ ή } 5\pi/4 \Leftrightarrow t = \pi/8 \text{ ή } 5\pi/8 \text{ (} 2t \in [0, 2\pi] \text{)} \quad 48\sin t \cos t - 24(\cos^2 t - \sin^2 t) = 0 \Leftrightarrow$$

Οπότε τα κρίσιμα σημεία της f στο D_2 είναι

$(-1, 0), (1, 0), (\cos(\pi/8), \sin(\pi/8)), (\cos(5\pi/8), \sin(5\pi/8))$.

$$24\sin 2t - 24\cos 2t = 0 \Leftrightarrow$$

$$24(\sin 2t - \cos 2t) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\sin 2t - \cos 2t = 0 \Leftrightarrow$$

$$\tan 2t = 1 \Leftrightarrow$$

$$[4] f(-1,0) = 16$$

$$f(1,0) = 16$$

$$f(0,0) = 0 \leftarrow \text{ελάχιστο}$$

$$f(\cos(\pi/8), \sin(\pi/8)) \approx 11$$

$$f(\cos(5\pi/8), \sin(5\pi/8)) \approx 45 \leftarrow \text{Μέγιστο.}$$

(6) Ακρόατα υπό περιορισμούς - Η μέθοδος Lagrange

Έστω ότι έχουμε το πρόβλημα $\max$ ή $\min f(x_1, x_2, \dots, x_n) (C')$

υπό τους περιορισμούς

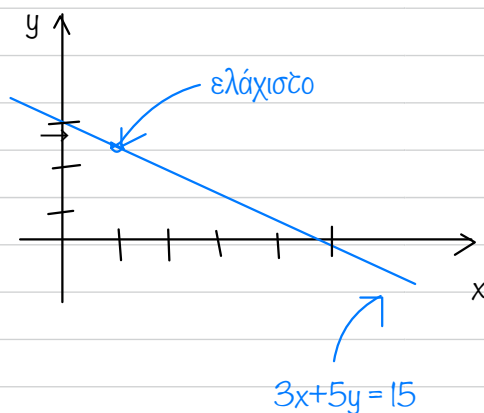
$$g_1(x_1, \dots, x_n) = c_1$$

$$g_2(x_1, \dots, x_n) = c_2$$

...

$$g_k(x_1, \dots, x_n) = c_k$$

$$\text{π.χ. } \min x^2 + y^2 \text{ υπό } 3x + 5y = 15$$



(7) Θεώρημα Lagrange για 1 περιορισμό

$$f: D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad C^1$$

$$\text{και } D = \{\vec{x}: g(\vec{x}) = c\}, \quad g \in C^1$$

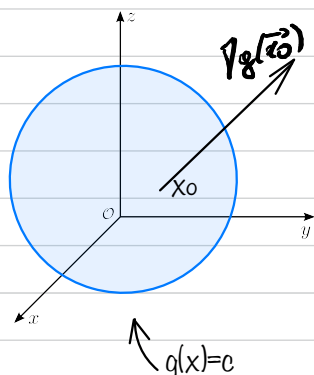
$\vec{x}_0$ τοπικό ακρόατο της f πάνω στο D και $\nabla g(\vec{x}_0) \neq 0$

(κανονικό) σημείο του D

$$\text{Τότε } \exists \lambda: \nabla f(\vec{x}_0) = \lambda \nabla g(\vec{x}_0)$$

Απόδειξη:

Γνωρίζουμε ότι αν $\nabla g(\vec{x}_0) \neq 0$ τότε $\nabla g(\vec{x}_0)$ είναι κάθετο διάνυσμα στο εφαπτόμενο επίπεδο του γραφήματος της g στο $\vec{x}_0$ (η κλίση μιας συνάρτησης σε ένα σημείο είναι κάθετη στην ισοβαθμική της σε αυτό το σημείο).



Έστω μια καμπύλη της επιφάνειας που διέρχεται από το $\vec{x}_0$, π.χ. $\vec{c}(t)$, $t \in I$, $\vec{c}(0) = \vec{x}_0$

$$\begin{aligned} \text{Η } f(\vec{c}(t)) \text{ έχει τοπικό ακρότατο στο } t=0, \text{ άρα } \left. \frac{\partial}{\partial t}(f(\vec{c}(t))) \right|_{t=0} &= 0 \\ &= \nabla f(\vec{c}(0)) \cdot \vec{c}'(0) = 0 \end{aligned}$$

Άρα $\nabla f(\vec{x}_0)$ είναι κάθετο στο εφαπτόμενο διάνυσμα της καμπύλης, και αυτό για κάθε καμπύλη. Άρα $\nabla f(\vec{x}_0)$ και $\nabla g(\vec{x}_0)$ είναι κάθετα στο επίπεδο $\Rightarrow$ συγγραμμικά $\Rightarrow$
 $\exists \lambda: \nabla f(\vec{x}_0) = \lambda \nabla g(\vec{x}_0).$

(8) Παράδειγμα

$$\min x^2 + y^2 \} f(x,y) \quad \text{Υπό } \underbrace{3x+5y=15}_{g(x,y)}$$

$$\nabla g(x,y) = (3,5)$$

$$\nabla f(x,y) = (2x, 2y)$$

Οπότε έχω το σύστημα:

$$\left. \begin{aligned} \nabla f(x,y) &= \lambda \nabla g(x,y) \Rightarrow \begin{cases} 2x = 3\lambda \\ 2y = 5\lambda \end{cases} \\ g(x,y) &= 0 \Rightarrow 3x + 5y = 15 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} x &= (3/2)\lambda \\ y &= (5/2)\lambda \\ (9/2)\lambda + (25/2)\lambda &= 15 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (34/2)\lambda = 45 \Rightarrow \lambda = 15/17$$

Άρα το $(x,y) = (45/34, 75/34)$ είναι κρίσιμο σημείο (πιθανό ακρότατο της f στο D).

(9) Η συνάρτηση Lagrange για 1 περιορισμό

Έστω το πρόβλημα $\max$ ή $\min f(\vec{x})$ υπό $g(\vec{x}) = c$

$$H h(\vec{x}, \lambda) = f(\vec{x}) - \lambda(g(\vec{x}) - c)$$

λέγετε **συνάρτηση Lagrange του προβλήματος**

Η συνθήκη $\nabla h(x, \lambda) = 0$ **δίνει:**

$$\partial f / \partial x_i - \lambda \cdot (\partial g / \partial x_i) = 0, i = 1, 2, \dots, n$$

$$g(x) - c = 0$$

Άρα τα κρίσιμα σημεία της h είναι ακριβώς τα σημεία που πρέπει να γίνει έλεγχος ακροτάτων.

(10) Η συνάρτηση Lagrange για n περιορισμούς

Έστω το πρόβλημα

$$\max \text{ ή } \min f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$\text{υπό } g_1(x_1, \dots, x_n) = c_1$$

$$g_2(x_1, \dots, x_n) = c_2$$

...

$$g_k(x_1, \dots, x_n) = c_k$$

Ορίζω την ~~συνάρτηση~~ Lagrange

$$h(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k) \\ = f(x_1, x_2, \dots, x_n) - \lambda_1(g_1(x_1, \dots, x_n) - c_1) - \lambda_2(g_2(x_1, \dots, x_n) - c_2) - \dots - \lambda_k(g_k(x_1, \dots, x_n) - c_k)$$

Τα ακρότατα της f υπό τους περιορισμούς είναι μεταξύ των x : $\nabla h(x) = 0$

(II) Παράδειγμα I

$$\min \text{ ή } \max f(x, y, z) = x + y + z \text{ υπό } g_1(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2 = 0 \\ g_2(x, y, z) = x + z - 1 = 0$$

Λύση:

$$\text{Από τους περιορισμούς } x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \\ y \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \\ z \in [1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}]$$

Το σύνολο D φραγμένο, κλειστό, f συνεχής

Από Θ. Weierstrass $\exists$ ολικό μέγιστο και ελάχιστο

Εδώ η ~~συνάρτ.~~ Lagrange είναι

$$h(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = x + y + z - \lambda_1(x^2 + y^2 - 2) - \lambda_2(x + z - 1)$$

Τα κρίσιμα σημεία $\nabla h(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = 0$ δίνουν

$$1 - 2\lambda_1 x - \lambda_2 = 0 \quad (1)$$

$$1 - 2\lambda_1 y = 0 \quad (2)$$

$$1 - \lambda_2 = 0 \quad (3)$$

$$x^2 + y^2 = 2 \quad (4)$$

$$x + z = 1 \quad (5)$$

$$(3) \Rightarrow \lambda_2 = 1$$

$$(2) \Rightarrow \lambda_1 \neq 0, y = 1/2\lambda_1$$

$$(1) \Rightarrow \lambda_2 = 1, \lambda_1 = (1/2y) = \pm 1/(2\sqrt{2}), \kappa = 0$$

$$\text{οπότε } y = \pm\sqrt{2}.$$

Άρα τα ακρότατα βρίσκονται σε κάποια από τα $(0, \sqrt{2}, 1)$ με

$$f(0, \sqrt{2}, 1) = \sqrt{2} + 1 \leftarrow \text{Μέγιστο} \quad \text{και} \quad (0, -\sqrt{2}, 1)$$

$$(0, -\sqrt{2}, 1) \text{ με } f(0, -\sqrt{2}, 1) = -\sqrt{2} + 1 \leftarrow \text{ελάχιστο}$$

(12) Παράδειγμα 2

$$\min \text{ ή } \max f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - x + y \text{ υπό } x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$$

Λύση:

Από Θ. Weierstrauss $\exists$ μέγιστο και ελάχιστο της f στο D .

Κρίσιμα σημεία στο $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$

$$\nabla f(x, y, z) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 1 = 0 \\ 2y + 1 = 0 \\ 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow (x, y, z) = (1/2, -1/2, 0)$$

Κρίσιμα σημεία στο $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$

$$\nabla h(x, y, z, \lambda) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x(1-\lambda) = 1 \\ 2y(1-\lambda) = -1 \\ 2z(1-\lambda) = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow 1/(4(\lambda-1)^2) + 1/(4(\lambda-1)^2) = 1 \Leftrightarrow 2 = 4(\lambda-1)^2 \Rightarrow$$

$$(\lambda-1)^2 = 1/2 \Rightarrow \lambda-1 = \pm\sqrt{2}/2$$

$\lambda \neq 1$ (αν ήσαν 1 τότε $O = I$ αδύνατο)

$$(x, y, z) = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0) \text{ ή } (x, y, z) = (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$$

Επίσης:

Οπότε τα κρίσιμα σημεία είναι τα:

$$(x, y, z) = (1/2, -1/2, 0) \rightarrow f(1/2, -1/2, 0) = -1/2 \text{ (ελάχιστο)}$$

$$(x, y, z) = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0) \rightarrow f(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0) = 1 - \sqrt{2}$$

$$(x, y, z) = (-1/\sqrt{2}, 1/2, 0) \rightarrow f(-1/\sqrt{2}, 1/2, 0) = 1 + \sqrt{2} \text{ (μέγιστο)}$$