Τριπλό ολοκλήρωμα

① Ορισμός τριπλού ολοκληρώματος

$B = [a,b] \times [c,d] \times [p,q]$.

Κανονική διαμέριση τάξης n του B:

Χωρισμός σε n ισαπέχοντα σημεία κάθε ακμής

$\rightsquigarrow$ Χωρισμός σε n^3 ίσα παραλληλεπίπεδα

όγκου $\Delta V = (b-a)(d-c)(q-p)/n^3$: B_{ijk}.

Έστω $\vec{c}_{ijk}$ τυχαίο σημείο του B_{ijk}.

$f: B \to \mathbb{R}$

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} f(\vec{c}_{ijk}) \underbrace{\Delta x_i \Delta x_j \Delta z_k}_{\Delta V} :$$

: Άθροισμα Riemann της f.

Ορισμός: f ολοκληρώσιμη επί του B αν υπάρχει το όριο $S = \lim_{n\to\infty} S_n$ και είναι ανεξ. της επιλογής των $\vec{c}_{ijk}$.

Τότε, το ολοκλήρωμα της f επί του B είναι αυτό το όριο και συμβολίζεται με

$$\iiint_B f\, dV \quad \text{ή} \quad \iiint_B f(x,y,z)\, dV \quad \text{ή} \quad \iiint_B f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz.$$

② Ολοκληρωσιμότητα φραγμένων, σχεδόν-παντού συνεχών συναρτήσεων

Έστω $f: B = [a,b] \times [c,d] \times [p,q] \to \mathbb{R}$, φραγμένη και σχεδόν-παντού συνεχής (δηλαδή το σύνολο των σημείων ασυνέχειας της f έχει μηδενικό όγκο). Τότε f ολοκληρώσιμη.

③ Στοιχειώδη χωρία στον χώρο

Ορισμός:

Ένα χωρίο W του χώρου λέγεται στοιχειώδες αν γράφεται ως

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad \begin{array}{l} a \le x \le b \\ \phi_1(x) \le y \le \phi_2(x) \\ \gamma_1(x,y) \le z \le \gamma_2(x,y) \end{array} \}$$

όπου $\phi_1, \phi_2, \gamma_1, \gamma_2$ συνεχείς,

ή ομοίως με άλλη σειρά τα x, y, z.

④ Τριπλό ολοκλήρωμα επί στοιχειώδους χωρίου

Ορισμός:

Έστω W στοιχειώδες χωρίο του $\mathbb{R}^3$, $f: W \to \mathbb{R}$, φραγμένη και σχεδόν-παντού συνεχής.

Θεωρούμε παραλληλεπίπεδο $B \supseteq W$ και ορίζουμε $f^*: B \to \mathbb{R}$ με

$$f^*(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & \text{αν } (x,y) \in W \\ 0, & \text{αν } (x,y) \in B \setminus W. \end{cases}$$

Το ολοκλήρωμα της f επί του W ορίζεται ως το ολοκλ. της f^* επί του B.

⑤ Θεώρημα Fubini για τριπλά ολοκληρ. επί στοιχ. χωρίων

· Έστω $f : W \subseteq \mathbb{R}^3$ στοιχ. χωρίο $\to \mathbb{R}$ φραγμένη και σχεδόν-παντού συνεχής.

$$W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \quad a \le x \le b, \ \phi_1(x) \le y \le \phi_2(x), \ \gamma_1(x,y) \le z \le \gamma_2(x,y)\}$$

Το τριπλό ολοκλήρωμα της f μπορεί να υπολογιστεί ως διαδοχικά απλά ολοκληρώματα, δηλ.

$$\iiint_W f(x,y,z)\,dV$$

$$= \underbrace{\int_a^b \underbrace{\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} \underbrace{\int_{\gamma_1(x,y)}^{\gamma_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz}_{F_{x,y}(x,y)}\,dy}_{F_x(x)}\,dx}$$

⑥ Διαισθητική έννοια τριπλού ολοκληρώματος

Αν $f(x,y,z)$ πυκνότητα στο σημείο (x,y,z) ενός σώματος $W \subseteq \mathbb{R}^3$, τότε η συνολική μάζα του σώματος είναι

$$\iiint_W f(x,y,z)\,dV$$

(I) Υπολογισμός όγκων - Αρχή Cavalieri

Αν $W \subseteq \mathbb{R}^3$ χωρίο, τότε ο όγκος του είναι

$$V(W) = \iiint_W dV = \iiint_W dz\,dy\,dx$$

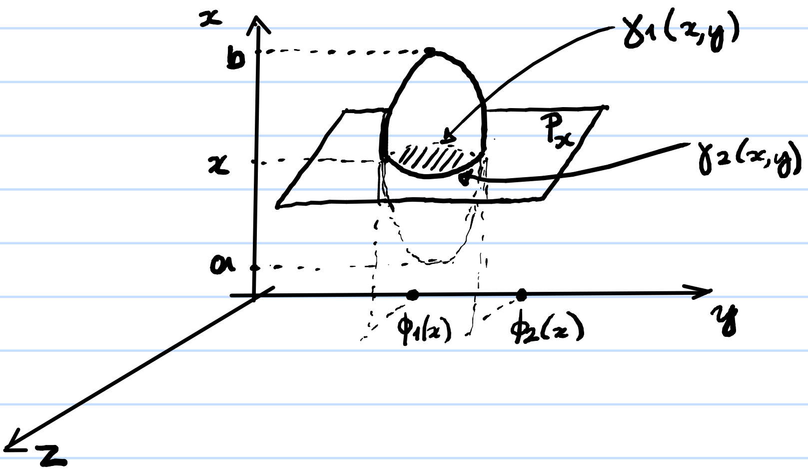
Αν $W = \{(x,y,z) : a \le x \le b,\ \phi_1(x) \le y \le \phi_2(x),$
$\gamma_1(x,y) \le z \le \gamma_2(x,y)\}$,

τότε

$$V(W) = \int_a^b \underbrace{\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} \int_{\gamma_1(x,y)}^{\gamma_2(x,y)} dz\,dy}_{A(x)} \,dx$$

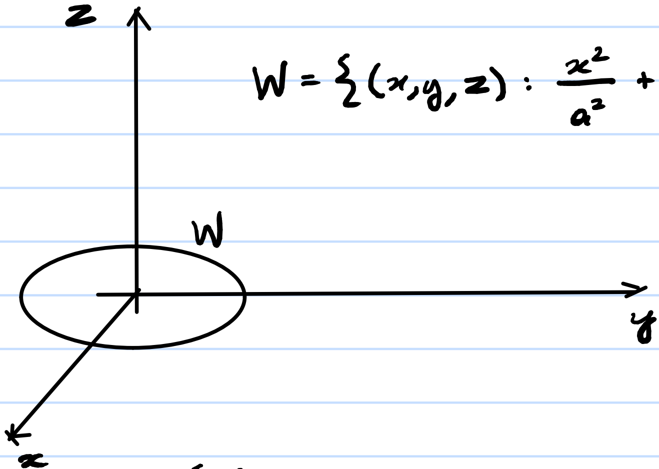
$A(x)$: εμβαδό τομής του W με το επίπεδο P_x που είναι κάθετο στον άξονα xx' στο σημείο x.

$$= \int_a^b A(x)\,dx.$$



⑧ Παράδειγμα 1

Περιγραφή ελλειψοειδούς ως στοιχειώδες χωρίο, εμβαδό έλλειψης και όγκος ελλειψοειδούς



$$W = \left\{(x,y,z) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \le 1\right\}$$

$$W = \Big\{(x,y,z) : -a \le x \le a$$
$$-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} \le y \le b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$$
$$-c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}} \le z \le c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\Big\}.$$

Ο όγκος του W είναι

$$V(W) = \int_{-a}^{a} \int_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} \underbrace{\int_{-c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}^{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} dz}_{2c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}\, dy\, dx$$

Έχουμε

$$A(x) = \int_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} 2c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\, dy.$$

$$\overset{\frac{y}{b}=u}{=} \int_{-\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} 2c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-u^2}\; b\, du$$

$$= 2bc \int_{-\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} \sqrt{1 - \frac{u^2}{1-\frac{x^2}{a^2}}}\, du$$

$$v = \frac{u}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} \quad = 2bc \int_{-1}^{1} \left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\sqrt{1-v^2}\, dv$$

$$\begin{array}{l} v = \cos\theta \\ dv = -\sin\theta\, d\theta \end{array} \quad = 2bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\int_{-\pi}^{0} \sqrt{1-\cos^2\theta}\,(-\sin\theta)\, d\theta$$

$$= 2bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\int_{-\pi}^{0} (-\sin\theta)(-\sin\theta)\, d\theta$$

$$= 2bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\int_{-\pi}^{0} \sin^2\theta\, d\theta$$

Αλλά:

$$\int \sin^2\theta\, d\theta \underset{\uparrow}{=} \int \frac{1-\cos 2\theta}{2}\, d\theta = \frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4}$$

$$1 - 2\sin^2\theta = \cos 2\theta$$

οπότε

$$A(x) = 2bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\left[\frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4}\right]_{\theta=-\pi}^{0}$$

$$= 2bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\cdot\frac{\pi}{2} = \pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)$$

Για $x=0$ παίρνουμε το εμβαδό της έλλειψης $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \le 1$, που είναι πbc.

Για τον όγκο του ελλειψοειδούς έχουμε:

$$V = \pi bc \int_{-a}^{a}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx = \pi bc\left[x - \frac{x^3}{3a^2}\right]_{x=-a}^{a} = \frac{4\pi}{3}abc.$$

Θεώρημα αλλαγής μεταβλητών

① Τύπος αλλαγής μεταβλητών - 1 μεταβλητή (μέθοδος αντικατάστασης)

Θεωρ:

$f : [c,d] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη

$x : [a,b] \to [c,d]$ C^1 (συνεχώς παραγωγ.) και 1-1 και επί

τότε

$$\int_c^d f(x)\,dx = \int_{x^{-1}(c)}^{x^{-1}(d)} f(x(u))\, x'(u)\,du$$

Αφού $x(u)$ 1-1 μπορεί να είναι είτε $\uparrow$ είτε $\downarrow$.

Αν $x(u) \uparrow$, τότε $x^{-1}(c)=a$, $x^{-1}(d)=b$, $x'(u) \geq 0$,

οπότε

$$\int_c^d f(x)\,dx = \int_a^b f(x(u))\, x'(u)\,du = \int_a^b f(x(u))\,|x'(u)|\,du.$$

Αν $x(u) \downarrow$, τότε $x^{-1}(c)=b$, $x^{-1}(d)=a$, $x'(u) \leq 0$,

οπότε

$$\int_c^d f(x)\,dx = \int_b^a f(x(u))\, x'(u)\,du = \int_a^b f(x(u))\,(-x'(u))\,du$$

$$= \int_a^b f(x(u))\,|x'(u)|\,du.$$

· Άρα, μπορούμε να γράψουμε σε ενιαία μορφή:

$$\int_c^d f(x)\,dx = \int_a^b f(x(u))\,|x'(u)|\,du.$$

② Τύπος αλλαγής μεταβλητών - 2 μεταβλητές
(μέθοδος αντικατάστασης για διπλά ολοκληρώματα

Θεωρ:

$f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη

$T : D^* \subseteq \mathbb{R}^2 \to D \subseteq \mathbb{R}^2$ C^1, 1-1 και επί $(T(D^*) = D)$,

με $T(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$. Τότε:

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D^*} f(x(u,v), y(u,v)) \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv$$

όπου

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$ η λεγόμενη Ιακωβιανή ορίζουσα του T.

③ Παράδειγμα

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\iint_D 4x(x+y)\,dy\,dx,$$

όπου $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1,\ -x \leq y \leq 1-x\}$.

Απευθείας υπολογισμός:

$$\iint_D 4x(x+y)\,dy\,dx = \int_0^1 \int_{-x}^{1-x} (4x^2 + 4xy)\,dy\,dx$$

$$= \int_0^1 \left[4x^2 y + 4x\frac{y^2}{2}\right]_{y=-x}^{1-x} dx$$

$$= \int_0^1 \left[4x^2(1-x) + 2x(1-x)^2 + 4x^3 - 2x^3\right] dx$$

$$= \int_0^1 \left(4x^2 - 4x^3 + 2x - 4x^2 + 2x^3 + 4x^3 - 2x^3\right] dx$$

$$= \int_0^1 2x\,dx = [x^2]_{x=0}^{1} = 1.$$

Εναλλακτικά, βλέπουμε ότι τόσο η υπό ολοκλήρωση συνάρτηση όσο και το D παίρνουν πιο απλή μορφή αν θέσουμε $x=u$, $x+y=v$.

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1,\ 0 \le x+y \le 1\}$

Ο μετασχημ. είναι 1-1 διότι

$$\left\{\begin{matrix} x = u \\ x+y = v \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} x = u \\ y = v-u \end{matrix}\right\}$$

Επίσης

$$\underbrace{\left\{\begin{matrix} 0 \le x \le 1 \\ -x \le y \le 1-x \end{matrix}\right\}}_{(x,y)\in D} \Leftrightarrow \underbrace{\left\{\begin{matrix} 0 \le u \le 1 \\ 0 \le v \le 1 \end{matrix}\right\}}_{(u,v)\in D^*}$$

Τέλος

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Άρα

$$\iint_D 4x(x+y)\,dy\,dx = \iint_{D^*} 4uv \cdot 1\,du\,dv$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 4uv\,du\,dv$$

$$= 4 \int_0^1 u\,du \cdot \int_0^1 v\,dv = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 1.$$

4 Αλλαγή μεταβλητών: Πολικές συντεταγμένες

$x = r\cos\theta$

$y = r\sin\theta$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix}$$

$$= r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r$$

Άρα

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D^*} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\, dr\, d\theta.$$

(5) Παράδειγμα

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\}$.

Να υπολογιστεί το

$$\iint_D \sqrt{1+x^2+y^2}\,dx\,dy.$$

Η απεικόνιση $T(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ είναι 1-1 και επί από το $(0,1]\times[0,2\pi)$ στο $D\setminus\{(0,0)\}$. Το $\{(0,0)\}$ έχει εμβαδό 0, οπότε δεν παίζει ρόλο.

$$\iint_D \sqrt{1+x^2+y^2}\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \sqrt{1+r^2}\cdot r\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^1 \sqrt{1+r^2}\cdot r\,dr \cdot \underbrace{\int_0^{2\pi} d\theta}_{2\pi}$$

$$\overset{\substack{u=1+r^2 \\ du=2r\,dr}}{=} \int_1^2 \sqrt{u}\cdot\frac{du}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2}\pi = \pi\left[\frac{u^{3/2}}{3/2}\right]_{u=1}^{2}$$

$$= \frac{2\pi}{3}\left(\sqrt{8}-1\right).$$