Διπλό ολοκλήρωμα επί γενικότερων χωρίων

1 y-απλά και x-απλά χωρία στο επίπεδο

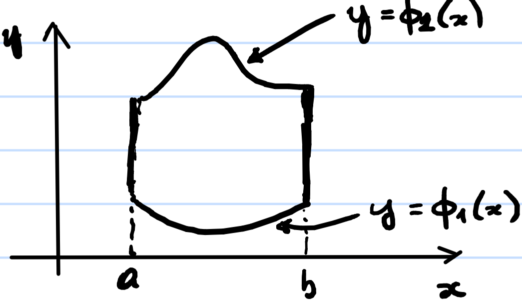
Ορισμός

Ένα χωρίο του επιπέδου D λέγεται y-απλό αν γράφεται ως

$$D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b \quad \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x) \},$$

όπου $\phi_1, \phi_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτ. με $\phi_1(x) \leq \phi_2(x)$ για $x \in [a,b]$.

π.χ.



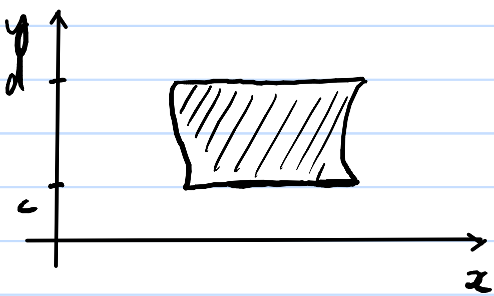
Ομοίως:

D y-απλό αν γράφεται ως

$$D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d \ , \ \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y) \}$$

όπου $\psi_1, \psi_2 : [c,d] \to \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις με $\psi_1(y) \leq \psi_2(y)$ για $y \in [c,d]$

π.χ.



Απλό χωρίο = y-απλό και x-απλό.
Στοιχ. χωρίο = y-απλό ή x-απλό.

② Παράδειγμα

Ένας κλειστός δίσκος είναι απλό χωρίο.
Π.χ. ο $x^2+y^2=c^2$
γράφεται ως
$$\{(x,y): -c \le x \le c,\ -\sqrt{c^2-x^2} \le y \le \sqrt{c^2-x^2}\}$$
$$= \{(x,y): -c \le y \le c,\ -\sqrt{c^2-y^2} \le x \le \sqrt{c^2-y^2}\}.$$

③ Διπλό ολοκλήρωμα επί στοιχειώδους χωρίου

Ορισμός:
Έστω D στοιχειώδες χωρίο του $\mathbb{R}^2$, $f: D \to \mathbb{R}$, φραγμένη και σχεδόν-παντού συνεχής.
Θεωρούμε ορθογώνιο $R \supseteq D$ και ορίζουμε
$f^*: R \to \mathbb{R}$
με
$$f^*(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & \text{αν } (x,y) \in D \\ 0, & \text{αν } (x,y) \in R \setminus D. \end{cases}$$
Το ολοκλήρωμα της f επί του D ορίζεται ως το ολοκλ. της f^* επί του R (καθώς η f^* είναι φραγμ. & σχεδόν-συνεχής επί του R):
$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_R f^*(x,y)\,dx\,dy.$$

④ Επέκταση του Θ. Fubini για στοιχ. χωρία.

· Έστω $f: D \subseteq \mathbb{R}^2$ στοιχ. χωρίο $\to \mathbb{R}$ φραγμένη και σχεδόν-παντού συνεχής.

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b,\ \phi_1(x) \le y \le \phi_2(x)\}$, αν D y-απλό

ή $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : c \le y \le d,\ \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y)\}$, αν D x-απλό

Το διπλό ολοκλήρωμα της f μπορεί να υπολογιστεί ως διαδοχικά απλά ολοκληρώματα, δηλ.

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy$$

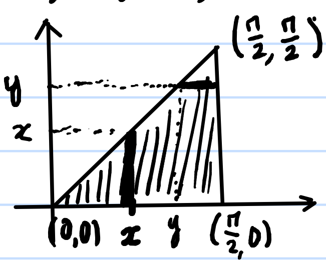
$$= \int_a^b \underbrace{\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)\,dy}_{F_X(x)}\ dx, \text{ αν } D \text{ y-απλό}$$

$$\text{ή } \int_c^d \underbrace{\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx}_{F_Y(y)}\ dy, \text{ αν } D \text{ x-απλό}$$

⑤ Παράδειγμα 1

$$I = \iint_D (x^3 y + \cos x)\,dx\,dy$$

όπου D το τρίγωνο με κορυφές $(0,0)$, $(\frac{\pi}{2},0)$, $(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$.



Παραμετροπ. ως y-χωρίο:
$\{(x,y) : 0 \le x \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le y \le x\}$

Παραμετροπ. ως x-χωρίο:
$\{(x,y) : 0 \le y \le \frac{\pi}{2},\ y \le x \le \frac{\pi}{2}\}$

Επομένως, ο υπολογισμός ως y-χωρίο είναι

$$I = \int_0^{\pi/2} \int_0^{x} (x^3 y + \cos x)\, dy\, dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left[x^3 \frac{y^2}{2} + y\cos x \right]_{y=0}^{x} dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left(\frac{x^5}{2} + x\cos x \right) dx$$

$$= \left[\frac{x^6}{12} \right]_{x=0}^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} x\cos x\, dx$$

$$= \frac{\pi^6}{768} + \int_0^{\pi/2} x\cos x\, dx$$

Όμως

$$\int x\cos x\, dx = \int x (\sin x)'\, dx$$

$$= x\sin x - \int (x)' \sin x\, dx$$

$$= x\sin x - \int \sin x\, dx$$

$$= x\sin x + \cos x.$$

Άρα

$$I = \frac{\pi^6}{768} + \frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2} - \cos 0$$

$$= \frac{\pi^6}{768} + \frac{\pi}{2} - 1.$$

Ο υπολογισμός ως x-χωρίο είναι

$$I = \int_0^{\pi/2} \int_y^{\pi/2} (x^3 y + \cos x)\, dx\, dy$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left[\frac{x^4}{4} y + \sin x \right]_{x=y}^{\pi/2} dy$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left(\frac{\pi^4 y}{64} + \sin\frac{\pi}{2} - \frac{y^5}{4} - \sin y \right) dy$$

$$= \left[\frac{\pi^4 y^2}{128} + y - \frac{y^6}{24} + \cos y \right]_{y=0}^{\pi/2}$$

$$= \frac{\pi^6}{512} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi^6}{1536} + \cancelto{0}{\cos\frac{\pi}{2}} - \overbrace{\cos 0}^{=1}$$

$$= \frac{2\pi^6}{1536} + \frac{\pi}{2} - 1 = \frac{\pi^6}{768} + \frac{\pi}{2} - 1.$$

(6) Υπολογισμός εμβαδών

$D \subseteq \mathbb{R}^2$ χωρίο. Τότε, το εμβαδό του είναι

$$A(D) = \iint_D dx\,dy$$

Αν $D = \{(x,y) : a \le x \le b,\ \phi_1(x) \le y \le \phi_2(x)\}$, τότε

$$A(D) = \int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} dy\,dx = \int_a^b (\phi_2(x) - \phi_1(x))\,dx.$$

Αν $D = \{(x,y) : c \le x \le d,\ \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y)\}$, τότε

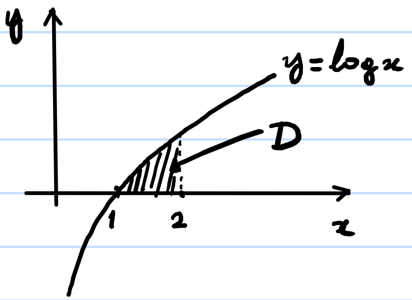
$$A(D) = \int_c^d \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} dx\,dy = \int_c^d (\psi_2(y) - \psi_1(y))\,dy.$$

(Υ) Παράδειγμα

$$I = \iint_D x \, dy\, dx$$

όπου το χωρίο ολοκλήρωσης είναι το

$D = \{(x,y) : 1 \le x \le 2, \quad 0 \le y \le \log x\}$ y-χωρίο.



Είναι

$$I = \int_1^2 \int_0^{\log x} x \, dy\, dx$$

$$= \int_1^2 x \log x \, dx.$$

Όμως

$$\int x \log x \, dx = \int \left(\frac{x^2}{2}\right)' \log x \, dx$$

$$= \frac{x^2 \log x}{2} - \int \frac{x^2}{2} (\log x)' dx$$

$$= \frac{x^2 \log x}{2} - \frac{x^2}{4},$$

οπότε

$$I = \left[\frac{x^2 \log x}{2} - \frac{x^2}{4}\right]_{x=1}^{2} = 2\log 2 - 1 + \frac{1}{4} = 2\log 2 - \frac{3}{4}.$$

Εναλλακτικά θα μπορούσαμε να δούμε το D ως x-χωρίο:

$$\left\{\begin{array}{l} 1 \le x \le 2 \\ 0 \le y \le \log x \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 0 \le y \le \log 2 \\ 1 \le x \le 2,\ x \ge e^y \end{array}\right\}$$

οπότε

$$D = \{(x,y) : 0 \le y \le \log 2,\quad e^y \le x \le 2\}.$$

Άρα

$$I = \int_0^{\log 2} \int_{e^y}^{2} x \, dx \, dy$$

$$= \int_0^{\log 2} \left[\frac{x^2}{2}\right]_{x=e^y}^{2} dy$$

$$= \int_0^{\log 2} \left(2 - \frac{e^{2y}}{2}\right) dy$$

$$= \left[2y - \frac{e^{2y}}{4}\right]_{y=0}^{\log 2}$$

$$= 2\log 2 - \frac{e^{2\log 2}}{4} + \frac{e^0}{4}$$

$$= 2\log 2 - 1 + \frac{1}{4} = 2\log 2 - \frac{3}{4}.$$

8 Ιδιότητες διπλού ολοκληρώματος

1) Γραμμικότητα:

$$\iint_D (f(x,y) + g(x,y))\, dx\, dy$$

$$= \iint_D f(x,y)\, dx\, dy + \iint_D g(x,y)\, dx\, dy$$

2) Ομογένεια:

$$\iint_D c\, f(x,y)\,dx\,dy = c \iint_D f(x,y)\,dx\,dy$$

3) Μονοτονία:

$$f(x,y) \leq g(x,y)\ , \text{ για } (x,y) \in D$$

$$\Rightarrow \iint_D f(x,y)\,dx\,dy \leq \iint_D g(x,y)\,dx\,dy$$

4) Προσθετικότητα:

$$D = D_1 \cup D_2 \cup \ldots \cup D_m\ ,\quad D_i \cap D_j = \emptyset \text{ για } i \neq j$$

$$\Rightarrow \iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \sum_{i=1}^{m} \iint_{D_i} f(x,y)\,dx\,dy.$$

5) Ανισότητα μέσης τιμής:

$$m \leq f(x,y) \leq M\ , \text{ για } (x,y) \in D$$

$$\Rightarrow m \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{εμβαδό του } D}}{A(D)} \leq \iint_D f(x,y)\,dx\,dy \leq M \cdot A(D)$$

6) Θεωρ. μέσης τιμής

f συνεχής στο στοιχ. χωρίο D

$$\Rightarrow \exists (x_0,y_0) \in D : \iint_D f(x,y)\,dx\,dy = f(x_0,y_0) \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{εμβαδό} \\ \text{του } D}}{A(D)}$$

ή ισοδύναμα

$$\underbrace{\frac{\iint_D f(x,y)\,dx\,dy}{A(D)}}_{\text{Μέση τιμή της } f \text{ στο } D} = f(x_0,y_0).$$