

ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ
ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ – 19.02.2025

ΤΜΗΜΑ ΔΙΑΜΑΝΤΗ-ΜΕΡΤΙΚΟΠΟΥΛΟΥ

Διάρκεια: 3 ώρες.

Οδηγίες: Λύστε όλα τα θέματα. Η μέγιστη βαθμολογία είναι 100 μονάδες. Γράψτε τα θέματα κάθε ενότητας σε διαφορετική κόλλα. Χρησιμοποιήστε πρόχειρο. Δεν επιτρέπεται η χρήση αριθμομηχανής.

ΕΝΟΤΗΤΑ Ι

Θέμα 1 [15 μονάδες]. Έστω η συνάρτηση

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2 + y^6} & \text{αν } x, y \neq 0, \\ 0 & \text{άλλως.} \end{cases}$$

- (1) Υπολογίστε το όριο της $f(x, y)$ καθώς $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ κατά μήκος του άξονα των y .
- (2) Υπολογίστε το όριο της $f(x, y)$ καθώς $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ κατά μήκος της καμπύλης $x = y^3$.
- (3) Δείξτε ότι η f δεν είναι συνεχής στο $(0, 0)$. Μπορείτε να βρείτε κάποια τιμή για το $f(0, 0)$ που να κάνει την f συνεχή στο $(0, 0)$? ☞

Θέμα 2 [20 μονάδες]. Έστω $f(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \dots + x_n^2$ και $\phi(x_1, \dots, x_n) = \sqrt{f(x_1, \dots, x_n)}$, $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$.

- (α') Υπολογίστε τις μερικές παραγώγους $\partial f / \partial x_i$ και $\partial \phi / \partial x_i$ για κάθε $i = 1, \dots, n$.
- (β') Υπολογίστε προσεγγιστικά σε πρώτη τάξη την τιμή της παράστασης $\sqrt{2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 9^2 + 6 \cdot 1^2}$. ☞

Θέμα 3 [15 μονάδες]. Έστω το χωρίο $D = \{(x, y) : y \leq 1 - x^2 \text{ και } y \geq x^2 - 3\}$.

- (α') Σχεδιάστε το χωρίο D .
- (β') Υπολογίστε το διπλό ολοκλήρωμα $\iint_D x(y - 1) dA$. Σχολιάστε. ☞

ΕΝΟΤΗΤΑ ΙΙ

Θέμα 4 [15 μονάδες]. Δίδεται η καμπύλη $\vec{\sigma}(t) = (2t, t^2, \log t)$ με $t > 0$. Να ευρεθεί το μήκος του τόξου μεταξύ των σημείων $(2, 1, 0)$ και $(4, 4, \log 2)$. ☞

Θέμα 5 [15 μονάδες]. Δίδεται το διανυσματικό πεδίο $\vec{F} = (y, -x, 0)$. Να επιβεβαιωθεί το θεώρημα Stokes για την παράπλευρη επιφάνεια κυλίνδρου ακτίνας R και ύψους H ,

$$S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = R^2, z_1 \leq z \leq z_1 + H\} . \quad \text{☞}$$

Θέμα 6 [20 μονάδες]. Δίδεται το διανυσματικό πεδίο $\vec{F} = \vec{r}$. Να επιβεβαιωθεί το θεώρημα Gauss για την κλειστή επιφάνεια η οποία καθορίζεται από ημισφαίριο ακτίνας R και το επίπεδο (x, y) ,

$$S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z \geq 0\} \cup \{(x, y, 0) : x^2 + y^2 \leq R^2\} . \quad \text{☞}$$

Καλή επιτυχία!