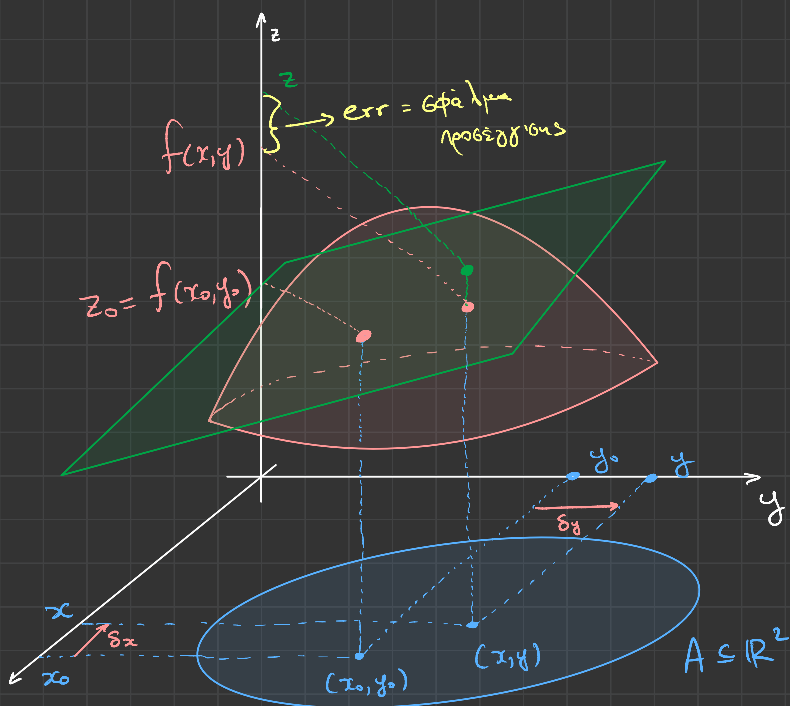
ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΒΑΘΜΩΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΔΥΟ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ $(n=2,\ m=1)$



Έστω **βαθμωτή** συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό, κ' έστω σημείο $(x_0,y_0) \in A$. Πώς γενικεύονται:

① Η εφαπτόμενη ευθεία?

② Η βέλτιστη γραμμική προσέγγιση της f?

① Γενίκευση $\rightsquigarrow$ Εφαπτόμενο επίπεδο

Εξίσωση: $z - z_0 = C_x(x-x_0) + C_y(y-y_0)$

Προσδιοριστέες σταθερές

Ισοδύναμα: $z = f(x_0,y_0) + C_x(x-x_0) + C_y(y-y_0)$

$$z = f(x_0,y_0) + C_x \cdot \delta x + C_y\, \delta y$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} &err(x_0,y_0; \delta x, \delta y) \\ &= f(x_0+\delta x, y_0+\delta y) - [f(x_0,y_0) + C_x \cdot \delta x + C_y \cdot \delta y] \end{aligned}}$$

Η έννοια της παραγώγου στην περίπτωση δύο μεταβλητών έχει δύο "συνιστώσες", μία για τη μεταβολή δx κ' μία για τη μεταβολή δy.

ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ σε δύο διαστάσεις = προσδιορισμός C_x, C_y ώστε $\boxed{err(x_0,y_0; \delta x,\delta y) = o(\delta x,\delta y)}$

→ ΖΗΤΟΥΜΕΝΟ: Να βρεθούν οι σταθερές C_x, C_y ώστε το σφάλμα προσέγγισης

$$err(x_0, y_0; \delta_x, \delta_y) = f(x_0+\delta_x, y_0+\delta_y) - [f(x_0,y_0) + C_x \cdot \delta_x + C_y \cdot \delta_y]$$

να είναι αμελητέο ως προς τις μεταβολές δ_x, δ_y, δηλ. $err(x_0,y_0; \delta_x, \delta_y) = o(\delta_x, \delta_y)$

ΙΔΕΑ: Θα μελετήσουμε τη μεταβολή της f σε κάθε κατεύθυνση (δηλ. x ή y) άξονα $\delta_x = 0$ ή $\delta_y = 0$

- $\delta_y = 0 \Rightarrow err(x_0, y_0; \delta_x, 0) = f(x_0+\delta_x, y_0+\cancel{\delta_y}) - [f(x_0,y_0) + C_x \cdot \delta_x + \cancel{C_y \delta_y}]$

$$= f(x_0+\delta_x, y_0) - [f(x_0,y_0) + C_x \delta_x] \rightsquigarrow = o(\delta_x)$$

$$\Rightarrow C_x = \frac{f(x_0+\delta_x, y_0) - f(x_0,y_0)}{\delta_x} - \frac{err(x_0,y_0; \delta_x, 0)}{\delta_x}$$

$$\xRightarrow{\delta_x \to 0} \boxed{C_x = \lim_{\delta_x \to 0} \frac{f(x_0+\delta_x, y_0) - f(x_0,y_0)}{\delta_x}} - \cancel{\lim_{\delta_x \to 0} \frac{err(x_0,y_0; \delta_x, 0)}{\delta_x}} \to 0$$

- $\delta_x = 0 \Rightarrow$ Εντελώς ανάλογα προκύπτει ότι $\boxed{C_y = \lim_{\delta_y \to 0} \frac{f(x_0, y_0+\delta_y) - f(x_0,y_0)}{\delta_y}}$

ΜΕΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ: ΓΕΝΙΚΕΥΣΕΙΣ ΤΗΣ ΕΝΝΟΙΑΣ ΤΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ ΣΕ ΠΟΛΛΕΣ ΔΙΑΣΤΑΣΕΙΣ

Αυστηρή θεμελίωση κ' ορισμοί για βαθμωτές συναρτήσεις n μεταβλητών

Ορισμός: Έστω βαθμωτή συνάρτηση $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, A ανοικτό, κ' έστω $\vec{x}_0 \in A$.

① Ως *μερική παράγωγος* της f στο $\vec{x}_0$ ως προς την i-στη μεταβλητή ορίζεται το όριο (αν υπάρχει)

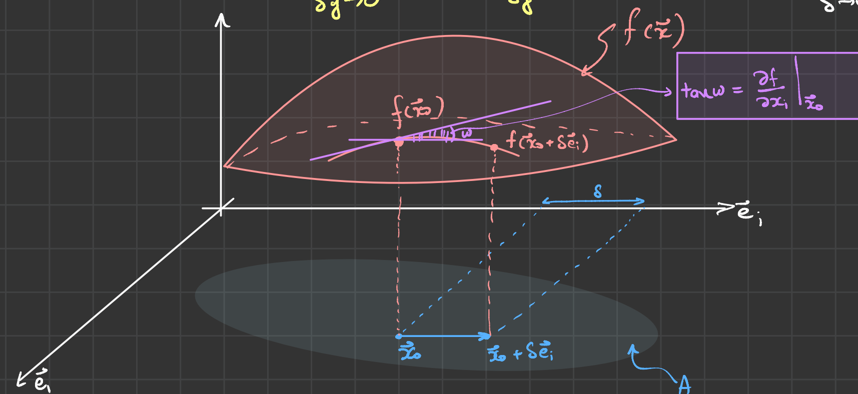
$$\boxed{\left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{\vec{x}_0} := \lim_{\delta \to 0} \frac{f(\vec{x}_0 + \delta \vec{e}_i) - f(\vec{x}_0)}{\delta}}$$

Μερική παράγωγος της f στο $\vec{x}_0$ ως προς τη μεταβλητή x_i

Παράδειγμα: αν $n=2$ $\vec{x}_0 \rightsquigarrow (x_0, y_0)$ στο συμβολισμό για δύο διαστάσεις

$$\to C_x = \lim_{\delta x \to 0} \frac{f(x_0+\delta x, y_0) - f(x_0,y_0)}{\delta x} = \lim_{\delta \to 0} \frac{f(\vec{x}_0 + \delta \vec{e}_1) - f(\vec{x}_0)}{\delta} = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}$$

$$\to C_y = \lim_{\delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0+\delta y) - f(x_0,y_0)}{\delta y} = \lim_{\delta \to 0} \frac{f(\vec{x}_0 + \delta \vec{e}_2) - f(\vec{x}_0)}{\delta} = \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}$$



ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:

Μερική παράγωγος της f ως προς x_i
||
Σύνηθης παράγωγος της f όπου κρατάμε όλες τις μεταβλητές σταθερές εκτός της x_i

- Υπολογιστικά: Για να υπολογίσουμε μια μερική παράγωγο κρατάμε όλες τις υπόλοιπες μεταβλητές σταθερές κ' παραγωγίζουμε ως προς την υπό μελέτη μεταβλητή

Παραδείγματα:

① Να υπολογισθεί η $\frac{\partial f}{\partial x}$ για τη συνάρτηση $f(x,y) = xe^y + y\sin x$

$$\hookrightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} x\underbrace{e^y}_{\text{σταθ. ως προς } x} + \frac{\partial}{\partial x}\underbrace{y}_{\text{σταθ. ως προς } x}\sin x = e^y \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} x}_{=1} + y \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}\sin x}_{=\cos x} = e^y + y\cos x$$

② Να υπολογισθεί η $\frac{\partial f}{\partial y}$ για τη συνάρτηση $f(x,y,z) = e^x e^y e^z \sin(xy+yz+zx)$

$$\hookrightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[e^x e^y e^z \sin(xy+yz+zx)\right] = e^x e^z \frac{\partial}{\partial y}\left[e^y \sin(xy+yz+zx)\right]$$

$$= e^x e^z \left[\frac{\partial}{\partial y}(e^y)\cdot \sin(xy+yz+zx) + e^y \cdot \frac{\partial}{\partial y}\sin(xy+yz+zx)\right]$$

$$= e^x e^z \left[e^y \sin(xy+yz+zx) + e^y \cdot \cos(xy+yz+zx)\underbrace{\frac{\partial}{\partial y}(xy+yz+zx)}_{x+z}\right]$$

$$= e^x e^y e^z \left[\sin(xy+yz+zx) + (x+z)\cos(xy+yz+zx)\right]$$

→ ΣΕ ΔΥΟ ΔΙΑΣΤΑΣΕΙΣ

• Εφαπτόμενο επίπεδο: → Της f στο (x_0, y_0)

$$\boxed{z - f(x_0,y_0) = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} \cdot (x-x_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} \cdot (y-y_0)}$$

• Βέλτιστη γραμμική εκτίμηση: → Της τιμής $f(x,y)$ με βάση το (x_0,y_0)

$$\boxed{f(x,y) = \underbrace{f(x_0,y_0)}_{\text{Προσέγγιση μηδενικής τάξης}} + \underbrace{\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} \cdot (x-x_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} \cdot (y-y_0)}_{\text{γραμμική διόρθωση}} + \underbrace{o(x-x_0, y-y_0)}_{\text{Σφάλμα εκτίμησης}}}$$

Σφάλμα εκτίμησης (αμελητέο ως προς τις μεταβολές $\delta x = x - x_0$, $\delta y = y - y_0$)

• Παράδειγμα: Να υπολογισθεί προσεγγιστικά η ποσότητα $\sqrt{(2.99)^2 + (4.02)^2}$.

→ Προσέγγιση μηδενικής τάξης: Παρατηρούμε ότι $2.99 \approx 3$, $4.02 \approx 4$, άρα $\sqrt{(2.99)^2+(4.02)^2} \approx \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$

Αντικατάσταση των κοντινότερων "γνωστών" τιμών χωρίς καμία περαιτέρω διόρθωση

→ Προσέγγιση πρώτης τάξης: Θα βρούμε τη βέλτιστη γραμμική εκτίμηση της $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ στο σημείο $x_0 = 3$, $y_0 = 4$

→ Διόρθωση πρώτης τάξης (γραμμική)

→ Υπολογισμός μερικών παραγώγων:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2+y^2} = \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\sqrt{x^2+y^2} = \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Μεταβολή:

$$\underset{=x_0}{3} \rightsquigarrow \underset{=x}{2.99} \Rightarrow \delta x = x - x_0 = -0.01$$

$$\underset{=y_0}{4} \rightsquigarrow \underset{=y}{4.02} \Rightarrow \delta y = y - y_0 = 0.02$$

Άρα:

$$\sqrt{(2.99)^2+(4.02)^2} = f(x,y) = \overbrace{f(x_0,y_0)}^{\text{Προσέγγιση μηδενικής τάξης}} + \underbrace{\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} \overbrace{\delta x}^{-0.01} + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}}_{\text{μένουν να υπολογισθούν}} \overbrace{\delta y}^{+0.02}$$

$$= 5 + \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}} \cdot (-0.01) + \frac{y_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}} \cdot (+0.02)$$

$$= 5 + \frac{3}{5}(-0.01) + \frac{4}{5} \cdot 0.02$$

$$= 5 - 0.006 + 0.016$$

$$= 5.01$$

Πραγματική Τιμή $\approx 5.0100392\ldots$

Προσέγγιση Μηδενικής Τάξης

Προσέγγιση Πρώτης Τάξης

ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

$A \subseteq \mathbb{R}^n$

- $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$
- $\vec{p} = (p_1, \dots, p_n)$

- Έστω συνάρτηση $\vec{F}: A^{\subseteq \mathbb{R}^n} \longrightarrow \mathbb{R}^m$, A ανοικτό, κ' έστω $\vec{p} \in A$.
- Έστω ότι οι συνιστώσες της $\vec{F}$ είναι $F_1, \dots, F_m : A^{\subseteq \mathbb{R}^n} \longrightarrow \mathbb{R}$, δηλ. $\vec{F}(\vec{x}) = (F_1(\vec{x}), F_2(\vec{x}), \dots, F_m(\vec{x}))$
- Διαίσθηση για τη συνέχεια: $\left\{ \begin{array}{l} \text{"Παράγωγος"} \\ \text{"Προσέγγιση"} \end{array} \right\}$ της $\vec{F}$ = συλλογή $\left\{ \begin{array}{l} \text{"παραγώγων"} \\ \text{"προσεγγίσεων"} \end{array} \right\}$ των συνιστωσών $F_1, \dots, F_m$
- Ποιά είναι η βέλτιστη γραμμική προσέγγιση του $\vec{F}(\vec{x})$ με βάση το $\vec{F}(\vec{p})$?

  ↳ $\vec{F}(\vec{x}) = (F_1(\vec{x}), \dots, F_m(\vec{x})) \Rightarrow$ Αρκεί να βρούμε τις αντίστοιχες βέλτιστες προσεγγίσεις για τις συνιστώσες $F_1, \dots, F_m$.

- Γραμμική προσέγγιση της $F_1(\vec{x})$: $\quad F_1(\vec{x}) \approx F_1(\vec{p}) + C_{11}(x_1 - p_1) + C_{12}(x_2 - p_2) + \dots + C_{1n}(x_n - p_n)$

  —— // —— $F_2(\vec{x})$: $\quad F_2(\vec{x}) \approx F_2(\vec{p}) + C_{21}(x_1 - p_1) + C_{22}(x_2 - p_2) + \dots + C_{2n}(x_n - p_n)$

  ⋮

  —— // —— $F_m(\vec{x})$: $\quad F_m(\vec{x}) \approx F_m(\vec{p}) + C_{m1}(x_1 - p_1) + C_{m2}(x_2 - p_2) + \dots + C_{mn}(x_n - p_n)$

Προσέγγιση Μηδενικής Τάξης

Γραμμική Διόρθωση

• **ΖΗΤΟΥΜΕΝΟ:** Να προσδιορισθούν οι σταθερές C_{ij} $i=1,\dots,m$, $j=1,\dots,n$ που οδηγούν στην Βέλτιστη γραμμική προσέγγιση

• **ΟΡΙΣΜΟΣ:** Έστω συνάρτηση $\vec{F}: A \xrightarrow{\subseteq \mathbb{R}^n} \mathbb{R}^m$, A ανοικτό, κ' έστω $\vec{p} \in A$. Θα λέμε ότι η $\vec{F}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\vec{p}$ όταν υπάρχει ένας πίνακας $J\vec{F}(\vec{p}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ τέτοιος ώστε το σφάλμα προσέγγισης

$$\boxed{err(\vec{p};\vec{x}) := \underbrace{\vec{F}(\vec{x})}_{\text{Προσέγγιση Μηδενικής Τάξης}} - \underbrace{[\,\vec{F}(\vec{p}) + J\vec{F}(\vec{p})\cdot(\vec{x}-\vec{p})}_{\text{Γραμμική Διόρθωση}}}$$

σφάλμα πρώτης τάξης

είναι αμελητέο ως προς τη μεταβολή $\vec{x}-\vec{p}$, δηλαδή

$$\boxed{\lim_{\vec{x}\to\vec{p}} \frac{\|err(\vec{p};\vec{x})\|}{\|\vec{x}-\vec{p}\|} = \lim_{\vec{x}\to\vec{p}} \frac{\|\vec{F}(\vec{x}) - \vec{F}(\vec{p}) - J\vec{F}(\vec{p})\cdot(\vec{x}-\vec{p})\|}{\|\vec{x}-\vec{p}\|} = 0}$$

Διαισθητικά: Μια συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο $\vec{p}$ όταν μπορεί να προσεγγισθεί τοπικά (για μικρές μεταβολές) από μια γραμμική συνάρτηση, εδώ την $\underbrace{\vec{F}(\vec{p})}_{\text{σταθερός όρος}} + \underbrace{J\vec{F}(\vec{p})\cdot(\vec{x}-\vec{p})}_{\text{γραμμ. διόρθωση}}$

Ορολογία: Όταν υπάρχει, ο πίνακας $J\vec{F}(\vec{p})$ καλείται Ιακωβιανός πίνακας (Jacobian) της $\vec{F}$ στο $\vec{p}$.

ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΑ: Πώς υπολογίζουμε τον $\mathcal{J}\vec{F}(\vec{p})$?

Θεώρημα: Έστω συνάρτηση $\vec{F}: A^{\subseteq \mathbb{R}^n} \longrightarrow \mathbb{R}^m$, A ανοικτό, κ' έστω $\vec{p} \in A$. Αν η $\vec{F}$ παρ/μη στο $\vec{p}$, τότε

$$\boxed{[\mathcal{J}\vec{F}(\vec{p})]_{ij} = \left.\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right|_{\vec{x}=\vec{p}}}$$

Δηλαδή, έχουμε:

$$\boxed{\mathcal{J}\vec{F}(\vec{p}) = \begin{pmatrix} \left.\frac{\partial F_1}{\partial x_1}\right|_{\vec{p}} & \left.\frac{\partial F_1}{\partial x_2}\right|_{\vec{p}} & \cdots & \left.\frac{\partial F_1}{\partial x_n}\right|_{\vec{p}} \\ \left.\frac{\partial F_2}{\partial x_1}\right|_{\vec{p}} & \left.\frac{\partial F_2}{\partial x_2}\right|_{\vec{p}} & \cdots & \left.\frac{\partial F_2}{\partial x_n}\right|_{\vec{p}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \left.\frac{\partial F_m}{\partial x_1}\right|_{\vec{p}} & \left.\frac{\partial F_m}{\partial x_2}\right|_{\vec{p}} & \cdots & \left.\frac{\partial F_m}{\partial x_n}\right|_{\vec{p}} \end{pmatrix}}$$

Οι μερικές παράγωγοι $\left.\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right|_{\vec{x}=\vec{p}}$ είναι ακριβώς οι συντελεστές C_{ij} που αντιστοιχούν στην καλύτερη γραμ. προσέγγιση

ΠΡΟΣΟΧΗ: Το θεώρημα λέει ύπαρξη παραγώγου ⟹ έκφραση Ιακωβιανού. **Δεν** είναι απαραίτητο η $\vec{F}$ να είναι παραγωγίσιμη, ακόμα κ' αν υπάρχουν όλες οι μερικές παράγωγοι $\partial F_i / \partial x_j$ $i=1,\dots,m$, $j=1,\dots,n$.

↳ Για παράδειγμα: βλ. Marsden-Tromba

Ικανή Συνθήκη Παραγωγισιμότητας

Θεώρημα: Έστω συνάρτηση $\vec{F}: A^{\subseteq \mathbb{R}^n} \longrightarrow \mathbb{R}^m$, A ανοικτό, κ' έστω $\vec{p} \in A$. Αν οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}$ υπάρχουν κ' είναι συνεχείς σε μία περιοχή του $\vec{p}$, τότε η $\vec{F}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\vec{p}$ κ' έχουμε

$$[JF(\vec{p})]_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial x_j}\Big|_{\vec{x}=\vec{p}} \quad \text{για κάθε } i=1,\dots,m,\ j=1,\dots,n.$$

ΔΗΛΑΔΗ: ① $\vec{F}$ παρ/μη $\Longrightarrow$ Ύπαρξη μερικών παραγώγων

② Ύπαρξη μερικών παραγώγων $\not\Longrightarrow$ $\vec{F}$ παραγωγίσιμη

③ Συνέχεια μερικών παραγώγων $\Longrightarrow$ $\vec{F}$ παραγωγίσιμη