ΥΠΕΝΘΥΜΙΣΗ (ΕΙΔΙΚΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΚΑΝΟΝΑ ΑΛΥΣΙΔΑΣ):

- Έστω (βαθμωτή) συνάρτηση πολλών μεταβλητών $f(u, v, w, \dots)$

- Έστω αλλαγή μεταβλητών

$$
\begin{aligned}
u &= u(x, y, z, \dots) \\
v &= v(x, y, z, \dots) \\
w &= w(x, y, z, \dots)
\end{aligned}
$$

- Τότε ο κανόνας της αλυσίδας μας επιτρέπει να εκφράσουμε/υπολογίσουμε τις μερικές παραγώγους της f ως προς τις καινούριες μεταβλητές $x, y, z, \dots$ ως εξής:

κανόνας αλυσίδας

$$\frac{\partial}{\partial x} f\big(u(x,y,z,\dots), v(x,y,z,\dots), w(x,y,z,\dots), \dots\big) \equiv \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x} + \dots$$

$$\text{————} \; \| \; \text{————} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y} + \dots$$

$$\text{————} \; \| \; \text{————} \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial z} + \dots$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ:

Έστω η συνάρτηση $f(r,\theta) = e^{-r^2/2}$ σε πολικές συντεταγμένες $r=\sqrt{x^2+y^2}$, $\theta = \arctan y/x$. Να υπολογισθούν οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Θα έχουμε:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \cancelto{0}{\frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x}} = \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \cancelto{0}{\frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial y}} = \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y}$$

$\Rightarrow$ Αρκεί να υπολογίσουμε τις $\frac{\partial f}{\partial r}$, $\frac{\partial r}{\partial x}$, $\frac{\partial r}{\partial y}$

$$\rightarrow \frac{\partial f}{\partial r} = -re^{-r^2/2}$$

$$\rightarrow \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2+y^2} = \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2) = \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x^2+y^2}}\cdot \cancel{2}x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = x/r$$

$$\rightarrow \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\sqrt{x^2+y^2} = \text{—— // ——} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = y/r$$

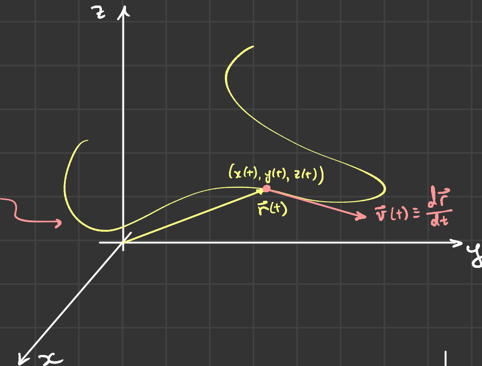
Άρα, έχουμε:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial r}\dfrac{\partial r}{\partial x} = -\cancel{r}e^{-r^2/2}\cdot\dfrac{x}{\cancel{r}} = -xe^{-r^2/2} \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial r}\dfrac{\partial r}{\partial y} = \text{—— // ——} = -ye^{-r^2/2} \end{cases}$$

ΚΑΜΠΥΛΕΣ & ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ $(n=1,\ m>1)$

Έστω καμπύλη $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t), \dots)$

Ερμηνεία: κινητό που κινείται κατά μήκος της καμπύλης $\vec{r}(t)$



Η ταχύτητα του κινητού τη χρονική στιγμή t είναι το διάνυσμα

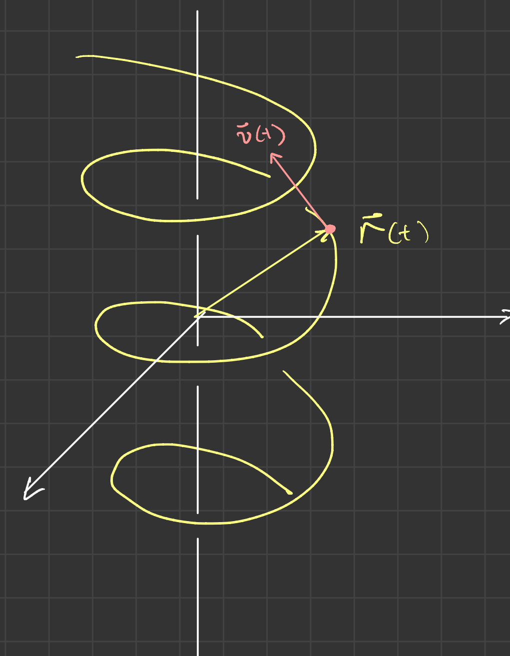
$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}, \dots\right)$$

Η ταχύτητα του κινητού τη χ. στιγμή t είναι εφαπτόμενη στην καμπύλη $\vec{r}(t)$ κ' καλείται κ' εφαπτόμενο διάνυσμα της $\vec{r}(t)$ τη χ. στιγμή t.

Αντίστοιχα, η εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας τη χ. στιγμή t_0 θα είναι:

$$\vec{l}(t) = \underbrace{\vec{r}(t_0)}_{\text{αρχική θέση}} + \underbrace{\vec{v}(t_0)}_{\text{ταχύτητα}}(t - t_0)$$

Ευθύγραμμη ομαλή κίνηση με αρχική θέση $\vec{r}(t_0)$ κ' ταχύτητα $\vec{v}(t_0)$



Π.χ.: Έστω $\vec{r}(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t), t)$. Να βρεθεί η ταχύτητα τη στιγμή $t_0 = 1/2$.

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = (-2\pi \sin(2\pi t), 2\pi \cos(2\pi t), 1)$$

$$\Rightarrow \boxed{\left.\frac{d\vec{r}}{dt}\right|_{t=1/2} = (0, -2\pi, 1)}$$

ταχύτητα τη χ. στιγμή $t_0 = 1/2$

Εξίσωση εφαπτόμενης ευθείας: $\vec{l}(t) = \overbrace{(-1, 0, 1/2)}^{\vec{r}(1/2)} + \overbrace{(0, -2\pi, 1)}^{\vec{v}(1/2)}(t - 1/2)$

ΡΥΘΜΟΣ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΚΑΤΑ ΜΗΚΟΣ ΚΑΜΠΥΛΗΣ

- Έστω συνάρτηση $\underbrace{f(x, y, z, \dots)}_{f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}}$ κ' καμπύλη $\underbrace{\vec{r}(t)}_{\vec{r}:\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n} = (x(t), y(t), z(t), \dots)$

- Ρυθμός μεταβολής της f κατά μήκος της καμπύλης $\vec{r}(t)$:

Βαθμίδα ταχύτητα

$$\boxed{\frac{d}{dt} f(\vec{r}(t)) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt} + \dots = \vec{\nabla} f(\vec{r}(t)) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}}$$

Π.χ.: Έστω η καμπύλη $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t)$ κ' η συνάρτηση $f(x,y) = x^2 + xy + y^2$

↳ Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της f κατά μήκος της $\vec{r}(t)$ τη χ. στιγμή $t=0$.

Έχουμε: $\frac{d}{dt} f(\vec{r}(t)) = \vec{\nabla} f(\vec{r}(t)) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}$

→ $\vec{\nabla} f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (2x + y, x + 2y)$

$(x,y) \rightsquigarrow \vec{r}(0) = (1,0)$

→ $\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(\cos t, \sin t) = (-\sin t, \cos t)$

→ Τη χ. στιγμή $t=0$, έχουμε $\vec{r}(0) = (1,0)$, $\left.\frac{d\vec{r}}{dt}\right|_{t=0} = (0,1)$ ⇒ $\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f(\vec{r}(t)) = \vec{\nabla} f(\vec{r}(0)) \cdot \left.\frac{d\vec{r}}{dt}\right|_{t=0} = (2,1)\cdot(0,1) = 1$

> Άσκηση: Υπολογίστε την παράσταση $f(\vec{r}(t))$ κ' παραγωγίστε απευθείας.

ΕΙΔΙΚΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ: ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ ΚΑΤΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ

αρχική θέση

ταχύτητα

- Αν η καμπύλη $\vec{r}(t)$ αναπαριστά μία ευθεία (κατεύθυνση στο χώρο) θα έχουμε $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v} \cdot t$

- Σε αυτήν την περίπτωση, ο ρυθμός μεταβολής της f κατά μήκος της $\vec{r}(t)$ θα είναι:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dt} f(\vec{r}(t)) &= \vec{\nabla} f(\vec{r}(t)) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \\ \frac{d\vec{r}}{dt} &= \frac{d}{dt}\left[\vec{r}_0 + \vec{v}\, t\right] = \vec{v} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f(\vec{r}(t)) = \vec{\nabla} f(\vec{r}_0) \cdot \vec{v}}$$

Παράγωγος της f κατά την κατεύθυνση $\vec{v}$

- Παράγωγος της f στο σημείο $\vec{r}_0$ κατά την κατεύθυνση $\vec{v}$:

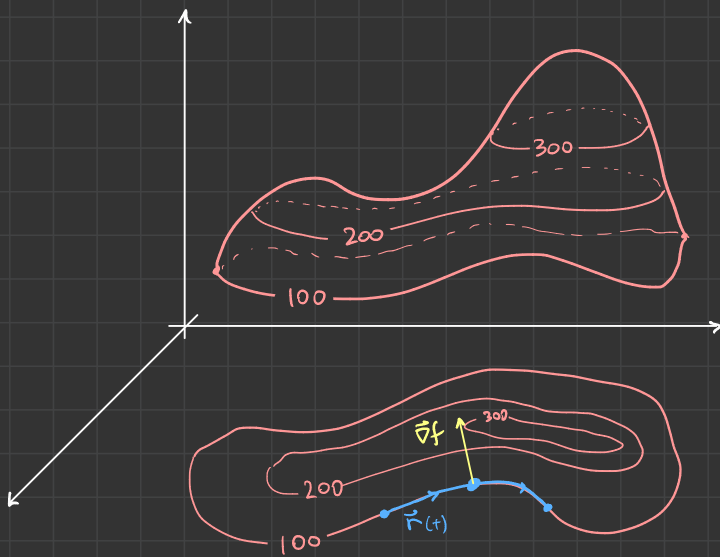
$$\boxed{\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f(\vec{r}_0 + \vec{v}\, t) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\vec{r}_0 + \vec{v}\, t) - f(\vec{r}_0)}{t} = \vec{\nabla} f(\vec{r}_0) \cdot \vec{v}}$$

Συμβολισμοί:

$D_{\vec{v}} f$, $\nabla_{\vec{v}} f$, $f'(\vec{r}_0; \vec{v})$, ...

$\Rightarrow$ Βαθμίδα $\vec{\nabla} f$ = διάνυσμα που μας επιτρέπει να γράφουμε την κατά κατ/ση παράγωγο ως εσωτερικό γινόμενο

Γεωμετρική Ερμηνεία της Βαθμίδας



Έστω συνάρτηση $f(x,y,z,\dots)$ κ' καμπύλη $\vec r(t) = (x(t), y(t), z(t), \dots)$

Αν η $\vec r(t)$ διατηρεί την f σταθερή (δηλ. κείται σε μία ισοϋψή της f)

Θα έχουμε $f(\vec r(t)) = \text{const.} \Rightarrow \dfrac{d}{dt} f(\vec r(t)) = 0$

$$\Rightarrow \vec\nabla f(\vec r(t)) \cdot \underbrace{\frac{d\vec r}{dt}} = 0$$

↳ εφαπτόμενο στην καμπύλη ⇒ εφαπτόμενο στην ισοϋψή

⇒ Βαθμίδα ⊥ κάθε εφαπτόμενο δ/μα ισοϋψούς

⇒ $\boxed{\text{Βαθμίδα ⊥ ισοσταθμικές καμπύλες / επιφάνειες / σύνολα}}$

Μάλιστα: $\boxed{\text{Βαθμίδα = κατεύθυνση της μέγιστης / ταχύτερης ανόδου}}$

Γιατί άνοδος: $\dfrac{d}{dt} f(\vec r(t)) = \vec\nabla f \cdot \dfrac{d\vec r}{dt}$

αν κινηθούμε κατά μήκος της Βαθμίδας: $\left.\dfrac{d\vec r}{dt} = \vec\nabla f \right\} \Rightarrow \dfrac{df}{dt} = \|\vec\nabla f\|^2 \geq 0 \Rightarrow$ αύξηση