

ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

ΕΞΕΤΑΣΗ ΙΟΥΝΙΟΥ — 15.06.2026

ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΕΣ: Α. ΟΙΚΟΝΟΜΟΥ & Γ. ΠΑΠΑΘΑΝΑΣΙΟΥ

Διάρκεια: 3 ώρες.

Οδηγίες: Λύστε όλα τα θέματα. Η μέγιστη βαθμολογία είναι 100 μονάδες. Δεν επιτρέπεται η χρήση αριθμομηχανής. Χρησιμοποιήστε πρόχειρο.

Θέμα 1 [30 μονάδες].

- (1) Να εξετάσετε αν υπάρχει το όριο

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 - x^2y^2 + y^4}{x^2 + y^2}$$

και, στην περίπτωση που υπάρχει, να το υπολογίσετε.

- (2) Η θέση ενός σωματιδίου, $\mathbf{r}(t)$, ως συνάρτηση του χρόνου t από τη στιγμή έναρξης της παρατήρησής του δίνεται από τη διαδρομή $\mathbf{r}(t) = (4 \cos t, 4 \sin t, 3t)$, $t \geq 0$. Να βρεθεί το μήκος της καμπύλης που θα έχει διαγράψει μέχρι τη χρονική στιγμή $t = 2\pi$. Πότε θα φθάσει το σωματίδιο στην επιφάνεια της σφαίρας $x^2 + y^2 + z^2 = 52$ και σε ποιο σημείο της;
- (3) Να βρεθεί η εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου στο γράφημα της συνάρτησης

$$f(x, y) = x^2 e^{-y} + x^3 - y \cos(\pi x)$$

στο σημείο $(x_0, y_0) = (1, 0)$.

Θέμα 2 [30 μονάδες].

- (1) Να βρεθεί η κατευθυνόμενη παράγωγος της συνάρτησης

$$g(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

στο σημείο $(1, 1, 1)$ για κάθε κατεύθυνση (a, b, c) με $\|(a, b, c)\| = 1$. Ποια είναι η κατεύθυνση ταχύτερης αύξησης της g στο σημείο $(1, 1, 1)$;

- (2) Να βρεθεί η μέγιστη τιμή της συνάρτησης $f(x, y) = 10xy$ στον κύκλο $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 18\}$.
- (3) Έστω $\mathbf{F}(x, y, z) = (3x^2, 3x^2y, 3z(x+1))$. Να υπολογιστεί ο στροβιλισμός $(\nabla \times \mathbf{F})(x, y, z)$ και να εξεταστεί αν το $\mathbf{F}$ είναι πεδίο κλίσεων, δηλαδή αν υπάρχει $f(x, y, z)$ τέτοια ώστε $\mathbf{F} = \nabla f$.
- (4) Υπολογίστε το έργο $W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{s}$ που παράγει το πεδίο δυνάμεων $\mathbf{F}(x, y, z)$ του υποερωτήματος (3) πάνω στην καμπύλη $\vec{c}(t) = (x(t), y(t), z(t)) = (t, t^2, \log(1+t))$ με $t \in [0, 1]$.

Θέμα 3 [40 μονάδες]. Έστω διανυσματικό πεδίο $\vec{F} = (-2x, 2y, x^2z + x^2y^2)$ και χωρίο W που περικλείεται από την επιφάνεια παραβολοειδούς $z = 4 - x^2 - y^2 \geq 0$ και το επίπεδο $z = 0$.

- (1) Υπολογίστε την απόκλιση $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}$.
- (2) Σχεδιάστε το χωρίο W , βρείτε μια παραμετροποίηση για καθεμία από τις δύο επιφάνειες του συνόρου του ∂W , και υπολογίστε το στοιχείο προσανατολισμένης επιφάνειας $d\vec{S}$ πάνω σε αυτές.
- (3) Υπολογίστε το επιφανειακό ολοκλήρωμα $\iint_{\partial W} \vec{F} \cdot d\vec{S}$ με τη βοήθεια του υποερωτήματος (2).
- (4) Υπολογίστε το βαθμωτό ολοκλήρωμα $\iiint_W (\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) dx dy dz$ με τη βοήθεια του υποερωτήματος (1).
- (5) Να συγκριθούν τα αποτελέσματα των τελευταίων δύο υποερωτημάτων. Ποιο θεώρημα υπαγορεύει τη σχέση τους; ♦