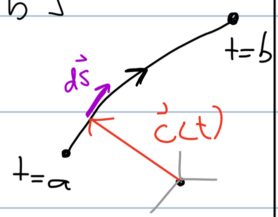
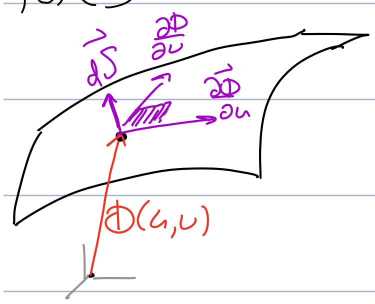
Ανάλυση ΙΙ, 15.05.25 : Επίλυση Ασκήσεων

Περίγραμμα Μαθήματος [~ κεφάλαια Marsden-Tromba]

1. Διανύσματα σε ευκλείδιους χώρους
2. Συναρτήσεις πολλών μεταβλητών, παραγώγιση, καμπύλες
3. Μερικές παράγωγοι ανώτερης τάξης, γραμμική προσέγγιση, ακρότατα
4. Διανυσματικές συναρτήσεις, απόκλιση + στροβιλισμός
5. Πολλαπλή (βαθμωτή) ολοκλήρωση
6. Αλλαγές μεταβλητών + εφαρμογές ολοκλήρωσης
7. Επικαμπύλια + επιφανειακά ολοκληρώματα
8. Θεμελιώδη θεωρήματα της διανυσματικής ανάλυσης

7. Επικαμπύλια & Επιφανειακά Ολοκληρώματα: Περίληψη

	Βαθμωτή συνάρτηση $f(\vec{r})$	Διανυσματική συνάρτηση $\vec{F}(\vec{r})$
καμπύλη $\vec{c}(t)$, $t\in[a,b]$ 	$\int_{\vec{c}} f\,ds = \int_a^b f(\vec{c}(t))\,\underbrace{\left\|\frac{d\vec{c}}{dt}\right\| dt}_{ds=\|d\vec{c}\|}$	$\int_{\vec{c}} \vec{F}\cdot d\vec{s} = \int_a^b \vec{F}(\vec{c}(t))\cdot \underbrace{\frac{d\vec{c}}{dt}\,dt}_{d\vec{s}=d\vec{c}}$
Επιφάνεια $\vec{\Phi}(u,v)$, $(u,v)\in D$ 	$\int f\,dS = \iint_D f(\vec{\Phi}(u,v))\,\underbrace{\left\|\frac{\partial\vec{\Phi}}{\partial u}\times\frac{\partial\vec{\Phi}}{\partial v}\right\| du\,dv}_{dS}$	$\int \vec{F}\cdot d\vec{S} = \iint_D \vec{F}(\vec{\Phi}(u,v))\cdot \underbrace{\left(\frac{\partial\vec{\Phi}}{\partial u}\times\frac{\partial\vec{\Phi}}{\partial v}\right) du\,dv}_{d\vec{S}}$

Θεμελιώδη θεωρ. διανυσμ. ανάλυσης

$\Updownarrow$

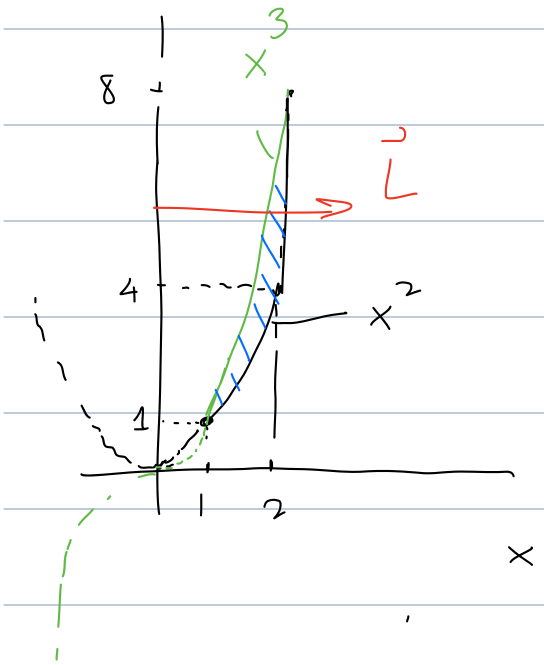
Σχέσεις μεταξύ επιφαν. + επικ. $\int$

1. Διπλή ολοκλήρωση

Στις 28.04.25, σχεδιάσατε το χωρίο ολοκλ. D του

$$I = \int_1^2 \int_{x^2}^{x^3} y\, dy\, dx$$

Δείξατε ότι είναι και y-απλό και x-απλό, και το υπολογίσατε ως y-απλό, $I = \frac{209}{35}$. Υπολογίστε και ως x-απλό και επιβεβαιώστε ότι το αποτέλεσμα είναι το ίδιο



$$y \in [1, 8]$$

$$\varphi_1(y) \le x \le \varphi_2(y)$$

$$\varphi_1(y) = y^{1/3} \iff y = x^3$$

$$\varphi_2(y) = \begin{cases} y^{1/2} & y \le 4 \iff y = x^2 \\ 2 & y > 4 \end{cases}$$

$$I = \int_1^8 \int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} y\, dx\, dy = \int_1^4 \int_{y^{1/3}}^{y^{1/2}} y\, dx\, dy + \int_4^8 \int_{y^{1/3}}^{2} y\, dx\, dy$$

$$= \int_1^4 y\, [x]_{y^{1/3}}^{y^{1/2}}\, dy + \int_4^8 y\, [x]_{y^{1/3}}^{2}\, dy$$

$$= \int_1^4 \left(y^{3/2} - y^{4/3}\right) dy + \int_4^8 \left(2y - y^{4/3}\right) dy$$

$$= \left[\frac{2}{5} y^{5/2} - \frac{3}{7} y^{7/3}\right]_1^4 + \left[y^2 - \frac{3}{7} y^{7/3}\right]_4^8$$

$$= \frac{2}{5} \cdot 2^5 - \cancel{\frac{3}{7} \cdot 4^{7/3}} - \left(\frac{2}{5} - \frac{3}{7}\right) + 64 - \frac{3}{7} \cdot 2^7 - \left(16 - \cancel{\frac{3}{7} 4^{7/3}}\right)$$

$$= \dots = \frac{209}{35}$$

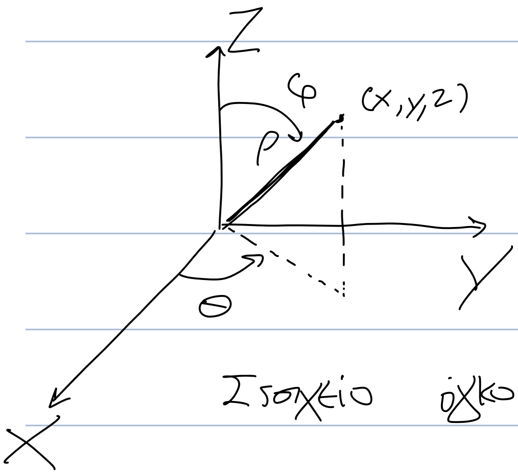
Συμπέρασμα: Μια σειρά ολοκλήρωσης μπορεί να είναι πολύ ευκολότερη της άλλης!

2. Εφαρμογή τριπλής ολοκλήρωσης (~ M.T 6.2.6)

Έστω W μοναδιαίο σφαιρικό αντικείμενο ακτίνας 1 στην αρχή των αξόνων, με πυκνότητα $\rho(x,y,z) = \left(e^{x^2+y^2+z^2}\right)^{3/2}$. Υπολογίστε τη μάζα του m.

$$m = \iiint_W \rho(x,y,z)\, dx\, dy\, dz$$

Εύρεση ορίων ολοκλήρωσης σε καρτεσιανές συντεταγμένες δύσκολη, όμως εύκολη σε σφαιρικές συντεταγμένες



$$x = \rho \sin\varphi \cos\theta \qquad \rho \geq 0$$

$$y = \rho \sin\varphi \sin\theta \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$z = \rho \cos\varphi \qquad 0 \leq \varphi \leq \pi$$

Στοιχείο όγκου $dx\,dy\,dz = \left| \dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\varphi)} \right| d\rho\, d\varphi\, d\theta$

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

$= \dots = \rho^2 \sin\varphi\, d\rho\, d\varphi\, d\theta$

3x3 Ιακωβιανή ορίζουσα

Χωρίο ολοκλήρωσης γίνεται "κουτί", $\rho \in [0,1]$, $\theta \in [0, 2\pi]$, $\varphi \in [0,\pi]$, $\rho(x,y,z) = \left(e^{\rho^2}\right)^{3/2} = e^{\rho^3} = \rho(\rho)$

$$\Rightarrow m = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{1} e^{\rho^3} \rho^2 \sin\varphi \, d\rho\, d\theta\, d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \times \int_0^{\pi} \sin\varphi\, d\varphi \times \int_0^1 e^{\rho^3}\rho^2\, d\rho$$

$$= 2\pi \cdot \left[-\cos\varphi\right]_0^{\pi} \times \left[\frac{e^{\rho^3}}{3}\right]_0^1$$

$$= 2\pi \cdot 2 \cdot \frac{1}{3}\left(e^3 - 1\right) = \frac{4\pi}{3}\left(e^3 - 1\right)$$

Αναλόγως και αλλαγή σε κυλινδρικές συντεταγμένες

$$\iiint_W f(x,y,z) = \int_{W^*} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\, \underbrace{r\,dr\,d\theta}_{\substack{\text{στοιχείο εμβαδού} \\ \text{πολικών συντεταγ.}}}\, dz$$

3. Διανυσμ. επικαμπύλιο ολοκλήρωμα για συντηρητικό πεδίο

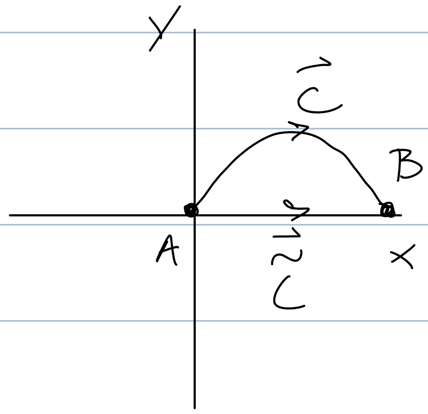
i) Αν $\vec{F} = \nabla f$, δείξτε ότι $\int_{\vec{c}} \vec{F} \cdot d\vec{s} = f(\vec{c}(b)) - f(\vec{c}(a))$

όπου $\vec{c}(t)$, $t \in [a,b]$

ii) Έστω $\vec{F} = (2x^3y^4 + x)\hat{i} + (2x^4y^3 + y)\hat{j}$

$$\overset{\parallel}{F_x} \qquad\qquad F_y$$

Εξετάσετε αν είναι συντηρητικό και υπολογίσετε $\int_{\vec{c}} \vec{F} d\vec{s}$ για $\vec{c} = (t, t(2-t))$ $t \in [0,2]$ 4



$$\vec{F} = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\hat{k}$$

$$\Rightarrow \int_{\vec{c}} \vec{F}\cdot d\vec{s} = \int_{\vec{c}} \frac{\partial f}{\partial x}\cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

$$= \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial c}\frac{dz}{dt}\right) dt$$

$\vec{c} = (x(t), y(t), z(t))$

$d\vec{s} = d\vec{c} = \left(\frac{dx}{dt}\cdot dt, \dots\right)$

$$= \int_a^b \frac{df}{dt}\cdot dt = f(\vec{c}(b)) - f(\vec{c}(a))$$

Ανεξάρτητο της καμπύλης, εξαρτάται μόνο από τα άκρα της.

ii) $\vec{F}$ συντηρητικό $\Longleftrightarrow$ $\nabla \times \vec{F} = 0$

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & 0 \end{vmatrix} = \hat{k}\left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right) \cancel{- \frac{\partial}{\partial z}\left(\hat{i} F_y - \hat{j} F_x\right)} \; 0$$

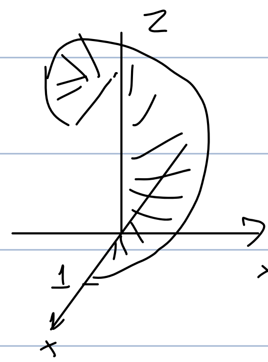
$= \hat{k}\,(8x^3y^3 - 8x^3y^3) = 0 \Rightarrow$ συντηρητικό

Ανεξαρτ. της διαδρομής: Υπολογίζεται και με απλούστερη καμπύλη $\vec{c} = (t, 0)$, $t \in [0, 2]$

$$\Rightarrow \int_{c} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_0^2 \vec{F} \cdot \frac{d\vec{c}}{dt} = \int_0^2 t\,dt = \frac{t^2}{2}\Big|_0^2 = 2$$

(Ή βρίσκω $f(x,y)$ και $\int_{c} \vec{F} \cdot d\vec{s} = f(2,0) - f(0,0)$)

4. Βαθμωτό επιφανειακό ολοκλήρωμα (ΜΤ 7.5.1)



Έστω το ελικοειδές S του παραδ. 7.4.2:

$\vec{\Phi}(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, \theta)$ με $\theta \in [0, 2\pi]$, $r \in [0, 1]$.

Υπολογίστε $\int f\,dS$ με $f(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2 + 1}$.

Από 12.05.25: $T_r = \dfrac{\partial \vec{\Phi}}{\partial r} = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$

$$T_\theta = \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial \theta} = (-r\sin\theta, r\cos\theta, 1)$$

$$T_r \times T_\theta = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 1 \end{vmatrix} = \sin\theta\,\hat{i} - \cos\theta\,\hat{j} + r\,\hat{k}$$

$$\|T_r \times T_\theta\| = \sqrt{\sin^2\theta + \cos^2\theta + r^2} = \sqrt{1+r^2}$$

$$(dS = \|T_r \times T_\theta\| \, dr\, d\theta$$

Μόνη διαφορά εδώ: Να υπολογίσουμε το $f(\vec{\Phi}(r,\theta))$

$$f(\vec{\Phi}(r,\theta)) = \sqrt{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta + 1} = \sqrt{1+r^2}$$

$$\int_{\vec{\Phi}} f\, dS = \int_0^{2\pi}\int_0^1 f(\vec{\Phi}(r,\theta)) \cdot \|T_r \times T_\theta\| \, dr\, d\theta$$

$$= \iint \sqrt{1+r^2}\sqrt{1+r^2}\, dr\, d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (1+r^2)\, dr$$

$$= 2\pi \left[r + \frac{r^3}{3} \right]_0^1 = \frac{8\pi}{3}$$

5. Κάθετο διάνυσμα επιφάνειας $\vec{n} = \|T_u \times T_v\|$ + Ιακωβιανές

Αν $\vec{\Phi}(u,v) = x(u,v)\hat{i} + y(u,v)\hat{j} + z(u,v)k$, αποδείξτε ότι

i) $$\|\vec{n}\| = \|T_u \times T_v\| = \sqrt{\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(x,z)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)^2}$$

2×2 Ιακωβιανές ορίζουσες

ii) Στην ειδική περίπτωση $z(u,v) = 0$, $\|\vec{n}\| = \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right|$

$$\vec{n} = \underset{\frac{\partial\vec{\Phi}}{\partial u}}{T_u} \times \underset{\frac{\partial\vec{\Phi}}{\partial v}}{T_v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = \hat{i}\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} - \hat{j}\frac{\partial(x,z)}{\partial(u,v)} + \hat{k}\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$$

ii) $\hat{n} = \hat{k} \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$

$\Rightarrow$ Απόδειξη της αλλαγής μεταβλητής σε διπλό $\int$!

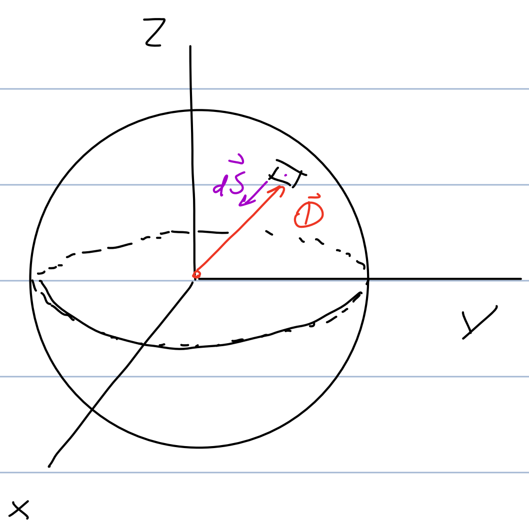
$$dx\,dy = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv \quad (\text{MT6},\ 05.05.25)$$

6. Διανυσματικό επιφανειακό ολοκλήρωμα (MT 7.6.1)

Έστω παραμετροποιημένη επιφάνεια $\vec{\Phi}(\theta,\varphi) = (\cos\theta\sin\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\varphi)$

$\theta \in [0, 2\pi]$, $\varphi \in [0, \pi]$ (μοναδιαία σφαίρα).

Υπολογίστε $I = \iint_{\Phi} \vec{r}\cdot d\vec{S} = \iint_{\vec{\Phi}} \vec{\Phi}\cdot d\vec{S}$ $\quad [\vec{F}(\vec{r}) \to \vec{F}(\vec{\Phi}(u,v))]$



$$\vec{T}_\theta = \frac{\partial\vec{\Phi}}{\partial\theta} = (-\sin\theta\sin\varphi, \cos\theta\sin\varphi, 0)$$

$$\vec{T}_\varphi = \frac{\partial\vec{\Phi}}{\partial\varphi} = (\cos\theta\cos\varphi, \sin\theta\cos\varphi, -\sin\theta)$$

$$T_\theta \times T_\varphi = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -\sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\sin\varphi & 0 \\ \cos\theta\cos\varphi & \sin\theta\cos\varphi & -\sin\varphi \end{vmatrix}$$

$$= \hat{k}\sin\varphi\cos\varphi\left(\overbrace{-\sin^2\theta - \cos^2\theta}^{-1}\right)$$

$$-\sin\varphi\left(\hat{i}\cos\theta\sin\varphi + \hat{j}\sin\theta\sin\varphi\right)$$

$$= -\sin\varphi\left(\hat{i}\cos\theta\sin\varphi + \hat{j}\sin\theta\sin\varphi + \cos\varphi\right)$$

$$I = \int \vec{\Phi} \cdot \underbrace{(\Gamma_\theta \times \Gamma_\varphi)}_{d\vec{S}} d\theta\, d\varphi$$

$$= \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} (-\sin\varphi)\Big(\underbrace{\underbrace{\cos^2\theta \sin^2\varphi + \sin^2\theta \sin^2\varphi}_{\sin^2\varphi} + \cos^2\varphi}_{1}\Big)\, d\theta\, d\varphi$$

$$= \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} (-\sin\varphi) = 2\pi \cdot (-2) = -4\pi = -\text{επιφάνεια}$$

της μοναδ. σφαίρας