ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ ΙΑΚΩΒΙΑΝΩΝ ΠΙΝΑΚΩΝ

① $\vec{F}(x,y) = (\underbrace{e^{x+y}+y}_{F_1}, \underbrace{y^2x}_{F_2})$

Από τη μορφή της $\vec{F}$, θα έχουμε $J\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{pmatrix}$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial F_1}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{x+y}+y\right) = e^{x+y} \\
\frac{\partial F_1}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(e^{x+y}+y\right) = e^{x+y}+1 \\
\frac{\partial F_2}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} y^2 x = y^2 \\
\frac{\partial F_2}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} y^2 x = 2yx
\end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{J\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} e^{x+y} & e^{x+y}+1 \\ y^2 & 2xy \end{pmatrix}}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ ΙΑΚΩΒΙΑΝΩΝ ΠΙΝΑΚΩΝ

① $\vec{F}(x,y) = (\underbrace{xye^{xy}}_{F_1}, \underbrace{x\sin y}_{F_2}, \underbrace{3xy^2}_{F_3})$

Από τη μορφή της $\vec{F}$, θα έχουμε $J\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \\ \frac{\partial F_3}{\partial x} & \frac{\partial F_3}{\partial y} \end{pmatrix}$

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(xye^{xy}\right) = y\,\frac{\partial}{\partial x}\left(xe^{xy}\right) = y\left[\frac{\partial x}{\partial x}\cdot e^{xy} + x\cdot\frac{\partial}{\partial x}e^{xy}\right] = y\left[e^{xy} + xye^{xy}\right]$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(xye^{xy}\right) = \ldots = x(1+xy)e^{xy}$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = \ldots$$

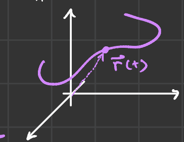
$$\frac{\partial F_2}{\partial y} = \ldots$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial x} = \ldots$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial y} = \ldots$$

ΕΙΔΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ (για διαφορετικές τιμές των n, m)

Έστω μια συνάρτηση $\vec{F}: A \xrightarrow{} \mathbb{R}^m$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$, A ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$.

n \ m	$m = 1$	$m > 1$
$n = 1$	• Βαθμωτής συνάρτησης μιας μεταβλητής $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ • Παράγωγος / Ιακωβιανός: $f'(x) \equiv \frac{df}{dx}$ Βαθμωτό $\in \mathbb{R}$	• Διανυσματική συνάρτηση μιας μεταβλητής ↳ Καμπύλες m συνιστωσών $\vec{r}: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ • Ιακωβιανός ⇝ Ταχύτητα • Συμβολισμός: $\boxed{\frac{d\vec{r}}{dt} = \begin{pmatrix} dx_1/dt \\ \vdots \\ dx_m/dt \end{pmatrix}}$ → $m \times 1$ ⇓ δ/μα στήλη 
$n > 1$	• Βαθμωτής συνάρτησης n μεταβλητών $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ • Ιακωβιανός ⇝ Βαθμίδα / Κλίση (gradient) • Συμβολισμός: $\boxed{\vec{\nabla} f(\vec{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)}$ $\in \mathbb{R}^n$ "nabla" (ανάδελτα) Πίνακας $1 \times n$ ↳ Διάνυσμα γραμμή	• Διανυσματική συνάρτηση πολλών μεταβλητών • Ιακωβιανός ⇝ $(\dots)$ • Συμβολισμός: $JF(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{\nabla} F_1(\vec{x}) \\ \vdots \\ \vec{\nabla} F_m(\vec{x}) \end{pmatrix}$ Βαθμίδα $1 \times n$ Πίνακας $m \times n$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ

Έστω $\vec{F}, \vec{G} : A \xrightarrow{} \mathbb{R}^m$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$, A ανοικτό, παραγωγίσιμες. Τότε έχουμε:

Διανυσματικές Πράξεις

① **Πολλ/σμός με σταθερές:** $J(c\vec{F})(\vec{x}) = c\, J\vec{F}(\vec{x}) \quad \forall c \in \mathbb{R}$

② **Άθροισμα συναρτήσεων:** $J(\vec{F}+\vec{G})(\vec{x}) = J\vec{F}(\vec{x}) + J\vec{G}(\vec{x})$

③ **Γινόμενο βαθμωτών συν/σεων:** $\vec{\nabla}(fg)(\vec{x}) = g(\vec{x})\,\vec{\nabla} f(\vec{x}) + f(\vec{x})\,\vec{\nabla} g(\vec{x})$

↳ $m=1 \rightsquigarrow \vec{F} \equiv f,\ \vec{G} \equiv g$ (βαθμ.)

④ **Πηλίκο βαθμωτών συν/σεων:** $\vec{\nabla}\left(f/g\right)(\vec{x}) = \dfrac{g(\vec{x})\,\vec{\nabla} f(\vec{x}) - f(\vec{x})\,\vec{\nabla} g(\vec{x})}{[g(\vec{x})]^2}$ αν $g(\vec{x}) \neq 0$

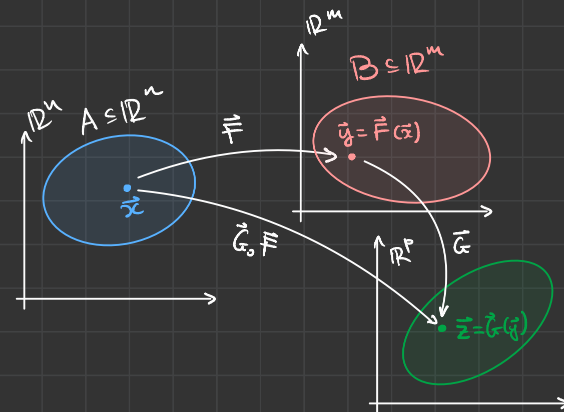
⑤ **Κανόνας Αλυσίδας:** Έστω παραγωγίσιμες συναρτήσεις $\vec{F} : A \to \mathbb{R}^m$ ($A \subseteq \mathbb{R}^n$), $\vec{G} : B \to \mathbb{R}^p$ ($B \subseteq \mathbb{R}^m$)

Τότε: $$\boxed{\underbrace{J(\vec{G}\circ\vec{F})(\vec{x})}_{p\times n} = \underbrace{J\vec{G}(\overbrace{\vec{F}(\vec{x})}^{\vec{y}\in B\subseteq\mathbb{R}^m})}_{p\times m} \cdot \underbrace{J\vec{F}(\vec{x})}_{m\times n}}$$

με την προϋπόθεση ότι $\vec{y} = \vec{F}(\vec{x}) \in B$

ΠΡΟΣΟΧΗ ΣΤΗ ΣΕΙΡΑ!!

Σε μία διάσταση: $(g\circ f)'(x) = \dfrac{d}{dx} g(f(x)) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$



__Παράδειγμα:__ Έστω οι συναρτήσεις $g(u,v,w) = u^2 + v^2 - w$ κ' $\vec{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2y \\ y^2 \\ e^{-xz} \end{pmatrix}$. Να επιβεβαιωθεί ο κανόνας της αλυσίδας για τη συνάρτηση

$h(x,y,z) = g\left(\vec{F}(x,y,z)\right)$.

$\rightsquigarrow$ __Απευθείας υπολογισμός:__

$$h(x,y,z) = g\left(\vec{F}(x,y,z)\right) = g\left(\overset{u}{\widetilde{x^2y}}, \overset{v}{\widetilde{y^2}}, \overset{w}{\widetilde{e^{-xz}}}\right) = \overset{u^2}{\overline{(x^2y)^2}} \overset{+}{+} \overset{v^2}{\overline{(y^2)^2}} \overset{-}{-} \overset{w}{\overline{e^{-xz}}} = x^4y^2 + y^4 - e^{-xz}$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} h(x,y,z) = \left(\frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y}, \frac{\partial h}{\partial z}\right)$$

$$= \left(4x^3y^2 + ze^{-xz}, 2yx^4 + 4y^3, xe^{-xz}\right)$$

$\rightsquigarrow$ __Κανόνας αλυσίδας:__

$$\underbrace{\vec{\nabla} h(x,y,z)}_{1\times 3} = \underbrace{\underbrace{\vec{\nabla} g\left(\vec{F}(x,y,z)\right)}_{1\times 3} \cdot \underbrace{J\vec{F}(x,y,z)}_{3\times 3}}_{1\times 3}$$

① Υπολογίζουμε $\vec{\nabla} g(u,v,w) = (2u, 2v, -1)$

② Υπολογίζουμε $\vec{\nabla} g\left(\vec{F}(x,y,z)\right) = \vec{\nabla} g\left(\overset{u}{\widetilde{x^2y}}, \overset{v}{\widetilde{y^2}}, \overset{w}{\widetilde{e^{-xz}}}\right) = \left(2x^2y, 2y^2, -1\right)$

③ Υπολογίζουμε

$$J\vec{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} x^2y & \frac{\partial}{\partial y} x^2y & \frac{\partial}{\partial z} x^2y \\ \frac{\partial}{\partial x} y^2 & \frac{\partial}{\partial y} y^2 & \frac{\partial}{\partial z} y^2 \\ \frac{\partial}{\partial x} e^{-xz} & \frac{\partial}{\partial y} e^{-xz} & \frac{\partial}{\partial z} e^{-xz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xy & x^2 & 0 \\ 0 & 2y & 0 \\ -ze^{-xz} & 0 & -xe^{-xz} \end{pmatrix}$$

(4) Υπολογίζουμε $\vec{\nabla} g(\vec{F}(x,y,z)) \cdot J\vec{F}(x,y,z) = (2x^2y, 2y^2, -1) \cdot \begin{pmatrix} 2xy & x^2 & 0 \\ 0 & 2y & 0 \\ -ze^{-xz} & 0 & -xe^{-xz} \end{pmatrix}$

$$= \left(4x^3y^2 + ze^{-xz},\ 2x^4y + 4y^3,\ xe^{-xz}\right)$$

$\Rightarrow$ ✓

→ Κανόνας αλυσίδας - συμβολισμός Leibniz:

Θέτουμε $\begin{cases} u = x^2y \\ v = y^2 \\ w = e^{-xz} \end{cases}$

Θέλουμε να υπολογίσουμε τη βαθμίδα $\vec{\nabla} h(x,y,z) = \left(\frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y}, \frac{\partial h}{\partial z}\right)$

→ Έχουμε: $\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x} = 2u\frac{\partial}{\partial x}x^2y + 2v\frac{\partial}{\partial x}y^2 - 1\cdot\frac{\partial}{\partial x}e^{-xz}$

$$= 2u \cdot 2xy + 0 + ze^{-xz}$$

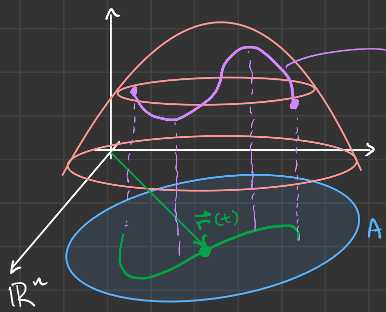
$$= 2x^2y \cdot 2xy + 0 + ze^{-xz}$$

$$= 4x^3y + ze^{-xz}$$

$\Rightarrow$ (Άσκηση)

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ:

① <u>Συνάρτηση κατά μήκος καμπύλης:</u> Έστω βαθμωτή συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ ($A \subseteq \mathbb{R}^n$), κ' έστω μια καμπύλη $\vec{r}: I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ($I \subseteq \mathbb{R}$) με $\vec{r}(t) \in A \ \forall t \in I$.



$f(\vec{r}(t))$ = η τιμή της f στο σημείο $\vec{r}(t)$ που περιγράφει τη θέση της καμπύλης τη χρ. στιγμή t.

<u>Ερώτημα:</u> Ποιος είναι ο ρυθμός μεταβολής της $f(\vec{r}(t))$ ως προς το χρόνο t?

Έστω $\phi(t) = f(\vec{r}(t))$, οπότε αναζητάμε το ρυθμό μεταβολής $\dfrac{d\phi}{dt}$.

Από τον κανόνα της αλυσίδας θα έχουμε:

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{d}{dt} f(\vec{r}(t)) = \vec{\nabla} f(\vec{r}(t)) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \frac{dx_n}{dt}}_{\text{Σε συμβολισμό Leibniz}}$$

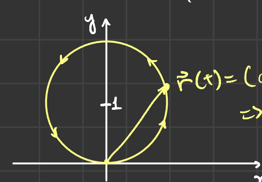
$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ βαθμωτή n μεταβλητών

$\vec{r}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$

$\Rightarrow$ διανυσματική μιας μεταβλητής

<u>Παράδειγμα:</u> Ένα κινητό κινείται στο επίπεδο κατά μήκος της <u>καμπύλης</u> $\vec{r}(t) = (\cos t, 1+\sin t)$. Η <u>θερμοκρασία</u> του επιπέδου στο σημείο x, y είναι $T(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$. Να βρεθεί η θ/σία κ' ο ρυθμός μεταβολής της θ/σίας του κινητού τη χρονική στιγμή t.



$\vec{r}(t) = (\cos t, 1+\sin t)$

$\Rightarrow$ Θερμοκρασία τη χ. στιγμή t: $\Theta(t) = T(\cos t, 1+\sin t)$

$\Rightarrow \Theta(t) = e^{-\cos^2 t - (1+\sin t)^2}$

<u>Ρυθμός μεταβολής θ/σίας:</u>

$$\frac{d\Theta}{dt} = \frac{\partial T}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial T}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

$$= (-2x)e^{-x^2-y^2}(-\sin t) + (-2y)e^{-x^2-y^2}\cos t$$

$$= 2\cos t \cancel{\sin t}\, e^{-x^2-y^2} - 2(1+\cancel{\sin t})\cos t\, e^{-x^2-y^2}$$

$$= -2\cos t\, e^{-x^2-y^2}$$

αντικαθιστώ $x = \cos t$, $y = 1+\sin t$