Διπλό ολοκλήρωμα επί ορθογωνίου

① Ορισμός διπλού ολοκληρώματος επί ορθογωνίου

$R = [a,b] \times [c,d] \subseteq \mathbb{R}^2$ ορθογώνιο.

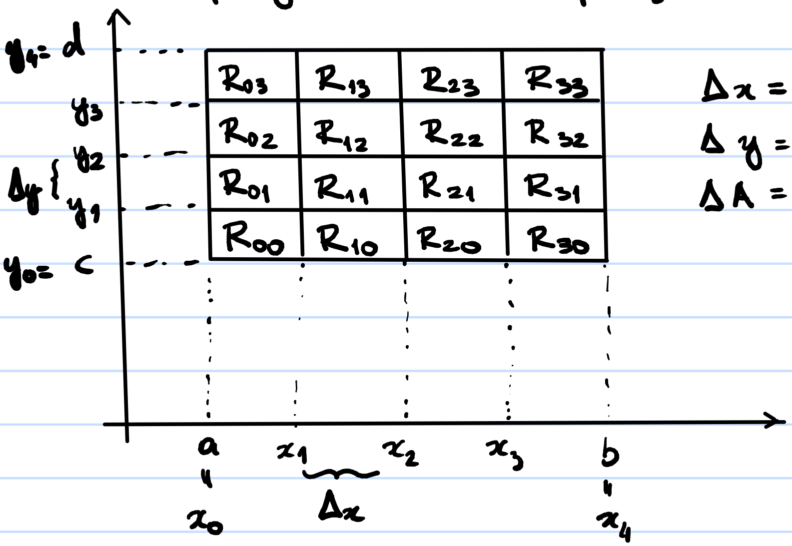
Κανονική διαμέριση τάξης n του R:

$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ ισαπέχοντα

$c = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = d$ ισαπέχοντα

$R_{jk} = [x_j, x_{j+1}] \times [y_k, y_{k+1}]$, $\quad j = 0, 1, \ldots, n-1$
$\quad k = 0, 1, \ldots, n-1$

: n^2 ορθογώνια που σχηματίζουν το R



$\Delta x = x_{j+1} - x_j = \dfrac{b-a}{n}$

$\Delta y = y_{k+1} - y_k = \dfrac{d-c}{n}$

$\Delta A = \Delta x \cdot \Delta y$

$\vec{c}_{jk} \in R_{jk}$ τυχαίο σημείο του R_{jk}.

$f : R \to \mathbb{R}$

$$S_n = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} f(\vec{c}_{jk}) \Delta x \Delta y$$: Άθροισμα Riemann της f

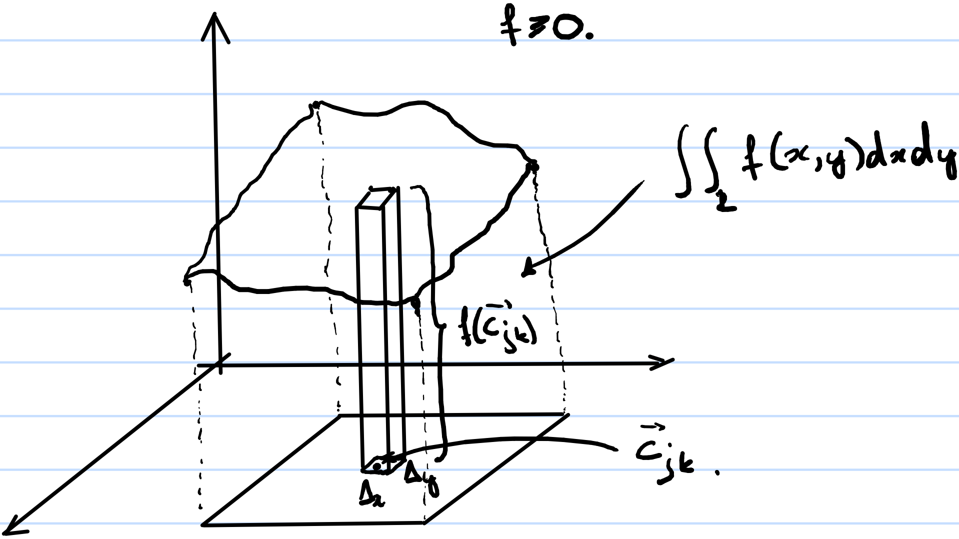
Ορισμός: f ολοκληρώσιμη επί του R αν υπάρχει το όριο $S = \lim_{n\to\infty} S_n$ και είναι ανεξάρτητο

από την επιλογή των σημείων $\vec{c}_{jk}$.
Τότε το όριο S λέγεται το ολοκλήρωμα της f επί του R:

$$S = \iint_R f(x,y)\,dA = \iint_R f(x,y)\,dx\,dy$$
$$= \iint_R f(x,y)\,dy\,dx.$$

2 Διαισθητική έννοια

$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy =$ Όγκος μεταξύ του ορθογωνίου R και του γραφήματος της f, αν $f \geq 0$.



Αν f δεν έχει σταθερό πρόσημο τότε το ολοκλήρωμα είναι προσημασμένος όγκος (όπως στη 1 μεταβλητή).

③ Ολοκληρωσιμότητα φραγμένων, σχεδόν παντού συνεχών συναρτήσεων

Θεώρημα:

Έστω

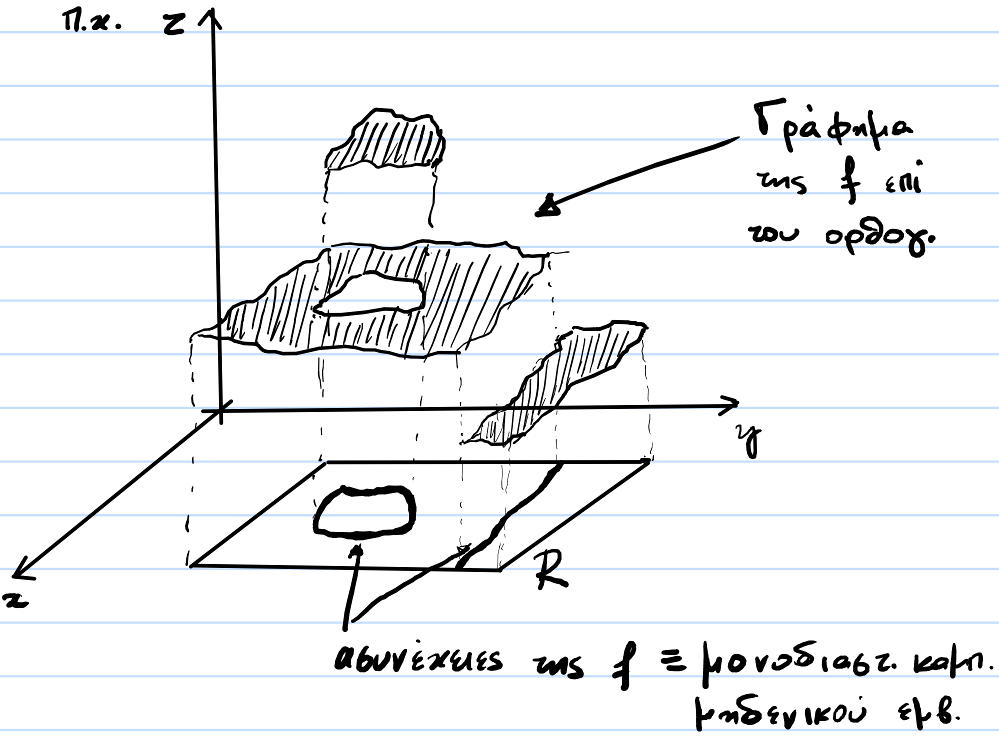
$f : R = [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$

φραγμένη,

σχεδόν-παντού συνεχής (δηλαδή το σύνολο των σημείων ασυνέχειας της f έχει μηδενικό εμβαδό, π.χ. είναι κενό ή μια πεπερασμένη ένωση γραφημάτων συνεχών συναρτήσεων).

Τότε:

f ολοκληρώσιμη.



④ Θεώρημα Fubini

Αν $f: R=[a,b]\times[c,d] \to \mathbb{R}$ φραγμένη και σχεδόν-παντού συνεχής.
Το διπλό ολοκλήρωμα της f μπορεί να υπολογιστεί ως διαδοχικά απλά ολοκληρώματα, δηλ.

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy$$
$$= \int_a^b \underbrace{\int_c^d f(x,y)\,dy}_{F_X(x)}\,dx$$
$$= \int_c^d \underbrace{\int_a^b f(x,y)\,dx}_{F_Y(y)}\,dy$$

⑤ Παράδειγμα 1

Βρείτε τον όγκο V μεταξύ του ορθογωνίου $R=[0,1]\times[0,\pi]$ και της επιφάνειας $z=y\sin(xy)+1$.
Είναι

$$V = \int_0^\pi \int_0^1 (y\sin(xy)+1)\,dx\,dy$$
$$= \int_0^\pi \Big[-\cos(xy)+x\Big]_{x=0}^{1}\,dy$$
$$= \int_0^\pi (-\cos y + 1 + \cos 0 - 0)\,dy$$

$$= \int_0^\pi (-\cos y + 2)\, dy = \left[-\sin y + 2y\right]_{y=0}^{\pi}$$

$$= -\sin\pi + 2\pi + \sin 0 - 0 = 2\pi.$$

Θα μπορούσε θεωρητικά να υπολογιστεί και ως

$$V = \int_0^1 \int_0^\pi (y\sin(xy) + 1)\, dy\, dx$$

αλλά είναι πολύ δυσκολότερο.

⑥ <u>Παράδειγμα 2</u>

$$\iint_{[0,1]\times[0,1]} x \ln(1+xy)\, dx\, dy = ;$$

Είναι

$$\iint_{[0,1]\times[0,1]} x \ln(1+xy)\, dx dy$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 x\ln(1+xy)\, dy\, dx \qquad \begin{array}{l} t = 1+xy \\ dt = x\, dy \end{array}$$

$$= \int_0^1 \int_{1+x\cdot 0}^{1+x\cdot 1} \ln t\, dt\, dx$$

$$= \int_0^1 \int_1^{1+x} \ln t\, dt\, dx \qquad \int \ln t = t\ln t - t + c$$

$$= \int_0^1 \left[t\ln t - t\right]_{t=1}^{1+x} dx$$

$$= \int_0^1 \left[(1+x)\ln(1+x) - (1+x) - 1\ln 1 + 1\right] dx$$

$$= \int_0^1 \left[(1+x)\ln(1+x) - x\right] dx \qquad \begin{array}{l} u = 1+x \\ du = dx \end{array}$$

$$= \int_1^2 (u\ln u - u + 1)\,du$$

Αλλά

$$\int u\ln u\,du = \int \left(\frac{u^2}{2}\right)' \ln u\,du = \frac{u^2\ln u}{2} - \int \frac{u^2}{2}(\ln u)'\,du$$

$$= \frac{u^2\ln u}{2} - \int \frac{u^{\cancel{2}}}{2}\cdot\frac{1}{\cancel{u}}\,du = \frac{u^2\ln u}{2} - \frac{u^2}{4}$$

Άρα

$$\iint_{[0,1]\times[0,1]} x\ln(1+xy)\,dx\,dy$$

$$= \left[\frac{u^2\ln u}{2} - \frac{u^2}{4} - \frac{u^2}{2} + u\right]_{u=1}^{2}$$

$$= \frac{4\ln 2}{2} - \frac{4}{4} - \frac{4}{2} + 2 - \cancel{\frac{\ln 1}{2}}^{\,0} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - 1$$

$$= 2\ln 2 - \frac{5}{4}.$$

(*) Παράδειγμα 3

$$\iint_{[0,1]\times[0,2]} (x^2+y)\,dx\,dy.$$

Είναι

$$\iint_{[0,1]\times[0,2]} (x^2+y)\,dx\,dy$$

$$= \int_0^1 \int_0^2 (x^2+y)\,dy\,dx$$

$$= \int_0^1 \left[x^2 y + \frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{2} dx$$

$$= \int_0^1 (2x^2+2)\,dx$$

$$= \left[\frac{2x^3}{3} + 2x\right]_{x=0}^{1}$$

$$= \frac{2}{3} + 2 = \frac{8}{3}.$$

Εναλλακτικά:

$$\iint_{[0,1]\times[0,2]} (x^2+y)\,dx\,dy$$

$$= \int_0^2 \int_0^1 (x^2+y)\,dx\,dy$$

$$= \int_0^2 \left[\frac{x^3}{3} + yx\right]_{x=0}^{1} dy$$

$$= \int_0^2 \left(\frac{1}{3}+y\right) dy$$

$$= \left[\frac{y}{3} + \frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{2}$$

$$= \frac{2}{3} + \frac{4}{2} = \frac{8}{3}.$$

Στις περισσότερες περιπτώσεις, μόνο η μία σειρά διαδοχικής ολοκλήρωσης δίνει εύκολα το αποτέλεσμα.