

ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ
ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ — 15.09.2026

ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΕΣ: Α. ΟΙΚΟΝΟΜΟΥ & Γ. ΠΑΠΑΘΑΝΑΣΙΟΥ

Διάρκεια: 3 ώρες.

Οδηγίες: Λύστε όλα τα θέματα. Η μέγιστη βαθμολογία είναι 100 μονάδες. Δεν επιτρέπεται η χρήση αριθμομηχανής. Χρησιμοποιήστε πρόχειρο.

Θέμα 1 [30 μονάδες].

- (1) Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^3}{x^4 + y^6}, & \text{αν } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{αν } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Να βρείτε τις κατευθυνόμενες παραγώγους της στο σημείο $(0, 0)$, για κάθε κατεύθυνση (a, b) , με $\|(a, b)\| = 1$. Να εξετάσετε αν η $f(x, y)$ είναι συνεχής και αν είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 0)$.

- (2) Βρείτε τα σημεία της επιφάνειας $2x^2 + 8y^2 - 2z^2 = 8$, στα οποία τα αντίστοιχα εφαπτόμενα επίπεδα της είναι κάθετα στο διάνυσμα $(2, 2, 1)$.

- (3) Η συνάρτηση $f(x, y)$ ικανοποιεί τη σχέση

$$x^3(f(x, y))^2 - (f(x, y))^3 yx = 0.$$

Επιπλέον, δίνεται ότι $f(1, 1) \neq 0$. Να υπολογίσετε την κλίση $\nabla f(1, 1)$.

Θέμα 2 [25 μονάδες].

- (1) Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x, y) = \frac{3 \sin(2\pi x)}{1 + 4y^2}.$$

Να βρεθούν όλα τα κρίσιμα σημεία της (δηλαδή τα σημεία που μηδενίζουν την κλίση της) και να προσδιοριστούν ποια είναι τοπικά μέγιστα, ποια είναι τοπικά ελάχιστα και ποια είναι σαγματικά σημεία.

- (2) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $f(x, y) = 6x^2 - 4y^2 + 4y$ στον μοναδιαίο δίσκο $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

- (3) Θεωρούμε τη διαδρομή $\mathbf{r}(t) = (t + 2, \frac{\sqrt{2}}{2}t^2, \frac{1}{3}t^3)$. Να γραφεί μια παραμετρική εξίσωση για την εφαπτομένη ευθεία της διαδρομής στο σημείο $(2, 0, 0)$ και να βρεθεί το μήκος τόξου της διαδρομής για $t \in [0, 3]$.

Θέμα 3 [45 μονάδες].

- (1) Έστω διανυσματικό πεδίο $\vec{F} = (zy, z^2, xy)$. Υπολογίστε την απόκλιση $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}$ και τον στροβιλισμό $\vec{\nabla} \times \vec{F}$. Είναι το πεδίο συντηρητικό ή όχι, και γιατί;

- (2) Δίνεται η επιφάνεια κώνου, $S = \{(x, y, z) : \frac{z^2}{4} - x^2 - y^2 = 0 \text{ και } 2 \geq z \geq 0\}$.

Να σχεδιαστεί η επιφάνεια, να βρεθεί μια παραμετροποίησή της και να υπολογιστεί το στοιχείο προσανατολισμένης επιφάνειας $d\vec{S}$ πάνω σε αυτή.

- (3) Να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\oint_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{s}$ για το $\vec{F}$ του υποερωτήματος 1, επί της καμπύλης ∂S του συνόρου της επιφάνειας S από το υποερώτημα 2.

- (4) Να υπολογιστεί το επιφανειακό ολοκλήρωμα $\int_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S}$ για τα $\vec{F}, S$ των υποερωτημάτων 1, 2, αντίστοιχα.

- (5) Να συγκριθούν τα αποτελέσματα των τελευταίων δύο υποερωτημάτων. Ποιο θεώρημα υπαγορεύει τη σχέση τους; ♦

— Καλή επιτυχία! —