

Βιβλίο στον ακαδημαϊσμό:

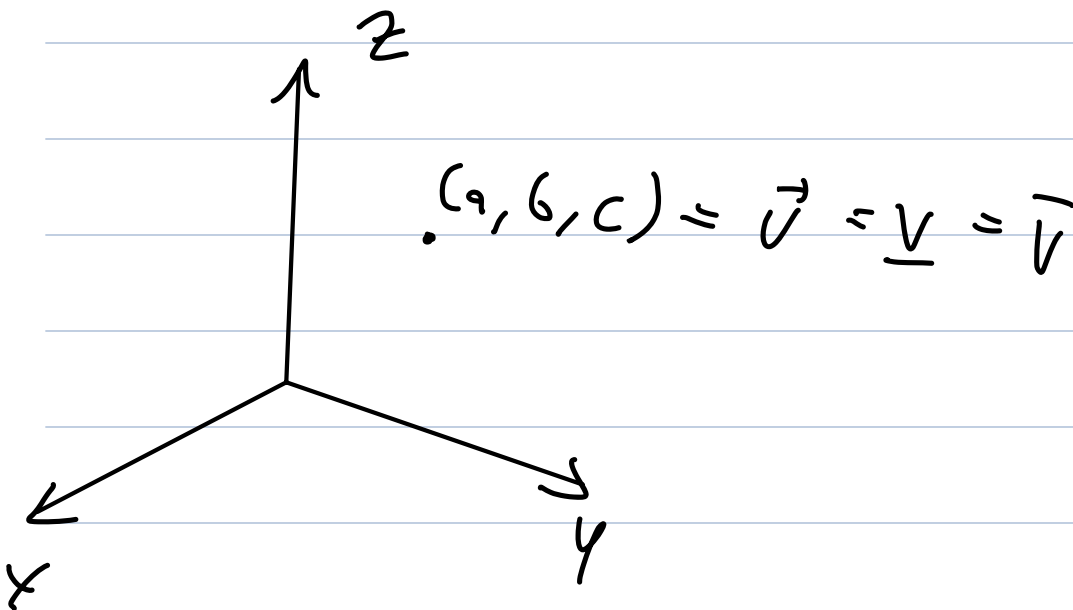
"Διαφομετρικός Λογισμός"
του Marsden Tromba

Εισαγωγή στα δακτύματα:

① Δακτύματα

$$(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$$

Ειδικά $n=2$ επίπεδο
 $n=3$ χώρος



Διάνυσμα $\Leftrightarrow$ Σημείο

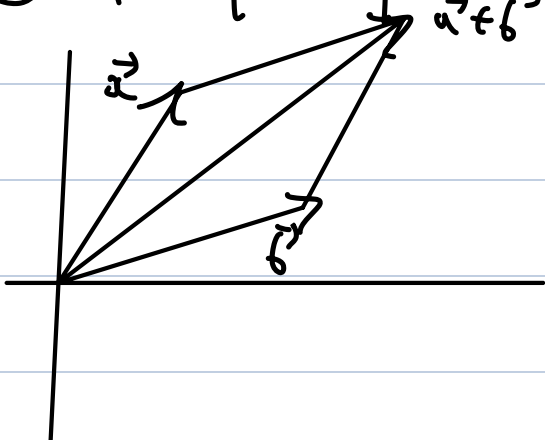
② Πράξεις

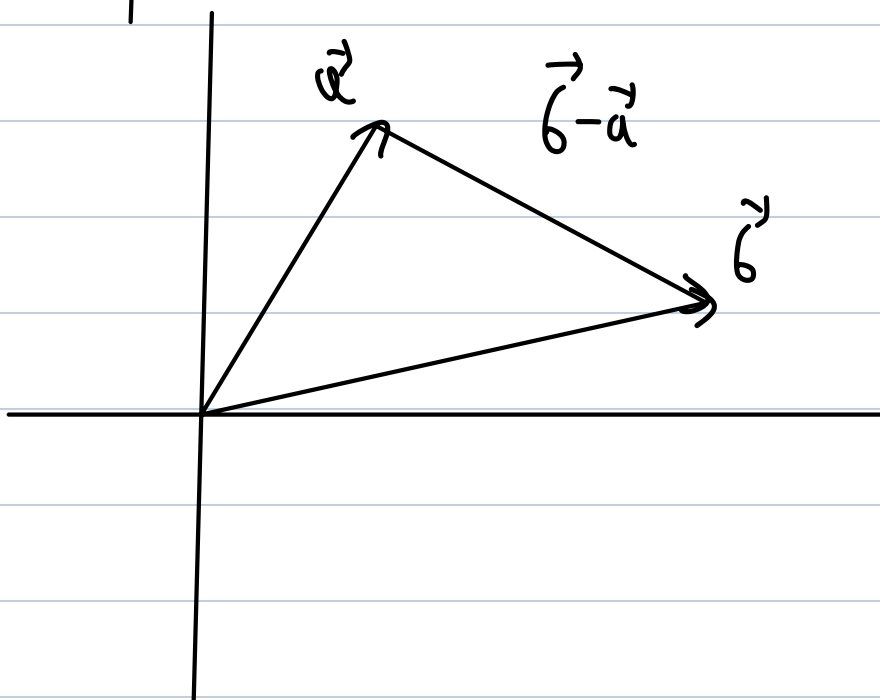
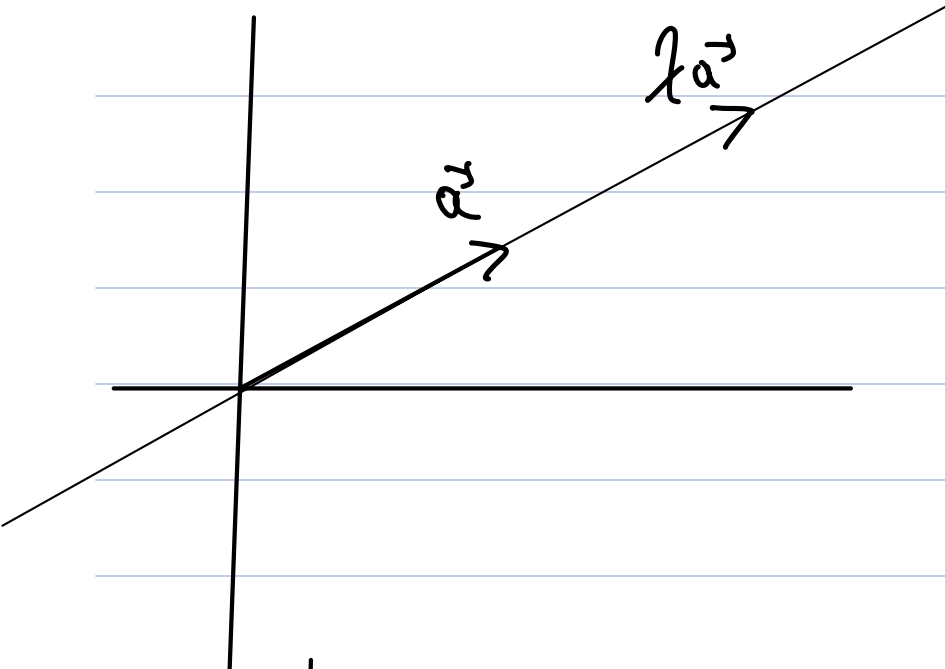
- 1) Άθροισμα
- 2) Βαθμωτός Πολλαπλασιασμός
- 3) Διαφορά

4) Εσωτερικό γινόμενο

5) Εξωτερικό γινόμενο (μόνο για $n=3$)

③ Άθροισμα - Διαφορά





④ Ιδιότητες διαν. χώρου

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$$

$$\exists \vec{0} \text{ ώστε } \forall \vec{a} : \vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$$

$$\forall \vec{a} \exists (-\vec{a}) \text{ ώστε } \vec{a} + (-\vec{a}) = (-\vec{a}) + \vec{a} = \vec{0}$$

$$\lambda(\mu \cdot \vec{a}) = (\lambda \cdot \mu) \vec{a}$$

$$(\lambda + \mu) \vec{a} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{a}$$

$$\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda \vec{a} + \lambda \vec{b}$$

$$1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$$

⑤ Βάση - Διάσταση

$$\mathbb{R}^n = \{ (a_1, a_2, \dots, a_n) : a_i \in \mathbb{R} \forall i=1,2,\dots,n \}$$

Μια βάση του $\mathbb{R}^n$ είναι ένα
 σύνολο διανυσμάτων $B = \{ \vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n \}$

ώστε κάθε $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ να γράφεται ως
μοναδικός τρόπος ως $\vec{v} = \lambda_1 \vec{b}_1 + \lambda_2 \vec{b}_2 + \dots + \lambda_n \vec{b}_n$

⑥ Συνήθης βάση του $\mathbb{R}^n$

$$B = \{ (1, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), (0, 0, 1, \dots, 0), \\ \dots, (0, 0, \dots, 0, 1, 0), (0, 0, \dots, 0, 0, 1) \}$$

$$= \{ \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \dots, \vec{e}_{n-1}, \vec{e}_n \}$$

συνήθης βάση

$$\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$$

$$\vec{v} = v_1 \vec{e}_1 + v_2 \vec{e}_2 + \dots + v_n \vec{e}_n$$

Στον $\mathbb{R}^3$:

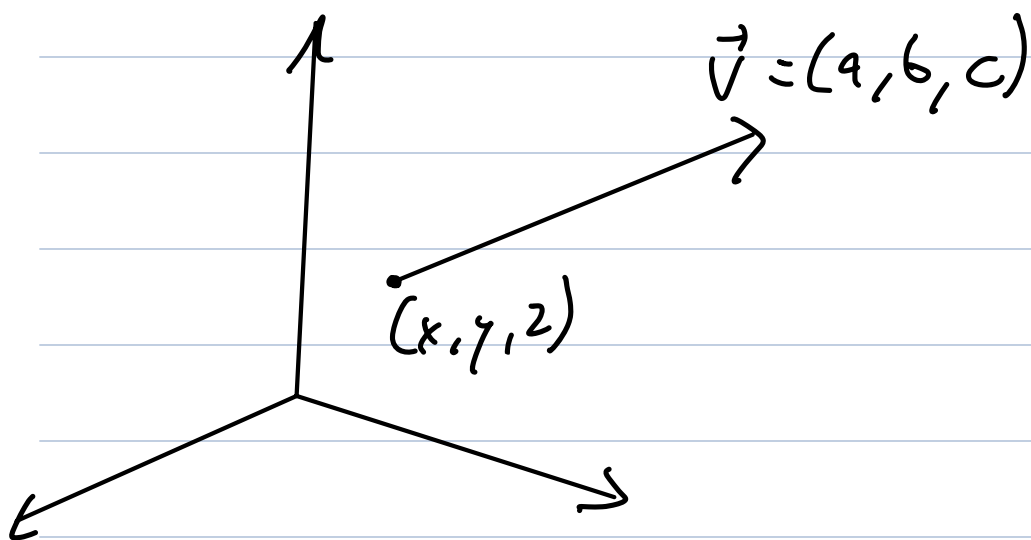
$$\hat{i} = (1, 0, 0)$$

$$\hat{j} = (0, 1, 0)$$

$$\hat{k} = (0, 0, 1)$$

π.χ. $(1, -1, 0) = \hat{i} - \hat{j}$

7) Εξίσωση ευθείας από σημείο
και δοσμένη διεύθυνση



(x, y, z) τυχαίο σημείο της
ευθείας

$$x = x_0 + at$$

$$y = y_0 + bt$$

$$z = z_0 + ct$$

$$l(t) = \vec{x} + t\vec{v}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Παραμετρική εξίσωση της ευθείας

Εξίσωση Ευθείας (γν-σφαρ.)

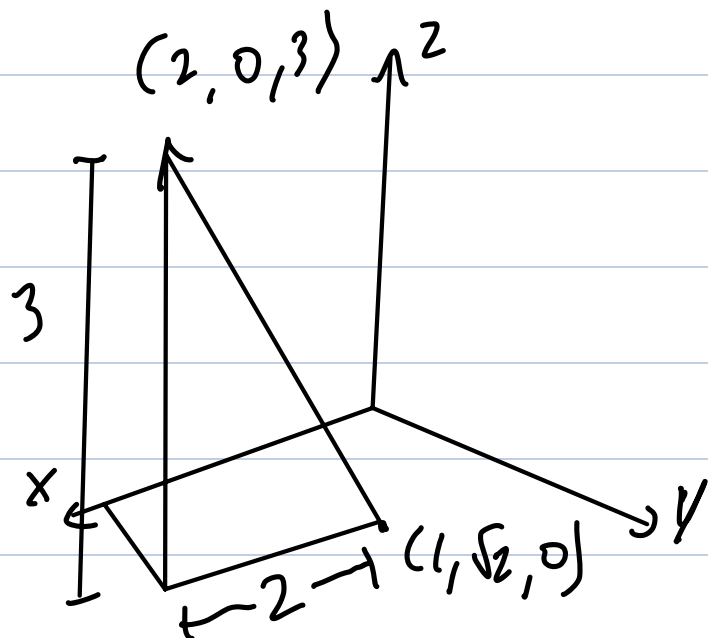
$$\frac{x-x_1}{a} = \frac{y-y_1}{b} = \frac{z-z_1}{c}$$

8) Παράδειγμα

Παραμετρική

Να βρεθεί η εξίσωση ευθείας στον $\mathbb{R}^3$ που διέρχεται από το σημείο

$(1, \sqrt{2}, 0)$ με διεύθυνση $(2, 0, 3)$



$$\frac{x-1}{2} = \frac{z}{3}$$

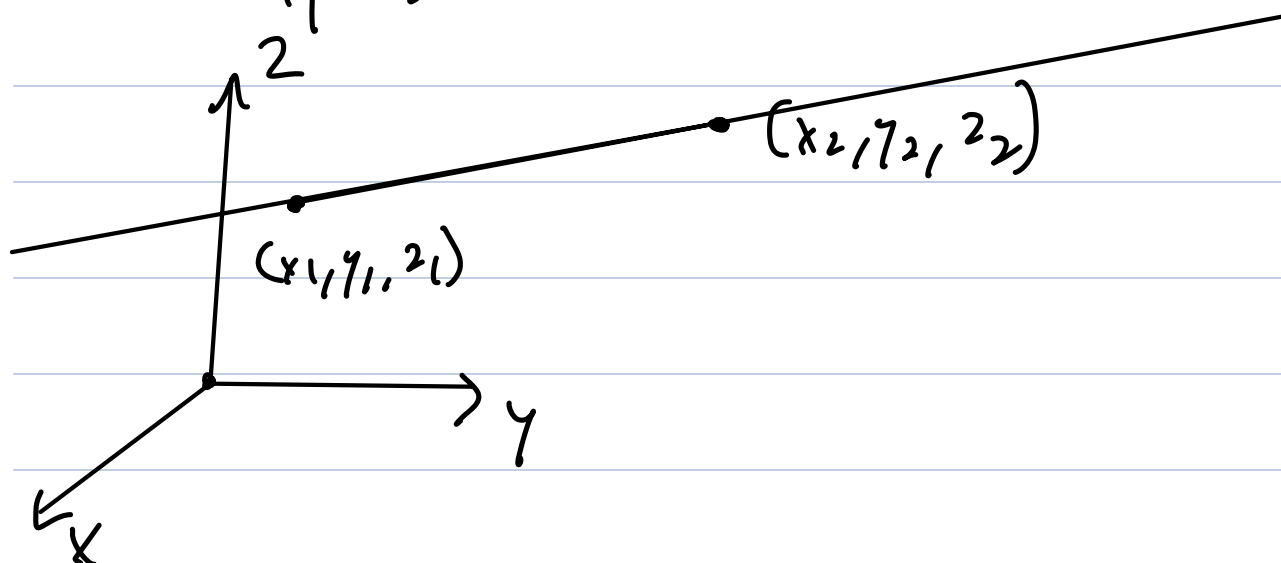
$$y = \sqrt{2}$$

$$z = \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$$

$$y = \sqrt{2}$$

$$(x, y, z) = (1, \sqrt{2}, 0) + t(2, 0, 3)$$

9) Εξίσωση ευθείας από 2 σημεία



$$x = x_1 + at$$

$$y = y_1 + bt$$

$$z = z_1 + ct$$

$$x_2 = x_1 + a$$

$$y_2 = y_1 + b$$

$$z_2 = z_1 + c$$

$$a = x_2 - x_1$$

$$b = y_2 - y_1$$

$$c = z_2 - z_1$$

$$x = x_1 + (x_2 - x_1)t$$

$$y = y_1 + (y_2 - y_1)t$$

$$z = z_1 + (z_2 - z_1)t$$

$$(x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + [(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)t]$$

$$l: \vec{r} = \vec{r}_1 + (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)t$$

$$l(t) = \vec{r}_1 + (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)t, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$\boxed{\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}}$$

Για $t \geq 0$ "Ελεγχόμενη" ηρκεσθςία

Για $t \in [0, 1]$: ευθύγρ. τμήμα
που συνδέει τα
 $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)$

⑩ Έλεγχος τοπίας ευθειών

$$h_1(t) = \vec{a}_1 + t \vec{b}_1, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$h_2(t) = \vec{a}_2 + t \vec{b}_2, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$\exists t_1, t_2 \text{ τ.ω. } h_1(t_1) = h_2(t_2)$$

⑪ Παραδείγματα

Τίμνονται οι ευθείες

$$(1+2t, 1-3t, t),$$

$$(3-t, -2, 1+t)$$

Σχέση λύσεων ορίσματος:

$$\begin{aligned} 1+2t_1 &= 3-t_2 \\ 1-3t_1 &= -2 \\ t_1 &= 1+t_2 \end{aligned}$$

$$2t_1 + t_2 = 2$$

$$-3t_1 + 0t_2 = -3$$

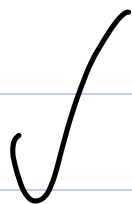
$$\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}$$

$$(3, -2, 1)$$

$$(3, -2, 1)$$



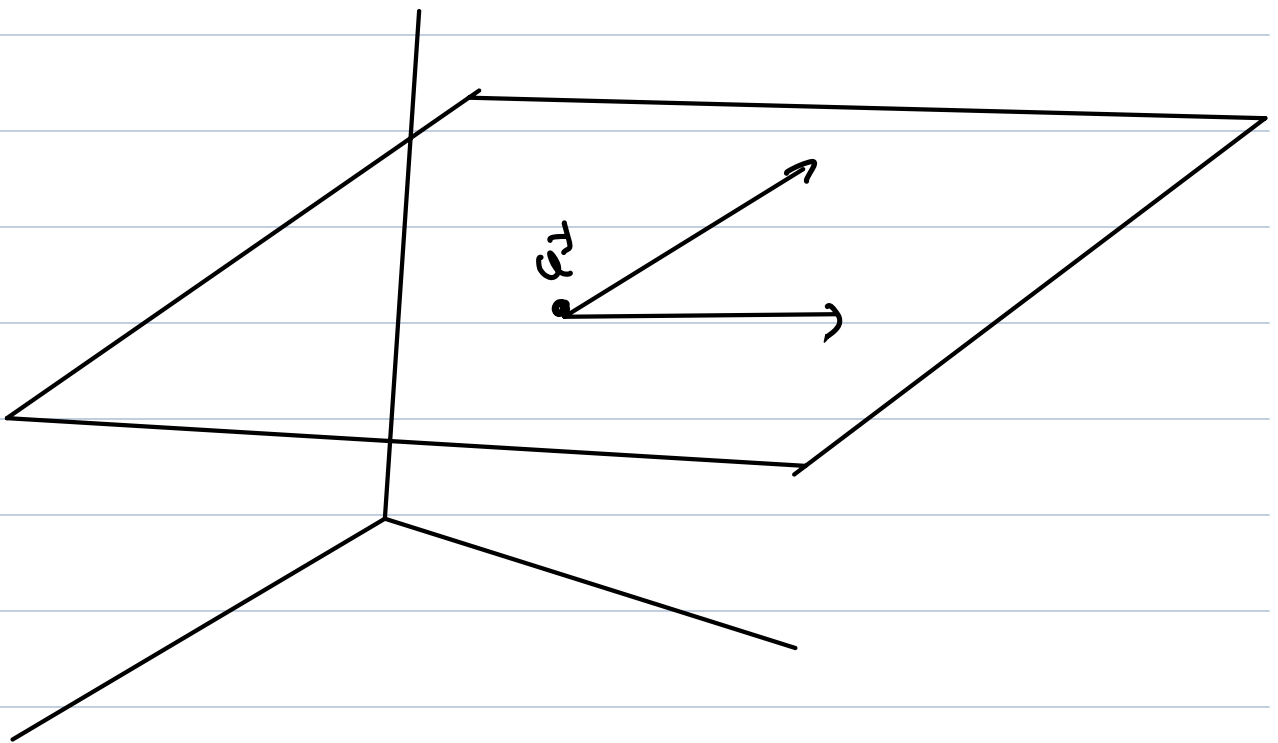
(12) Εξίσωση ελαστικού από σπρίνο
και δύο διευθύνσεις

Έστω σπρίνο $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$

$\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$

$\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$

(Ελαστικό από το $\vec{a}$ προς $\vec{v}, \vec{w}$)



$$p(t, s) = \vec{a} + t\vec{v} + s\vec{w}, \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

$$= (x_1 + tv_1 + sw_1, y_1 + tv_2 + sw_2, z_1 + tv_3 + sw_3), \quad t, s \in \mathbb{R}$$

(13) Εξίσωση εσφαίρας από 3 σημεία

Επίπεδο των τριών σημείων

$$\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$$

$$\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$$

$$\vec{c} = (x_3, y_3, z_3)$$

|||

επίπεδο που περιέχει τους $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

με διευθ. $\vec{v} = \vec{b} - \vec{a}, \quad \vec{w} = \vec{c} - \vec{a}$

ευθεία, πρέπει να είναι παράλληλες
(να έχουν την ίδια διεύθυνση) και να
διέρχονται από το ίδιο σημείο. Είναι:

$$l_1(t) = (1, 2, 3) + t(1, 0, -2)$$

$$l_2(t) = (2, 2, 1) + t(-2, 0, 4)$$

$$l_1(t) = \vec{a} + t\vec{v}$$

$$l_2(t) = \vec{b} + t\vec{w}$$

$\vec{w} = -2\vec{v}$ οπότε είναι παράλληλες

$$(x, y, z) - (1, 2, 3) = t(1, 0, -2)$$

$$x-1 = -\frac{z-3}{2}$$

$$\Rightarrow 2x-2 = -z+3$$

$$(x, y, z) - (2, 2, 1) = t(-2, 0, 4)$$

$$\frac{x-2}{-2} = \frac{z-1}{4}$$

$$4x-8 = -2z+2$$

$$2x - 4 = -z + 1$$

$$2x - 2 = -z + 3$$

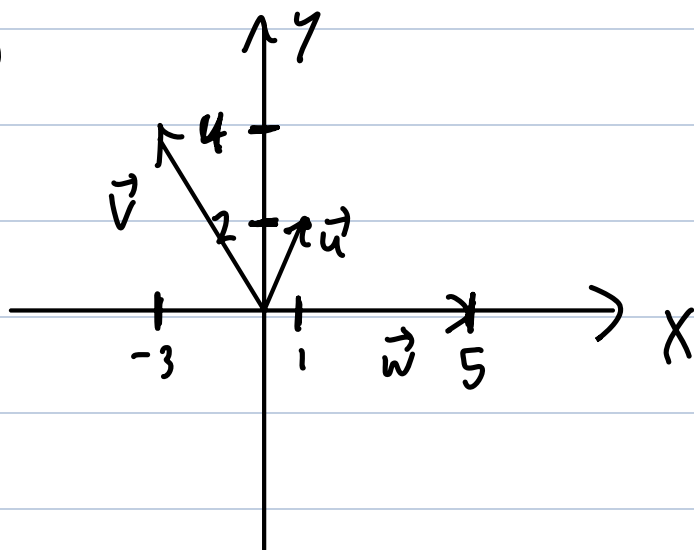
Άρα οι δύο εξισώσεις είναι ο ίδιες

ΠΕΡΙΣ

22. Έστω $u = (1, 2)$, $v = (-3, 4)$ και $w = (5, 0)$.

- (α) Σχεδιάστε αυτά τα διανύσματα στον $\mathbb{R}^2$.
 (β) Βρείτε πραγματικούς αριθμούς λ_1 και λ_2 τέτοιους, ώστε $w = \lambda_1 u + \lambda_2 v$.

α)



β) Θέλουμε, στην ουσία:

$$w_x = \lambda_1 u_x + \lambda_2 v_x$$

$$w_y = \lambda_1 u_y + \lambda_2 v_y$$

Κατασκευάζουμε πίνακα του συστήματος

Σελωσδςωνν:

$$\begin{bmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_x \\ w_y \end{bmatrix}$$

$\underset{\substack{\uparrow \\ A}}{\quad}$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} w_x \\ w_y \end{bmatrix}$$

$$\det A = u_x v_y - u_y v_x = 1 \cdot 4 - 2 \cdot (-3) = 10$$

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} v_y & -v_x \\ -u_y & u_x \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

οσδς

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \frac{20}{10} \\ \frac{-10}{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Άρα $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$

Επιβεβαιώνουμε :

$$\begin{aligned}\lambda_1 \vec{u} + \lambda_2 \vec{v} &= 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 + 3 \\ 4 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{n}\end{aligned}$$

26. Δείξτε ότι όλα τα σημεία της ευθείας
 $\mathbf{v} = (1, -1, 2) + t(2, 3, 1)$ ικανοποιούν την εξίσωση
 $5x - 3y - z - 6 = 0$.

Είναι $(x, y, z) = (1, -1, 2) + t(2, 3, 1)$

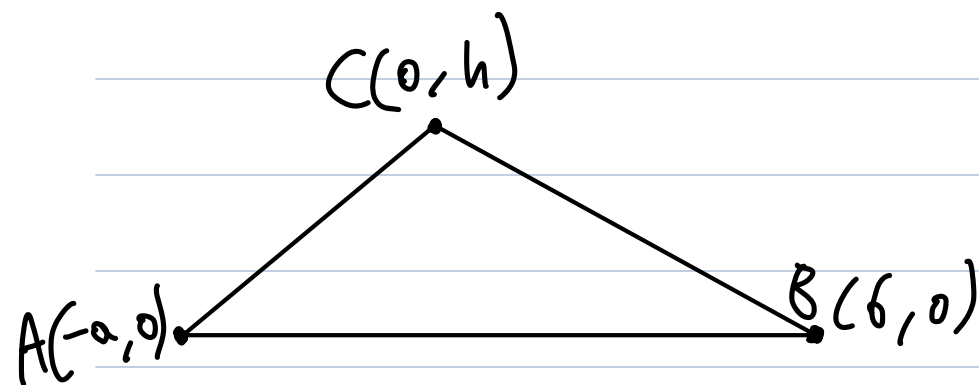
$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} x &= 1 + 2t \\ y &= -1 + 3t \\ z &= 2 + t \end{aligned} \right\} (1)$$

οπότε αντικαθιστώντας την (1)
 στην σχέση της εκφώνησης έχουμε:

$$\begin{aligned}
 5x - 3y - z - 6 &= 5t + 10t + 3 - 9t - 2 - t - 6 \\
 &= \cancel{6} + \cancel{10t} - \cancel{10t} = 0
 \end{aligned}$$

Άρα πράγματι ικανοποιείται η σχέση της ικευίνησης για κάθε (x, y, z) στην ευθεία, ή $\forall t \in \mathbb{R}$.

32. Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα δύο πλευρών ενός τριγώνου είναι παράλληλο στην τρίτη πλευρά και έχει το μισό μήκος.



Στρίβουμε το τρίγωνο ώστε η ερρή πλευρά να είναι οριζόντια. Επιλέγουμε άξονες ώστε η x-συνωτώση της κορυφής του τριγώνου να καταγράφει 0. Έστω $(-a, 0)$, $(b, 0)$ τα σημεία στην αριστερή και δεξιά ειλεωρά της βάσης του τριγώνου αντίστοιχα.

Κατασκευάζουμε παραμετρικές εξισώσεις ευθειών για τις ευθείες AC , BC :

$$l_{AB}(t) = (-a, 0) + t(a, h)$$

$$l_{BC}(t) = (b, 0) + t(-b, h)$$

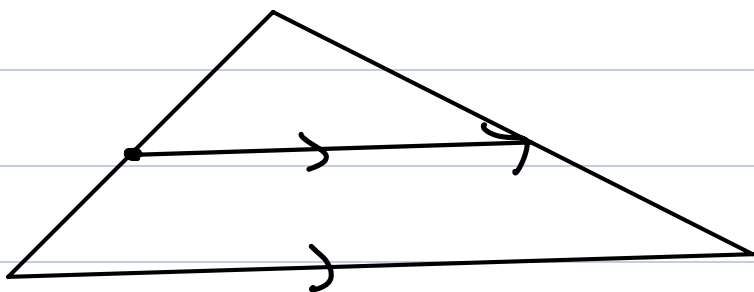
ώστε

$$l_{AB}(1) = l_{BC}(1) = (0, h) = \vec{C}$$

Ομοίως $l_{AB}(\frac{1}{2})$ και $l_{BC}(\frac{1}{2})$ τα μέσα των δύο πλευρών AB και BC αντιστοίχα.

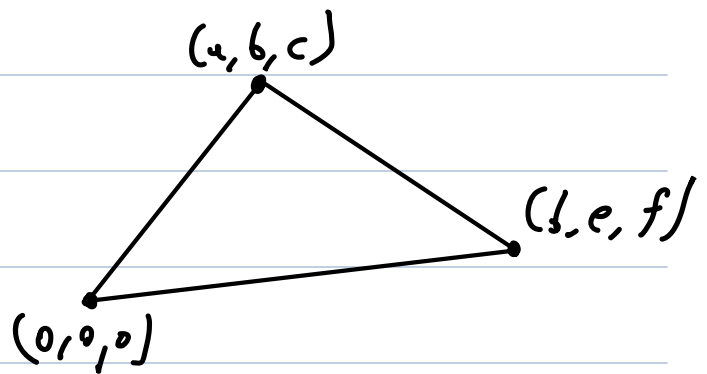
$$\begin{aligned} \text{Θαότι έχουμε } & \vec{l}_{BC}(\frac{1}{2}) - \vec{l}_{AB}(\frac{1}{2}) \\ &= (b - (-a), 0) \\ & \quad + \frac{1}{2}(-b - a, h - h) \\ &= (a + b - \frac{1}{2}(a + b), 0) \\ &= (\frac{a + b}{2}, 0) = \vec{v} \end{aligned}$$

Αντί η γ-συνιστώσα της $\vec{v}$ είναι 0, τότε η $\vec{v}$ οριζόντια, άρα και παράλληλη στην τρίτη πλευρά. Επίσης, $|\vec{v}| = \frac{a+b}{2}$ το οποίο είναι το μισό του μήκους της τρίτης πλευράς:



33. Αν PQR είναι ένα τρίγωνο στον χώρο και $b > 0$ ένας αριθμός, τότε υπάρχει ένα τρίγωνο με πλευρές

παράλληλες στις πλευρές του PQR και μήκος b επί το μήκος των πλευρών του PQR.



$$l_1(t) = (0, 0, 0) + t(a, b, c)$$

$$l_2(t) = (a, b, c) + t(d-a, d-b, d-c)$$

$$l_3(t) = (d, e, f) + t(-d, -e, -f)$$

Οι τρεις αλφαί. γλ. περιγράφουν το

είχων $\rho \in \mathbb{R}$, συνά μπορούμε να ελαττώσουμε παραμ. εἴ. τ.μ.:

$$L_1(t) = (0, 0, 0) + t(Ba, Bb, Bc)$$

$$L_2(t) = (Ba, Bb, Bc) + t(B(d-a), B(e-b), B(f-c))$$

$$L_3(t) = (Bd, Be, Bf) + t(-Bd, -Be, -Bf)$$

και ἴστω $B > 0$. Τότε, $L_1 \parallel l_1$, $L_2 \parallel l_2$, $L_3 \parallel l_3$ αφοῦ οι διευθύνσεις της L είναι ακέραια πολλαπλασιασίων των διευθύνσεων της l . Επίσης, το μήκος των τμημάτων είναι $|\vec{L}_i(1) - \vec{L}_i(0)| = B|\vec{l}_i(1) - \vec{l}_i(0)|$:

$$|\vec{L}_i(1) - \vec{L}_i(0)| = \begin{cases} \frac{\sqrt{(Ba)^2 + (Bb)^2 + (Bc)^2}}{\sqrt{B^2(d-a)^2 + B^2(e-b)^2 + B^2(f-c)^2}} \\ \sqrt{(Bd)^2 + (Be)^2 + (Bf)^2} \end{cases}$$

$$= B \begin{cases} \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{\sqrt{(d-a)^2 + (e-b)^2 + (f-c)^2}} \\ \sqrt{d^2 + e^2 + f^2} \end{cases}$$

$$= \beta | \vec{r}_i(1) - \vec{r}_i(0) |$$

Αν όμως υπάρχει τριγωνο (τα L_1, L_2, L_3)
 όπου οι πλευρές του να είναι παράλληλες
 στο $\vec{r}_i(0)$ (τα l_1, l_2, l_3) και το μήκος
 τους να είναι β πολλαπλασιασμένο με
 το μήκος των πλευρών του $\vec{r}_i(0)$ (για
 κάποιο $\beta > 0$).

Εσωτερικό και Εξωτερικό Γινόμενο Διανυσμάτων

① Ορισμός

$$\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$$

$$\vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \vec{a}^T \vec{b}$$

$$= a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n = \sum a_i b_i$$

② Ιδιότητες

$$\underbrace{1) \vec{a} \cdot \vec{a} \geq 0}_{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}, \text{ Επίσης } \vec{a} \cdot \vec{a} = 0 \Rightarrow \vec{a} = \vec{0}$$

$$2) \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

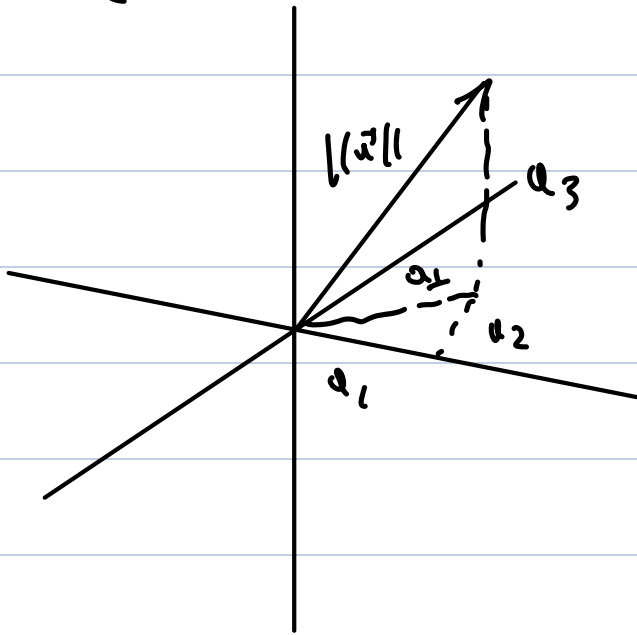
$$3] \quad \vec{a} \cdot (\beta \vec{b} + \gamma \vec{c}) = \beta(\vec{a} \cdot \vec{b}) + \gamma(\vec{a} \cdot \vec{c})$$

3) Νόρμα - Μέτρο - Μέτρος

$$\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$$

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}$$

(Ευκλείδειο Νόρμα)



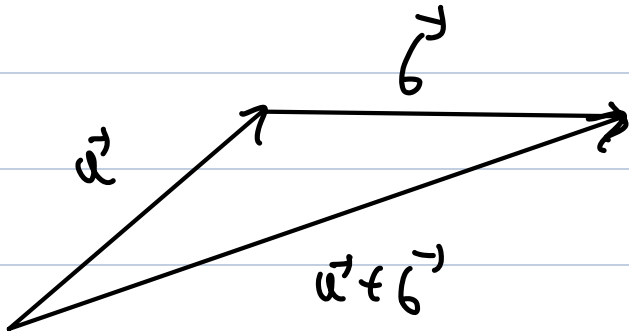
$$\begin{aligned} a_1^2 + a_2^2 &= a'^2 \\ a_1^2 + a_2^2 &= \|\vec{a}'\|^2 \\ \Rightarrow a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 &= \|\vec{a}\|^2 \end{aligned}$$

4) Ιδιότητες

$$\sqcup \|\vec{a}\| \geq 0 \quad \text{Επίσης} \quad \|\vec{a}\| = 0 \quad \text{αν} \quad \vec{a} = \vec{0}$$

$$2) \|\lambda \vec{a}\| = |\lambda| \|\vec{a}\|$$

$$3) \|\vec{a} + \vec{b}\| \leq \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|$$



5) Κανονικοποίηση

Ορισμός

$\vec{v} \neq \vec{0}$ λήγει να παραδραίο δένεομα
αν $\|\vec{v}\| = 1$

Έστω $\vec{v} \neq \vec{0}$

Κανονικοποίηση του $\vec{v}$:

$$\hat{v} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$$

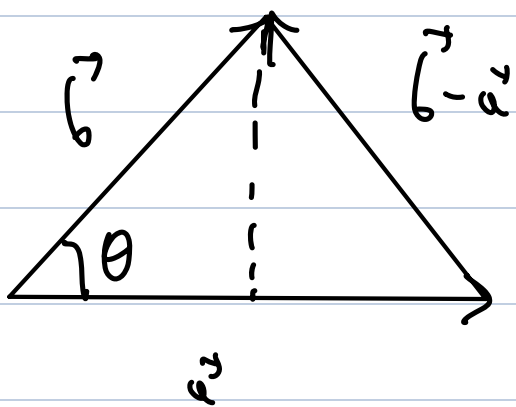
6 Γεωμετρική Ερμηνεία του Εσωτ. Γιν.:

Θεώρημα:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos \theta$$

↑
γωνία των $\vec{a}, \vec{b}$

Απόδ.:



$$\begin{aligned} \|\vec{b} - \vec{a}\|^2 &= (\vec{b} - \vec{a}) \cdot (\vec{b} - \vec{a}) \\ &= \vec{b} \cdot \vec{b} - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{a} \\ &= \|\vec{b}\|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \|\vec{a}\|^2 \end{aligned}$$

Νόμος των Συνήγοιόων:

$$\|\vec{b} - \vec{a}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 - 2\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\cos \theta$$

οπότε

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos \theta$$

7 Υπολογισμός γωνίας κ. απόδοσης:

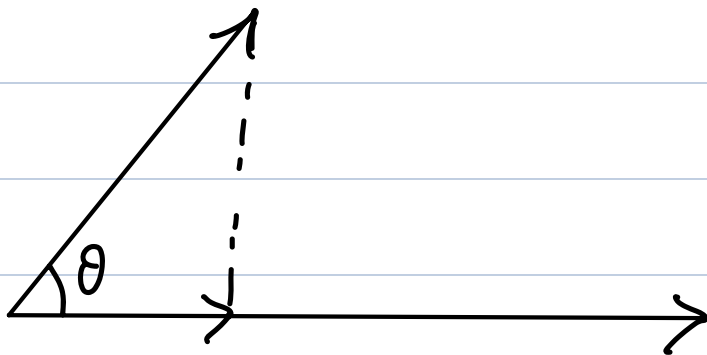
$\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$, θ : γωνία των $\vec{a}, \vec{b}$

$\text{proj}_{\vec{a}} \vec{b}$: απόσπασμα του $\vec{b}$
στον $\vec{a}$

$$1 \quad \cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|}$$

$$\Rightarrow \theta = \cos^{-1} \left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|} \right)$$

2



$$= \|\vec{b}\| \cos \theta \hat{\vec{a}} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\|^2} \vec{a} = \text{proj}_{\vec{a}} \vec{b}$$

$$\boxed{\text{proj}_{\vec{a}} \vec{b} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\|^2} \vec{a}}$$

$$\text{proj}_{\vec{a}} \vec{b} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\vec{a} \cdot \vec{a}} \vec{a}$$

8) Παράλ.

$$\vec{a} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right), \vec{b} = (1, -\sqrt{3}, 0)$$

1) Μέκος $\vec{a}$

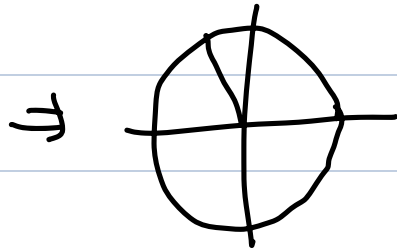
$$\frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1 = \|\vec{a}\|^2 \Rightarrow \|\vec{a}\| = 1$$

2) Μέκος $\vec{b}$

$$1 + 3 = 4 = \|\vec{b}\|^2 \Rightarrow \|\vec{b}\| = 2$$

3) Γωνία $\vec{a}, \vec{b}$

$$\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{3}{2}}{2} = -\frac{1}{2} = \cos \theta$$



$$\Rightarrow \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3} = 90^\circ + 30^\circ = 120^\circ$$

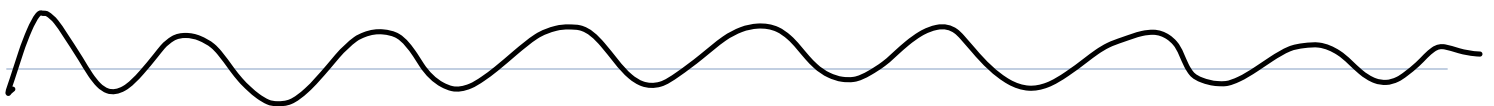
$$\theta = 120^\circ = \frac{2\pi}{3}$$

4] $\text{proj}_{\vec{a}} \vec{b}$

$$= \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\vec{a} \cdot \vec{a}} \vec{a} = \frac{1}{1} \vec{a} = -\vec{a} = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$$

5] $\text{proj}_{\vec{b}} \vec{a}$

$$= \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\vec{b} \cdot \vec{b}} \vec{b} = \frac{-1}{4} \vec{b} = \left(-\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}, 0\right)$$



9) Orthogonality

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \gamma_{\vec{a}, \vec{b}} = \frac{\pi}{2}$$

$\pi \cdot x$

$$(1, -2, 0) \perp (2, 1, 0)$$

$$\text{απει} \quad (1, -2, 0) \cdot (2, 1, 0) \\ = 2 - 2 = 0$$

(10) Ανισότητα Cauchy (- Buniyotovski)
- Schwarz

Θεωρ.

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|$$

Απόδειξη

αν $\vec{a}$ ή $\vec{b} = \vec{0}$ τότε ισχύει η ανισότητα
αδελείως

los Τρόπος

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot |\cos \theta| \leq \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot 1 \\ = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|$$

$$\Gamma \text{ α κάθε } \lambda \in \mathbb{R} \quad \|\lambda \vec{a} + \vec{b}\|^2 \geq 0$$

$$\text{όπως} \quad \|\lambda \vec{a} + \vec{b}\|^2 = (\lambda \vec{a} + \vec{b}) \cdot (\lambda \vec{a} + \vec{b}) \geq 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 \|\vec{a}\|^2 + 2\lambda \vec{a} \cdot \vec{b} + \|\vec{b}\|^2$$

$$\text{οπότε Έστω } f(\lambda) = \lambda^2 \|\vec{a}\|^2 + 2\lambda \vec{a} \cdot \vec{b} + \|\vec{b}\|^2$$

$$\text{πρ } f(\lambda) \geq 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\text{οπότε} \quad \Delta \leq 0$$

$$\Rightarrow 4(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 - 4\|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 \leq 0$$

$$\Rightarrow \boxed{|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|}$$

11) Συμμετρικότητα

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \Rightarrow \text{γινύται ενώ } \vec{a}, \vec{b} = 0$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = -\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \Rightarrow \text{γωνία συν } \vec{a}, \vec{b} = \pi$$

12) Τριγωνική ανισότητα

Θεωρ.

$$\|\vec{a} + \vec{b}\| \leq \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|$$

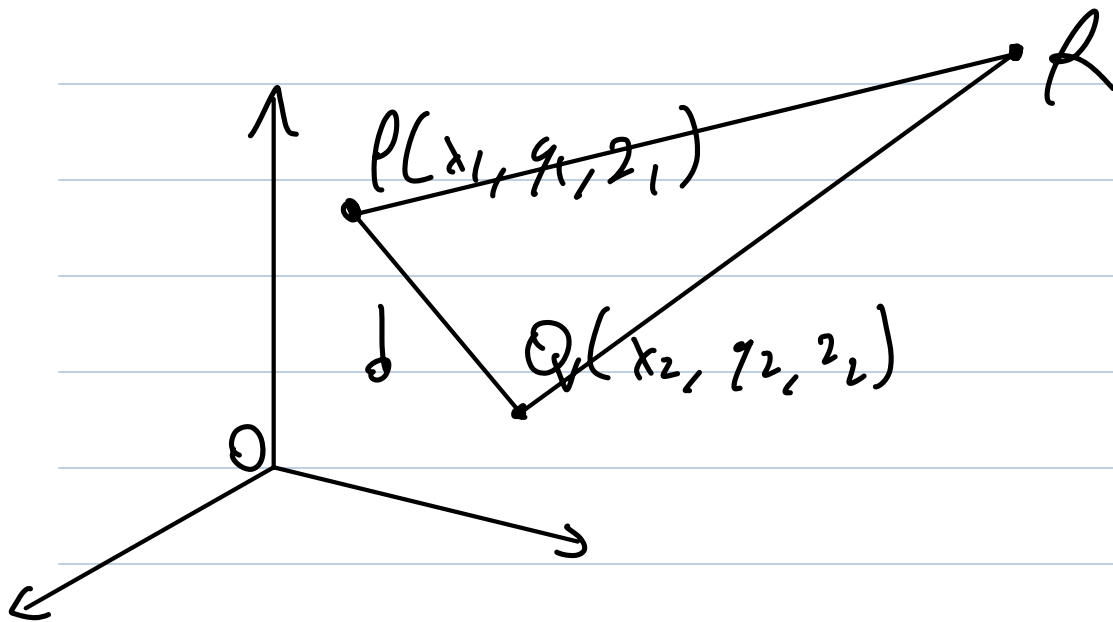
Αποδ.

$$\begin{aligned} \|\vec{a} + \vec{b}\|^2 &= (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) \\ &= \|\vec{a}\|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \|\vec{b}\|^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \|\vec{a}\|^2 + 2\|\vec{a}\|\|\vec{b}\| + \|\vec{b}\|^2 \\ &= (\|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|)^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{\|\vec{a} + \vec{b}\| \leq \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|}$$

13) Απόσταση Σημείων



$$d = \| \vec{PQ} \| = \| \vec{OQ} - \vec{OP} \|$$

$$= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$$\underline{1)} \quad d(P, Q) \geq 0$$

$$d(P, Q) = 0 \Leftrightarrow P \equiv Q$$

$$\underline{2)} \quad d(P, Q) = d(Q, P)$$

$$\underline{3)} \quad d(P, Q) \leq d(P, R) + d(R, Q)$$

14) Ορίζουσες

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$= a_1 (b_2 c_3 - b_3 c_2) - a_2 (b_1 c_3 - b_3 c_1) + a_3 (b_1 c_2 - b_2 c_1)$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow \begin{matrix} (a_1, b_1) \\ (a_2, b_2) \end{matrix} \begin{matrix} \text{γραμμικά} \\ \text{ανεξάρτητα} \\ \text{(πυ-συστασια)} \end{matrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \begin{matrix} (a_1, b_1, c_1) \\ (a_2, b_2, c_2) \\ (a_3, b_3, c_3) \end{matrix} \text{ γρ. ανεξ.}$$

15) Εξωτερικό Γινόμενο

- Μόνο για 3 διανύσματα

- Διάνυσμα $\times$ Διάνυσμα = Διάνυσμα

$$(a_1, a_2, a_3)$$

$$(b_1, b_2, b_3)$$

$$\hat{i} = (1, 0, 0)$$

$$\hat{j} = (0, 1, 0)$$

$$\hat{k} = (0, 0, 1)$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \hat{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \hat{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \hat{k}$$

16) Наряд.

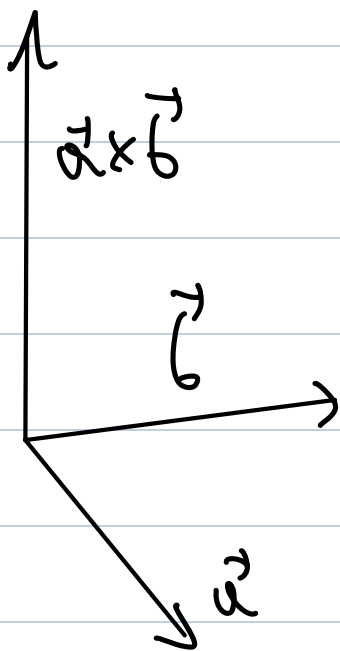
$$\vec{a} = (3, -1, 1)$$

$$\vec{b} = (1, 2, -1)$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \hat{i} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - \hat{j} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + \hat{k} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -1\hat{i} - (-4)\hat{j} + 7\hat{k}$$

$$= -1\hat{i} + 4\hat{j} + 7\hat{k}$$



$$= (-1, 4, 7)$$

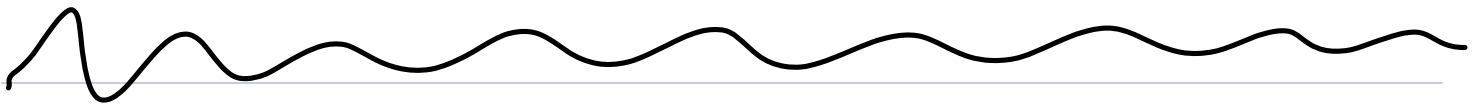
$$(-1, 4, 7) \cdot (3, -1, 1)$$

$$= -3 - 4 + 7 = 0$$

$$(-1, 4, 7) \cdot (1, 2, -1)$$

$$= -1 + 8 - 7 = 0$$

$$\text{ou seja } \vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a} \text{ e } \vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{b}$$



17) Propriedades

$$1) \vec{a} \times \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \text{ e } \vec{b} \text{ s\~{o} } \vec{0} \text{ e } \vec{a} = \lambda \vec{b}$$

$$2) \vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$$

$$3) \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \neq (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$$

$$\underline{4)} \quad \vec{a} \times (\beta \vec{b} + \gamma \vec{c}) = \beta \vec{a} \times \vec{b} + \gamma \vec{a} \times \vec{c}$$

$$\underline{5)} \quad \begin{array}{c} \vec{i} \\ \swarrow \quad \searrow \\ \vec{k} \quad \vec{j} \end{array} \quad \begin{array}{l} \vec{i} \times \vec{j} = \vec{k} \\ \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i} \\ \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j} \end{array}$$

18) Μεκτός - Τριπλό Γινόμενο

$$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$$

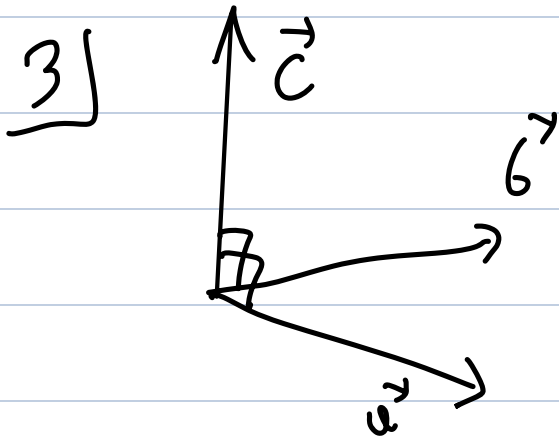
$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

19) Γεωμετρική Ερμηνεία Εξωγ. Γιν. Γ.

$$\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^2$$

$$\underline{1)} \quad \vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a}, \quad \vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{b}$$

$$2) \|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot |\sin \theta|$$



Απόδ.

$$(1) \vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$$

$$\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$

οπότες $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a}$

αυτίστοιχα $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{b}$

$$(2) \|\vec{a} \times \vec{b}\|^2$$

$$\| \begin{pmatrix} 1 \\ a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ a_3 \\ b_3 \end{pmatrix} \| ^2$$

$$= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2$$

$$= (a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 + (a_1 b_3 - a_3 b_1)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2$$

$$= a_2^2 b_3^2 + a_3^2 b_2^2 + a_1^2 b_3^2 + a_3^2 b_1^2 + a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_1^2 - 2(a_2 a_3 b_2 b_3 + a_1 a_3 b_1 b_3 + a_1 a_2 b_1 b_2)$$

$$= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)$$

$$- a_1^2 b_1^2 - a_2^2 b_2^2 - a_3^2 b_3^2$$

$$- 2 a_1 a_2 b_1 b_2 - 2 a_1 a_3 b_1 b_3 - 2 a_2 a_3 b_2 b_3$$

$$= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2$$

$$= \|\vec{a}\|^2 \cdot \|\vec{b}\|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$$

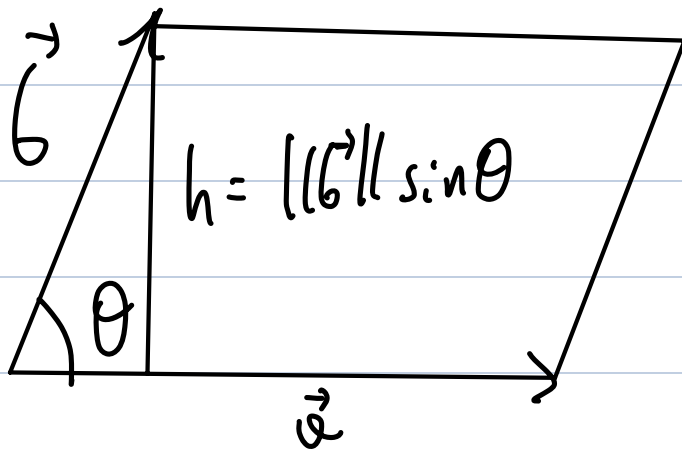
$$= \|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 - \|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 \cos^2 \theta$$

$$= \|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 (1 - \cos^2 \theta) = \|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 \sin^2 \theta$$

$$(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 + \|\vec{a} \times \vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2$$

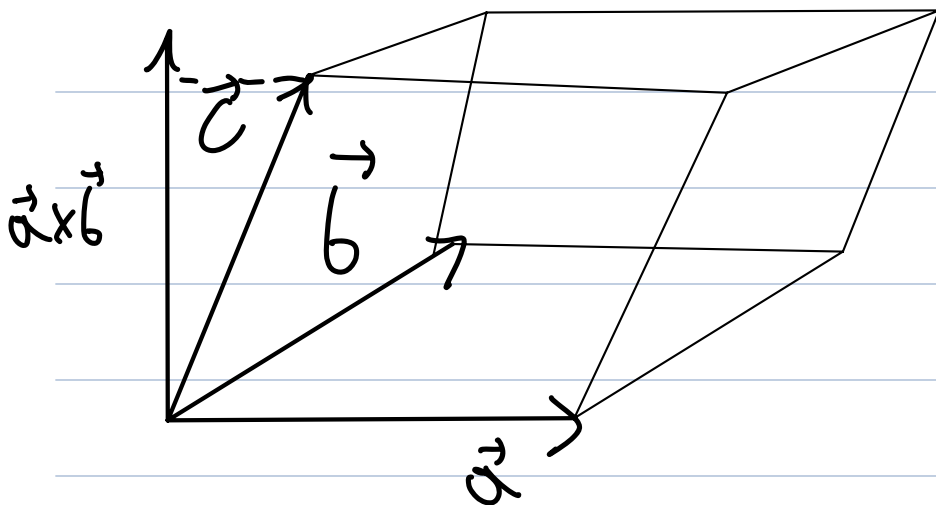
$$\Rightarrow \|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot |\sin \theta|$$

20 Εξέταση Αριθμητικής



$$\begin{aligned}
 E &= \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \sin \theta \\
 &= \|\vec{a} \times \vec{b}\|
 \end{aligned}$$

21) Όγκος Παραλληλεπίπεδου



$$\begin{aligned}
 V &= \text{εμβα. βάσης} \times \text{ύψος} \\
 &= \|\vec{a} \times \vec{b}\| \cdot \text{proj}_{\vec{a} \times \vec{b}} \vec{c}
 \end{aligned}$$

$$= \left\| \vec{a} \times \vec{b} \right\| \cdot \left\| \frac{\vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})}{\left\| \vec{a} \times \vec{b} \right\|^2} (\vec{a} \times \vec{b}) \right\|$$

$$= \frac{\left\| \vec{a} \times \vec{b} \right\| \cdot \left\| \vec{a} \times \vec{b} \right\|}{\left\| \vec{a} \times \vec{b} \right\|^2} \cdot \left| \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) \right|$$

$$= \boxed{\left| \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) \right| = V}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Ασκήσεις Marsden-Tromb

1.2.18

1.2.20

1.2.26

1.3.15

1.3.26

18. Βρείτε όλες τις τιμές του x για τις οποίες τα $(x, 1, x)$ και $(x, -6, 1)$ είναι ορθογώνια.
19. Βρείτε όλες τις τιμές του x για τις οποίες τα $(7, x, -10)$ και $(3, x, x)$ είναι ορθογώνια.
20. Βρείτε την προβολή του $\mathbf{u} = -\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ επί του $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k}$.
21. Βρείτε την προβολή του $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ επί του $\mathbf{u} = -\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$.
22. Ποιοι περιορισμοί πρέπει να επιβληθούν στον πραγματικό αριθμό b ώστε το διάνυσμα $2\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ να είναι ορθογώνιο (α) με το $-3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ και (β) με το $\mathbf{k}$;
23. Τα διανύσματα $\mathbf{v}$ και $\mathbf{w}$ είναι πλευρές ενός ισόπλευρου τριγώνου με μήκος πλευρών 1. Υπολογίστε το $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$.
24. Έστω $\mathbf{b} = (3, 1, 1)$ και έστω P το επίπεδο που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και δίνεται από την $x + y + 2z = 0$.
- (α) Βρείτε μια ορθογώνια βάση για το P . Δηλαδή, βρείτε δύο μη μηδενικά ορθογώνια διανύσματα $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in P$.
- (β) Βρείτε την ορθογώνια προβολή του $\mathbf{b}$ επί του P .
25. Βρείτε δύο μη παράλληλα διανύσματα που είναι αμφοτέρωθεν ορθογώνια με το $(1, 1, 1)$.
26. Βρείτε την ευθεία που διέρχεται από το $(3, 1, -2)$ και τέμνει κάθετα την ευθεία $x = -1 + t, y = -2 + t, z = -1 + t$. [ΥΠΟΔΕΙΞΗ: Αν (x_0, y_0, z_0) είναι το σημείο τομής, βρείτε τις συντεταγμένες του.]

15. Βρείτε μια εξίσωση για το επίπεδο που

- (α) είναι κάθετο στο $\mathbf{v} = (1, 1, 1)$ και διέρχεται από το $(1, 0, 0)$.
- (β) είναι κάθετο στο $\mathbf{v} = (1, 2, 3)$ και διέρχεται από το $(1, 1, 1)$.
- (γ) είναι κάθετο στην ευθεία $\mathbf{l}(t) = (5, 0, 2)t + (3, -1, 1)$ και διέρχεται από το $(5, -1, 0)$.
- (δ) είναι κάθετο στην ευθεία $\mathbf{l}(t) = (-1, -2, 3)t + (0, 7, 1)$ και διέρχεται από το $(2, 4, -1)$.

26. Ποια είναι η γεωμετρική σχέση μεταξύ των διανυσμάτων $\mathbf{v}$ και $\mathbf{w}$ αν $\|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\| = \frac{1}{2} \|\mathbf{v}\| \|\mathbf{w}\|$;

18. Βρείτε όλες τις τιμές του x για τις οποίες τα $(x, 1, x)$ και $(x, -6, 1)$ είναι ορθογώνια.

Δύο διανύσματα $\vec{v}, \vec{w}$ είναι
ορθογώνια αν $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$, οπότε:

$$(x, 1, x) \cdot (x, -6, 1) = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 6 + x = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + x - 6 = 0$$

$$\Rightarrow (x+3)(x-2) = 0$$

$$\Rightarrow x = -3 \quad \text{ή} \quad x = 2$$

Άρα $x = -3$ ή $x = 2$.

20. Βρείτε την προβολή του $\mathbf{u} = -\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ επί του $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k}$.

Η προβολή της $\vec{u}$ επί του $\vec{v}$ ορίζεται ως:

$$\text{proj}_{\vec{v}} \vec{u} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\vec{v} \cdot \vec{v}} \vec{v}$$

$$\text{Ακόρι} \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = -2 + 1 - 3 = -4$$

$$\text{και} \quad \vec{v} \cdot \vec{v} = 4 + 1 + 9 = 14$$

$$\text{Οότε} \quad \text{proj}_{\vec{v}} \vec{u} = -\frac{2}{7} (2, 1, -3) \\ = \left(-\frac{4}{7}, -\frac{2}{7}, \frac{6}{7} \right)$$

26. Βρείτε την ευθεία που διέρχεται από το $(3, 1, -2)$ και τέμνει κάθετα την ευθεία $x = -1 + t, y = -2 + t, z = -1 + t$. [ΥΠΟΔΕΙΞΗ: Αν (x_0, y_0, z_0) είναι το σημείο τομής, βρείτε τις συντεταγμένες του.]

Αν $A(x_0, y_0, z_0)$ το σημείο όπου
 εφ'ινονται οι δύο ευθείες, τότε
 έστω $B = (3, 1, -2)$. Θέλουμε
 $\vec{AB}$ να είναι κάθετο στο διάνυσμα
 το οποίο ορίζει την γνωστή ευθεία,
 έστω $\vec{BC} = (1, 1, 1)$ (οι συντεταγμένες
 των t ορίζουν το διάνυσμα).

Θαίτουμε $\vec{AB} \cdot \vec{BC}$

$$= (3-x_0, 1-y_0, -2-z_0) \cdot (1, 1, 1)$$

$$= 3 + 1 - 2 - x_0 - y_0 - z_0 = 0$$

$$\Rightarrow x_0 + y_0 + z_0 = 2$$

Είναι $x(t) + y(t) + z(t) = 2$

$$\Rightarrow -1+t -2+t -1+t = 2$$

$$\Rightarrow -4 + 3t = 2$$

$$\Rightarrow 3t = 6 \Rightarrow t = 2$$

Άρα $x_0 = 1, y_0 = 0, z_0 = 1$

οπότε $h(t) = (x_0, y_0, z_0)$

$$+ t(3-x_0, 1-y_0, -2-z_0)$$

$$= (1+2t, t, 1-3t)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow x &= 1 + 2t \\ y &= t \\ z &= 1 - 3t \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{x-1}{2} = y = -\frac{z-1}{3}$$

π.χ.

$$\begin{aligned} y &= \frac{x-1}{2} \\ y &= -\frac{z-1}{3} \end{aligned}$$

15. Βρείτε μια εξίσωση για το επίπεδο που

- (α) είναι κάθετο στο $\mathbf{v} = (1, 1, 1)$ και διέρχεται από το $(1, 0, 0)$.
- (β) είναι κάθετο στο $\mathbf{v} = (1, 2, 3)$ και διέρχεται από το $(1, 1, 1)$.
- (γ) είναι κάθετο στην ευθεία $\mathbf{l}(t) = (5, 0, 2)t + (3, -1, 1)$ και διέρχεται από το $(5, -1, 0)$.
- (δ) είναι κάθετο στην ευθεία $\mathbf{l}(t) = (-1, -2, 3)t + (0, 7, 1)$ και διέρχεται από το $(2, 4, -1)$.

α) Μπορούμε να βρούμε ένα διάνυσμα κάθετο στο $\vec{v}$ στις εξισώσεις μη-ομογενείς με $\vec{v}$ διάνυσμα $\vec{\omega} = (0, 1, 1)$ όπου προφανώς $\vec{v} \cdot \vec{\omega} = 2 \neq 0$, οπότε

$$\vec{v} \times \vec{\omega} = \vec{a} \perp \vec{v}$$

$$\begin{aligned} \mu\epsilon \quad \vec{v} \times \vec{\omega} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \hat{i} \cdot 0 - \hat{j} \cdot 1 \\ &\quad + \hat{k} \cdot 1 \\ &= (0, -1, 1) \end{aligned}$$

$$\text{πίσης, } \vec{v} \times \vec{a} = \vec{b} \perp \vec{v}$$

$$\begin{aligned} \mu\epsilon \quad \vec{v} \times \vec{a} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2\hat{i} - \hat{j} \\ &\quad - \hat{k} \\ &= (2, -1, -1) \end{aligned}$$

οπότε μπορούμε να κατασκευάσουμε
απαρτιτική εξίσωση επιπέδου

κάνοντας χρήση γραμμικού συνδυασμού των $\vec{a}, \vec{b}$:

$$p(t, s) = (1, 0, 0) + t\vec{a} + s\vec{b}$$

$$= (1, 0, 0) + (0, -t, t)$$

$$+ (2s, -s, -s)$$

$$= (1 + 2s, -t - s, t - s)$$

Λύνουμε το σύστημα εξισώσεων:

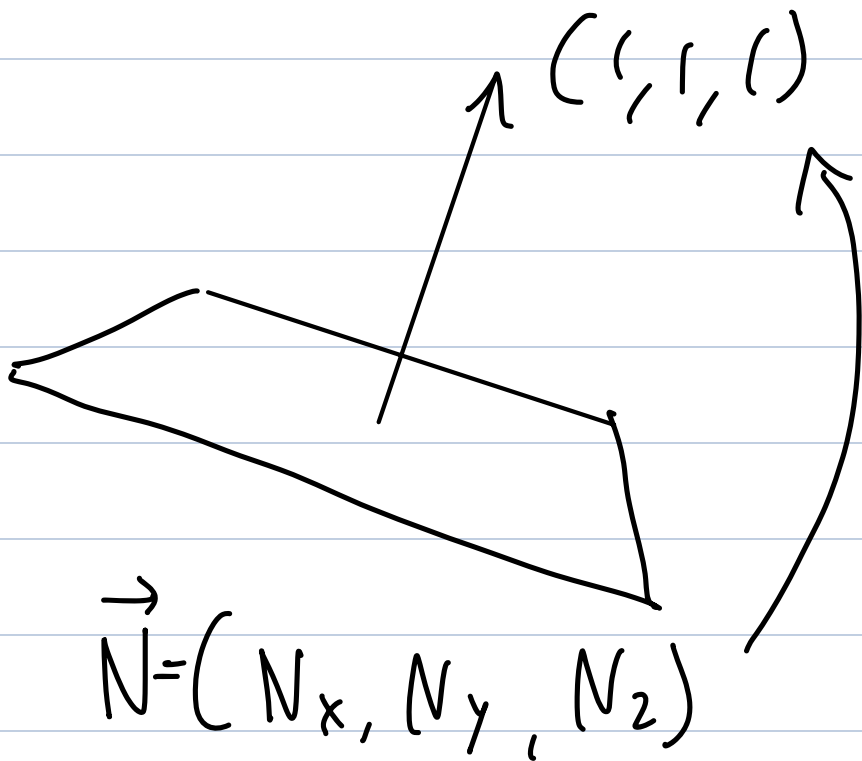
$$x = 1 + 2s \quad (1)$$

$$y = -t - s \quad (2)$$

$$z = t - s \quad (3)$$

$$(2), (3): \quad y + z = -2s \quad (4)$$

$$(4), (1): \quad \boxed{x + y + z = 1}$$



$$\vec{N} = (N_x, N_y, N_z)$$

$$\vec{N} \times (-N_x, N_y, N_z)$$

$$= (N_y N_z - N_y N_z, -2N_x N_z, 2N_x N_y)$$

$$= 2N_x (0, -N_z, N_y) = \vec{a}$$

$$\vec{N} \times (2N_x(0, -N_z, N_y))$$

$$= 2N_x (N_y^2 + N_z^2, -N_x N_y, -N_x N_z) = \vec{b}$$

$$(x_0, y_0, z_0) + t\vec{a} + s\vec{b}$$

$$x = x_0 + 2N_x(N_y^2 + N_z^2)s$$

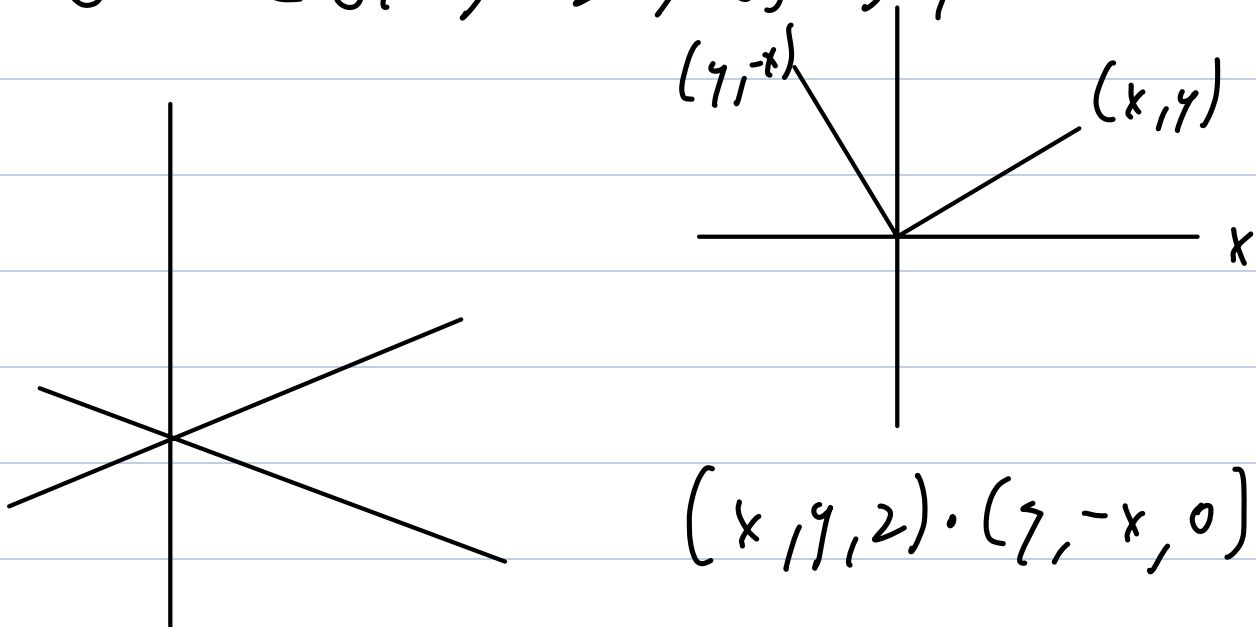
$$y = y_0 - 2N_x N_z t - 2N_x^2 N_y s$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2N_x(N_y^2 + N_z^2) \\ -2N_x N_z & -2N_x^2 N_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{bmatrix}$$

$$4N_x^2 N_z (N_y^2 + N_z^2)$$

$$\vec{a} = (a_1 t, a_2 t, a_3 t)$$

$$\vec{b} = (b_1 s, b_2 s, b_3 s)$$



$$(x, y, z) \cdot (y, -x, 0)$$

$$= xy - xy = 0$$

$$(x, y, z) \cdot (0, 2, -4)$$

$$= 2y - 2z = 0$$

$$\vec{a} = (N_2, -N_1, 0)$$

$$\vec{b} = (0, N_3, -N_2)$$

$$(x_0, y_0, z_0) + t\vec{a} + s\vec{b}$$

$$= (x_0 + N_2 t, y_0 - N_1 t + N_3 s, z_0 - N_2 s)$$

$$\frac{x - x_0}{N_2} = t$$

$$- \frac{z - z_0}{N_2} = s$$

$$y - y_0 = -\frac{N_1}{N_2}(x - x_0) - \frac{N_3}{N_2}(z - z_0)$$

$$\Rightarrow N_1(x - x_0) + N_2(y - y_0) + N_3(z - z_0) = 0$$

(β) είναι κάθετο στο $v = (1, 2, 3)$ και διέρχεται από το $(1, 1, 1)$.

Από την επάνω εξίσωση το
επίπεδο (κνκκ) δάκτυμα είναι
 $\vec{N} = (1, 2, 3)$, οπότε η εξίσωση
του επιπέδου είναι:

$$(x-1) + 2(y-1) + 3(z-1) = 0$$

$$\Rightarrow x + 2y + 3z = 6$$

(γ) είναι κάθετο στην ευθεία $l(t) = (5, 0, 2)t + (3, -1, 1)$
και διέρχεται από το $(5, -1, 0)$.

Η ευθεία $l(t)$ περιγράφεται
από τους συντελεστές του t ως
δάκτυμα: $\vec{N} = (5, 0, 2)$, οπότε
το αντίστοιχο επίπεδο που διέρχεται
από το $(5, -1, 0)$ είναι:

$$5(x-5) + 0(y+1) + 2(z-0) \\ = 5x - 25 + 2 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{5x + z = 25} \\ y \in \mathbb{R}$$

(δ) είναι κάθετο στην ευθεία
 $l(t) = (-1, -2, 3)t + (0, 7, 1)$ και διέρχεται από το
 $(2, 4, -1)$.

Με ανάλογο τρόπο για το γ:

$$\vec{N} = (-1, -2, 3)$$

$$-(x-2) - 2(y-4) + 3(z+1) = 0$$

$$\Rightarrow -x - 2y + 3z + 2 + 8 + 3 = 0$$

$$\Rightarrow -x - 2y + 3z = -13$$

$$\Rightarrow \boxed{x + 2y - 3z = 13}$$

26. Ποια είναι η γεωμετρική σχέση μεταξύ των διανυσμάτων $\mathbf{v}$ και $\mathbf{w}$ αν $\|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\| = \frac{1}{2} \|\mathbf{v}\| \|\mathbf{w}\|$;

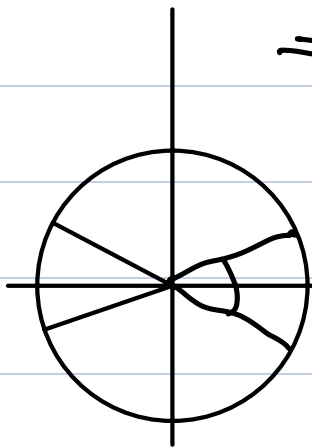
$$\text{Είναι } \|\vec{v} \times \vec{w}\| = \|\vec{v}\| \|\vec{w}\| \cdot |\sin \theta|$$

$$\text{Από } \|\vec{v} \times \vec{w}\| = \frac{1}{2} \|\vec{v}\| \|\vec{w}\| \text{ τότε}$$
$$\|\vec{v}\| \|\vec{w}\| \cdot |\sin \theta| = \frac{1}{2} \|\vec{v}\| \|\vec{w}\|$$

$$\Rightarrow |\sin \theta| = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \sin \theta = \pm \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6} \text{ ή } \pi + \frac{\pi}{6}$$

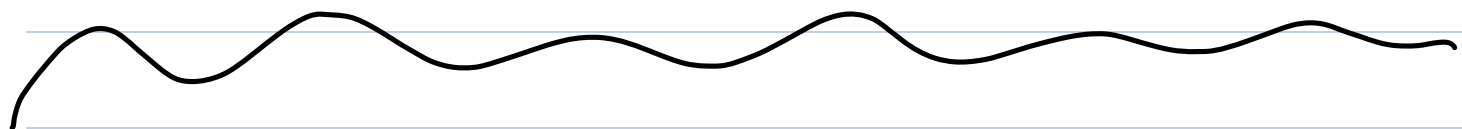


$$\pm \frac{\pi}{6} \text{ ή } \pi \pm \frac{\pi}{6}$$

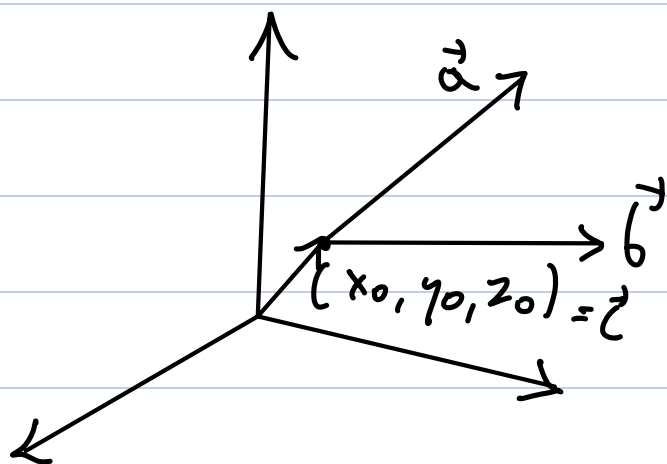
$$\Rightarrow \theta = 30^\circ \text{ ή } \theta = 210^\circ$$

- Εξίσωση Επιπέδου

- Νορμικές, Κανονικές, Σφαίρικές
Συνεπαραγόμενες



① Παραμετρική εξίσωση Επιπέδου



Παραμετρική εξίσωση επιπέδου από
σημείο (x_0, y_0, z_0) και διεγερτάσια
εις διευθύνσεις $\vec{a}, \vec{b}$ είναι:

$$\vec{p}(t) = (x_0, y_0, z_0) + t\vec{a} + s\vec{b}$$

$$= \vec{c} + t\vec{a} + s\vec{b}$$

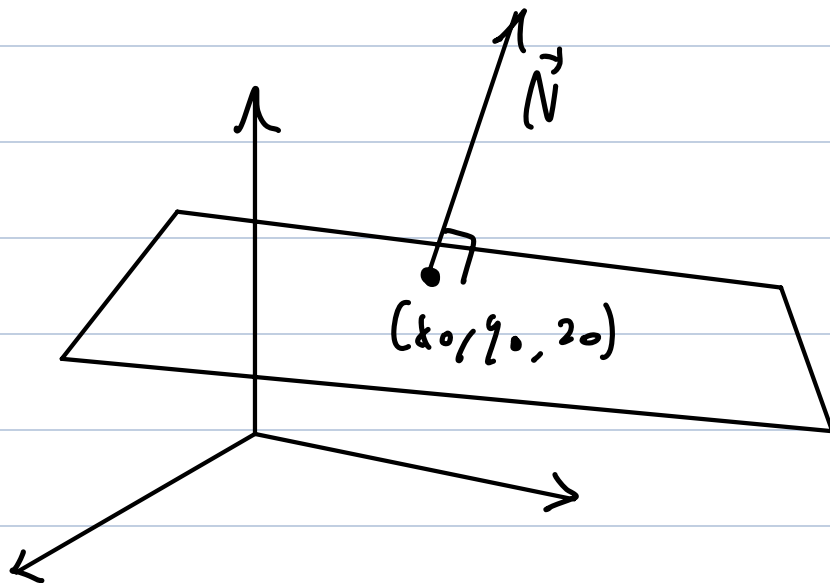
$$t, s \in \mathbb{R}$$

όπου $\vec{c} = (x_0, y_0, z_0)$

εξίσωση επιπέδου από σημείο

$\vec{c} = (x_0, y_0, z_0)$ αλλά θέλουμε να

είναι κάθετο στην $\vec{N} = (N_x, N_y, N_z)$



Αν $(x, y, z) \in \text{επίπεδο}$

τότε $(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot (N_x, N_y, N_z) = 0$

$$\Rightarrow N_x(x-x_0) + N_y(y-y_0) + N_z(z-z_0) = 0$$

$$\Rightarrow ax + by + cz + d = 0$$

οπότε $\vec{N} = \vec{v} = (a, b, c)$

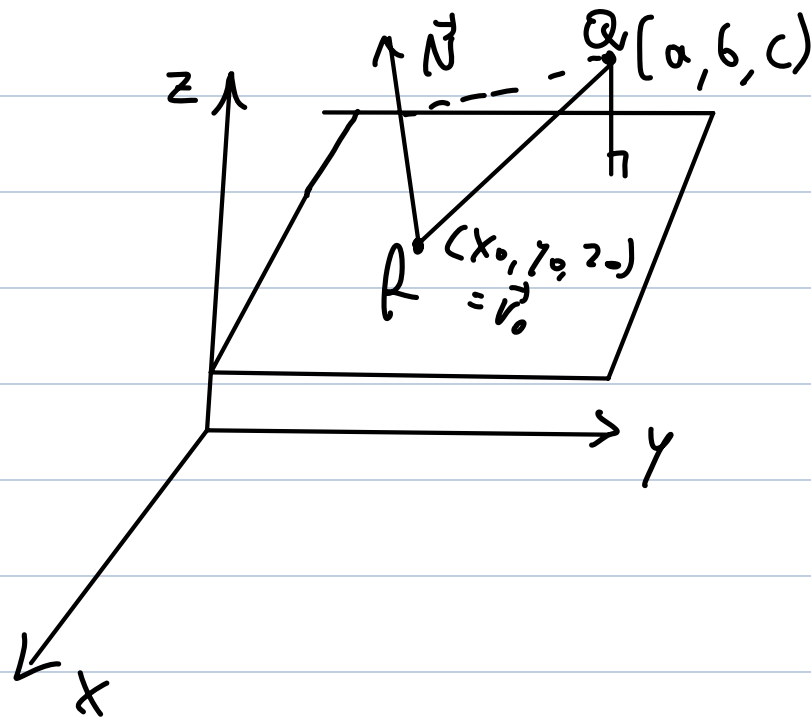
$$d = -\vec{v} \cdot \vec{r}_0 = -ax_0 - by_0 - cz_0$$

Εξίσωση επιπέδου από σημείο $\vec{c} = (x_0, y_0, z_0)$
που περιλαμβάνει τις κατακόρυφους
 $\vec{a}, \vec{b}$

||

Εξίσωση επιπέδου από το σημείο $\vec{c}$
που είναι κάθετο στο $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{N}$

② Απόσταση σημείου από επίπεδο



Σημείο που
 βρίσκεται από
 το (x_0, y_0, z_0)

και είναι εφόσον
 στο $\vec{N} = (N_x, N_y, N_z)$

$$\text{Έστω } (a, b, c) + \vec{N}t$$

$$\mu \quad N_x(x - x_0) + N_y(y - y_0) + N_z(z - z_0)$$

Απόσταση του σημείου από το σημείο

$$= d = \left\| \text{proj}_{\vec{N}} \vec{RQ} \right\|$$

$$= \left\| \frac{\vec{RQ} \cdot \vec{N}}{\vec{N} \cdot \vec{N}} \cdot \vec{N} \right\|$$

$$= \frac{|\vec{RQ} \cdot \vec{N}|}{\|\vec{N}\|^2} \cdot \cancel{\|\vec{N}\|}$$

$$||\vec{N}|| = \sqrt{N_x^2 + N_y^2 + N_z^2}$$

$$\Rightarrow d = \frac{|N_x(a-x_0) + N_y(b-y_0) + N_z(c-z_0)|}{\sqrt{N_x^2 + N_y^2 + N_z^2}}$$

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Παράδειγμα

Έστω τα σημεία $R(-1, 2, 3)$,
 $Q = (0, 0, 0)$ και τα διανύσματα

$$\vec{R} = (1, -1, 1) \quad \vec{b} = (1, 1, 0)$$

Να βρεθεί η παραμετρική εξίσωση
 του ευθείου που περιέχει το R

σε καρτεσιανή $\vec{a}, \vec{b}$

2) Να βρεθεί η εξίσωση του εφ'α
επιπέδου

3) Να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου
από το Q.

$$1) (x, y, z) = (-1, 2, 3) + t(1, -1, 1) \\ + s(1, 1, 0)$$

$$= (-1 + t + s, 2 - t + s, 3 + t)$$

$$2) \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k} = (-1, 1, 2)$$

$$\text{οπότε} : -(x+1) + (y-2) + 2(z-3)$$

$$= \boxed{-x + y + 2z - 9 = 0}$$

$$3) \quad d = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 - ax_0 - by_0 - cz_0|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{1 + 1 + 4} = \sqrt{6}$$

$$d = \frac{|a \cdot 0 + b \cdot 0 + c \cdot 0 - a \cdot (-1) - b \cdot 2 - c \cdot 3|}{\sqrt{6}}$$

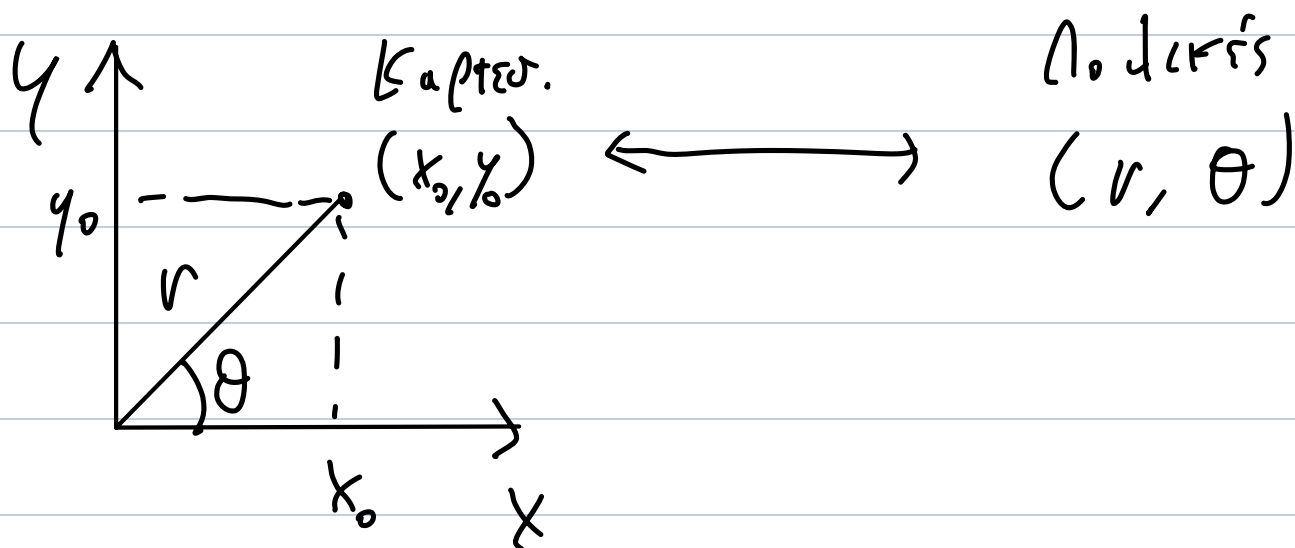
$$= \frac{|-1 - 2 - 6|}{\sqrt{6}}$$

$$= \frac{9}{\sqrt{6}} = d$$



③ Πολικίς Συναρτηρήσεις

στο $\mathbb{R}^2$



$$(x, y) \in \mathbb{R}^2$$



$$(r, \theta) \in [0, +\infty) \times [0, 2\pi)$$

Καρτεσ. $\longrightarrow$ Πολικίς

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = \begin{cases} \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) & , \quad x > 0, y > 0 \\ -\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) & , \quad x < 0, y > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\pi}{2} & , \quad x = 0, y > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & , \quad x = 0, y < 0 \\ 0 & , \quad x = 0, y = 0 \end{cases}$$

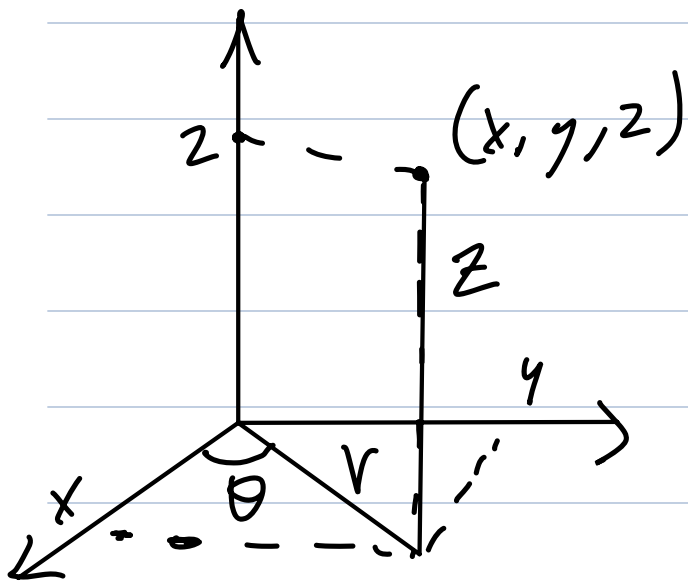
$$\theta \text{ με εξαγωγή } \frac{y}{x} \quad \text{δηλ. } \tan \theta = \frac{y}{x}$$

Πολικίς $\rightarrow$ Καρτεσιανίς

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

④ Κυκλική συντεταγμένη στο $\mathbb{R}^3$



Καρτεσιαν. $\longleftrightarrow$ Κυλινδρικές

$$(x, y, z) \longleftrightarrow (r, \theta, z)$$

$$(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$



$$(r, \theta, z) \in [0, +\infty) \times [0, 2\pi) \times \mathbb{R}$$

Καρτεσιαν. $\longrightarrow$ Κυλινδρικές :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x}$$

$$z = z$$

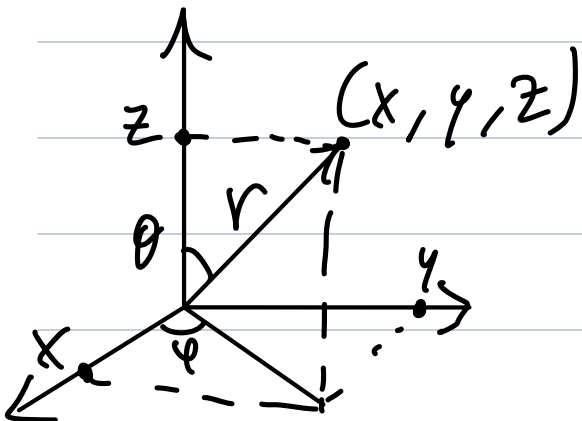
Κυκλική σφαιρική.

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

$$z = z$$

⑤ Σφαίρικές συντεταγμένες στον $\mathbb{R}^3$



$$\text{Καρτεσι.} \longleftrightarrow \Sigma \varphi α ι ρ ι κ ε ς$$

$$(x, y, z) \quad (r, \varphi, \theta)$$

$$(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

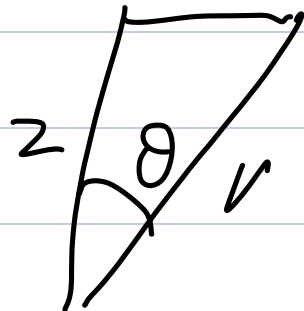


$$(r, \varphi, \theta) \in [0, +\infty) \times [0, 2\pi) \times [0, \pi]$$

$$\text{Καρτεσι.} \longrightarrow \Sigma \varphi α ι ρ ι κ ε ς !$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\tan \varphi = \frac{y}{x}$$



$$\cos \theta = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Σφαιρικές $\longrightarrow$ Καρτεσ.

$$x = r \cos \varphi \sin \theta$$

$$y = r \sin \varphi \sin \theta$$

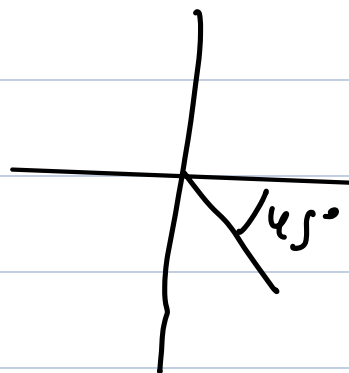
$$z = r \cos \theta$$

⑥ Παράδ.

$P(1, -1, 2) \leftarrow$ Καρτεσ. συντετ.

1) Κυλινδρικές

2) Σφαιρικές



$$1) r = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$\begin{aligned} \tan \varphi &= -1 \Rightarrow \varphi = 2\pi - \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{7\pi}{4} \end{aligned}$$

$$z = 2$$

$$\text{ipa} \quad \left(\sqrt{2}, \frac{7\pi}{9}, 2 \right)$$

$$2) \quad r = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{6}$$

$$\tan \varphi = -1 \Rightarrow \varphi = \frac{7\pi}{9}$$

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{2}{\sqrt{6}} \Rightarrow \theta = \cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{6}}\right) \\ &= \cos^{-1}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right) \end{aligned}$$

$$\text{Apa} \quad \left(\sqrt{6}, \frac{7\pi}{9}, \cos^{-1}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right) \right)$$

⑦ Jawab.

$$P\left(2, \frac{\pi}{6}, 3\right) \leftarrow \text{Kudiuspiksis}$$

$$x = r \cos \varphi = 2 \cdot \cos \frac{\pi}{6}$$

$$= 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

$$y = r \sin \varphi = 2 \cdot \sin \frac{\pi}{6} = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

$$z = 3$$

$$A_p = (\sqrt{3}, 1, 3)$$



9) Παράδειγμα

$$\lim_{x,y \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = ?$$

Λύση

$$y=0 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot 0}{\sqrt{x^2+0}} = 0$$

$$y=x \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+x^2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt{2}|x|}$$

$$= \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{2}|x|} \right) \left(\lim_{x \rightarrow 0} x \right)$$

↑
ε παγγίνο

$$= 0$$

las τρῶμος
ορωρῶς

$$\|f(x, y) - 0\| = \left| \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right|$$

$$= \left| \frac{xy}{(\sqrt{x^2 + y^2})^2} \right| \cdot \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$= \frac{|xy|}{x^2 + y^2} \| (x, y) - (0, 0) \| \quad a)$$

$$(x \pm y)^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \pm 2xy + y^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 \geq \mp 2xy$$

$$\Rightarrow \frac{\mp 2xy}{x^2 + y^2} \leq 1$$

$$\Rightarrow \frac{\mp xy}{x^2 + y^2} \leq \frac{1}{2} < 1$$

$$\Rightarrow \frac{|xy|}{x^2 + y^2} \leq \frac{1}{2} < 1$$

$$(1): \frac{|xy|}{x^2 + y^2} \| (x, y) - (0, 0) \|$$

$$\leq \frac{\| (x, y) - (0, 0) \|}{2}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = 2\varepsilon \text{ with}$$

$$\forall \quad \|f(x, y) - (0, 0)\| < \delta$$

$$\forall \epsilon \quad |f(x, y) - 0| < \frac{1}{2} \delta = \epsilon$$

$\frac{1}{2} \delta$
 2ϵ

⑩ Παράδειγμα

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (1, 2)} \frac{(x-1)(y-2)}{\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2}}$$

$$\stackrel{=}{\uparrow} \quad \lim_{(a, b) \rightarrow (0, 0)} \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 0$$

όπως

δηλαδή συνηθώς

$a = x - 1$
 $b = y - 2$

2ος Τρόπος στο (9)

Πολικκίς

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r \cos \theta \cdot r \sin \theta}{r}$$

$$= \lim_{r \rightarrow 0} r \cos \theta \sin \theta = 0$$

$$\uparrow$$
$$-1 \leq \frac{\sin 2\theta}{2} \leq 1$$

(11) Παράδειγμα

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^{xy} - 1}{xy}$$

$$\cancel{e^{xy} \geq 1 + xy}$$

~~$$\Rightarrow \frac{e^{xy} - 1}{xy} \geq 1$$~~

Έστω $u = xy$

τότε $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{e^u - 1}{u}$

$$= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{e^u}{1} = 1$$

(2) Παρατήρηση

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = l$$

$$\left. \lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x,y) = l_1 \right\}$$

$$\left. \lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x,y) = l_2 \right\}$$

Συναρτηρ.
όριμα
όρια

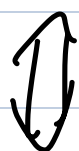
$A \cup \exists$ το όριο τότε $\exists$ τα
στα να τα μεβυνόμενα όρια
και $d_1 = d_2 = d$

Όπως γράφει να $\exists$ τα στα να τα.
και $\nexists$ το όριο

(13) Παραγωγισιμότητα στη
1 διάσταση

$$f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

η f είναι απλ. στο x_0

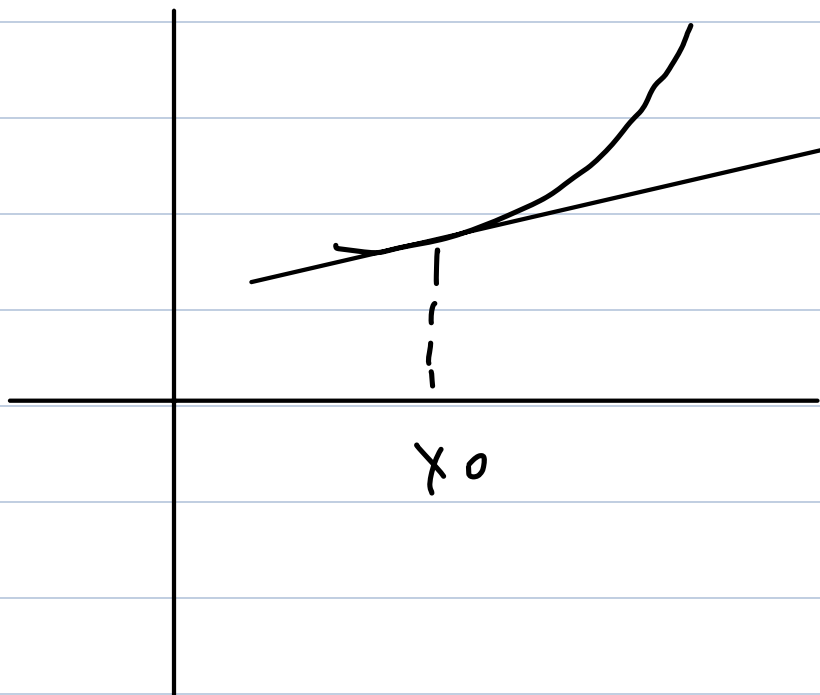


$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

• πρώτος

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - (f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0))}{(x - x_0)} = 0$$

Σημ. εφαπτ. της f στο x_0



Στη / διάσταση : f παραγωγ.

στο x_0



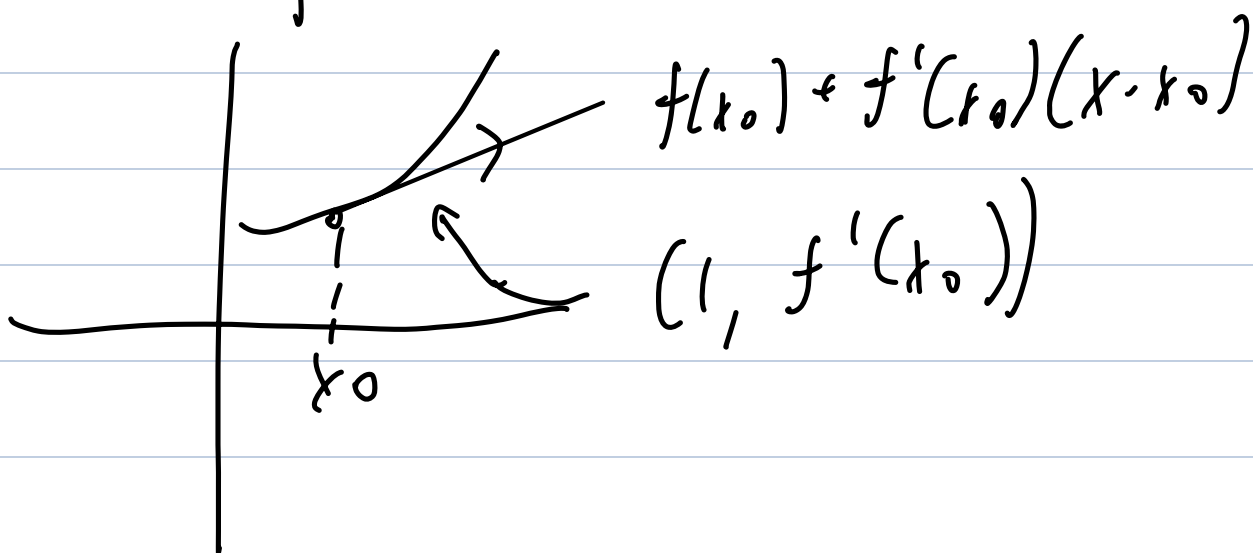
" f προσεγγίζει καλά από
την εφαπτόμενη ευθεία της
στο x_0 "

Γενίκευση



Καλά από το εφαπτόμενο τμήμα στο

(14) Μερίκις Παράγωγοι

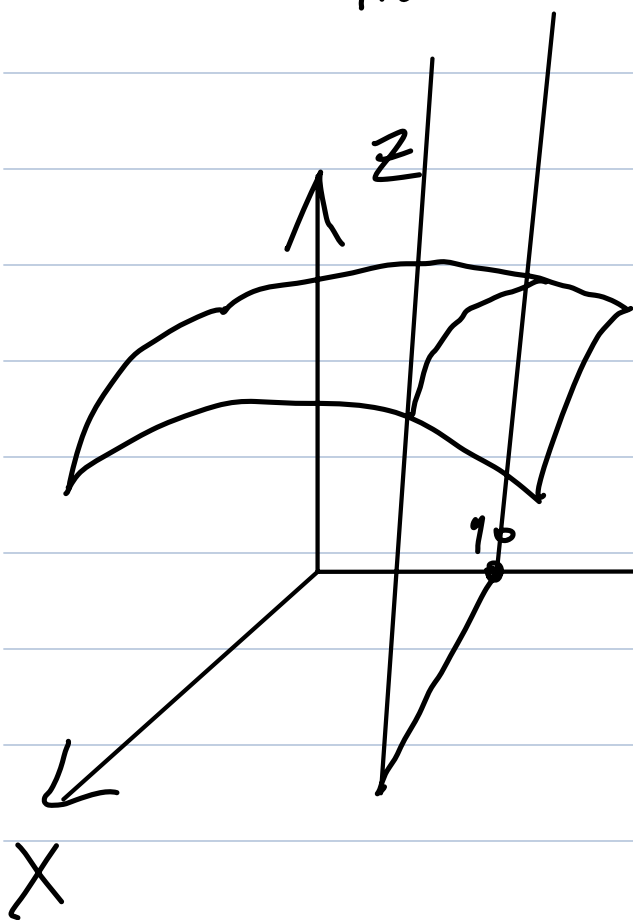


Ορισμός

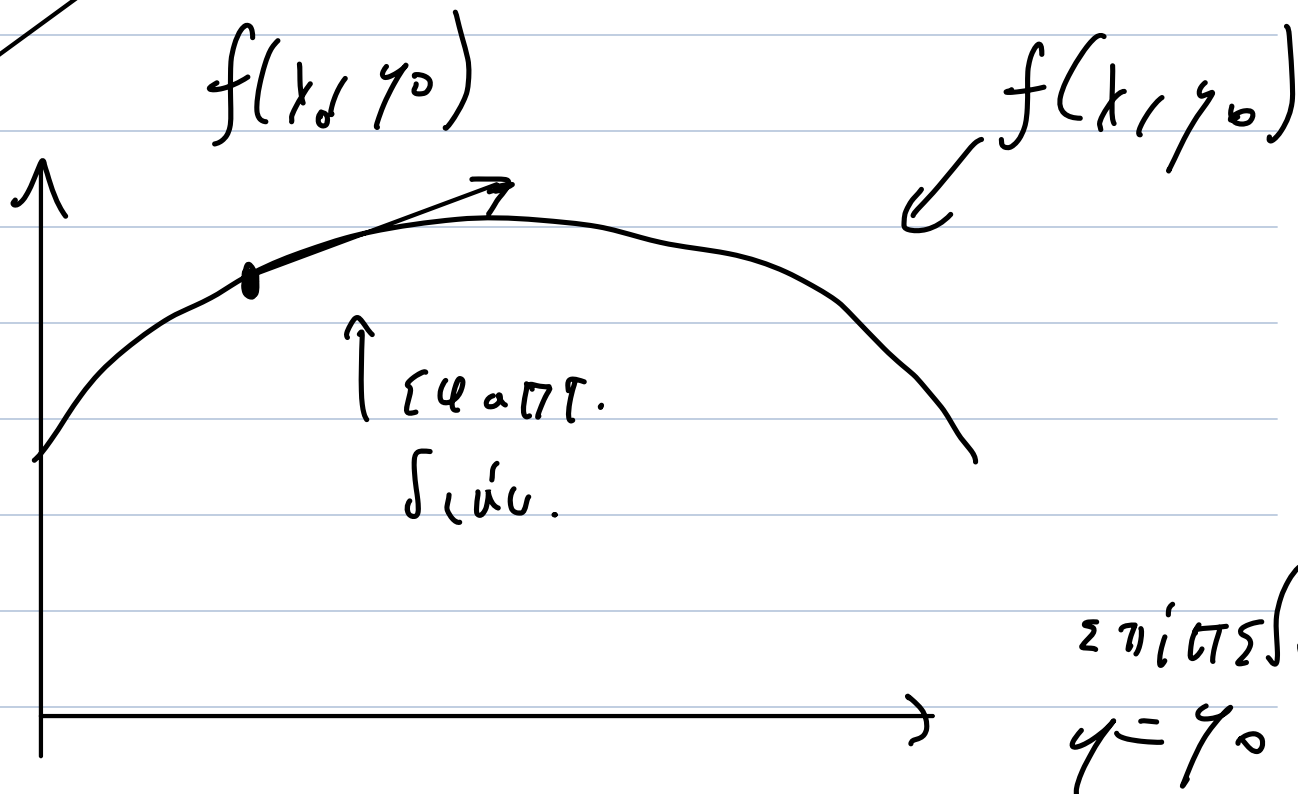
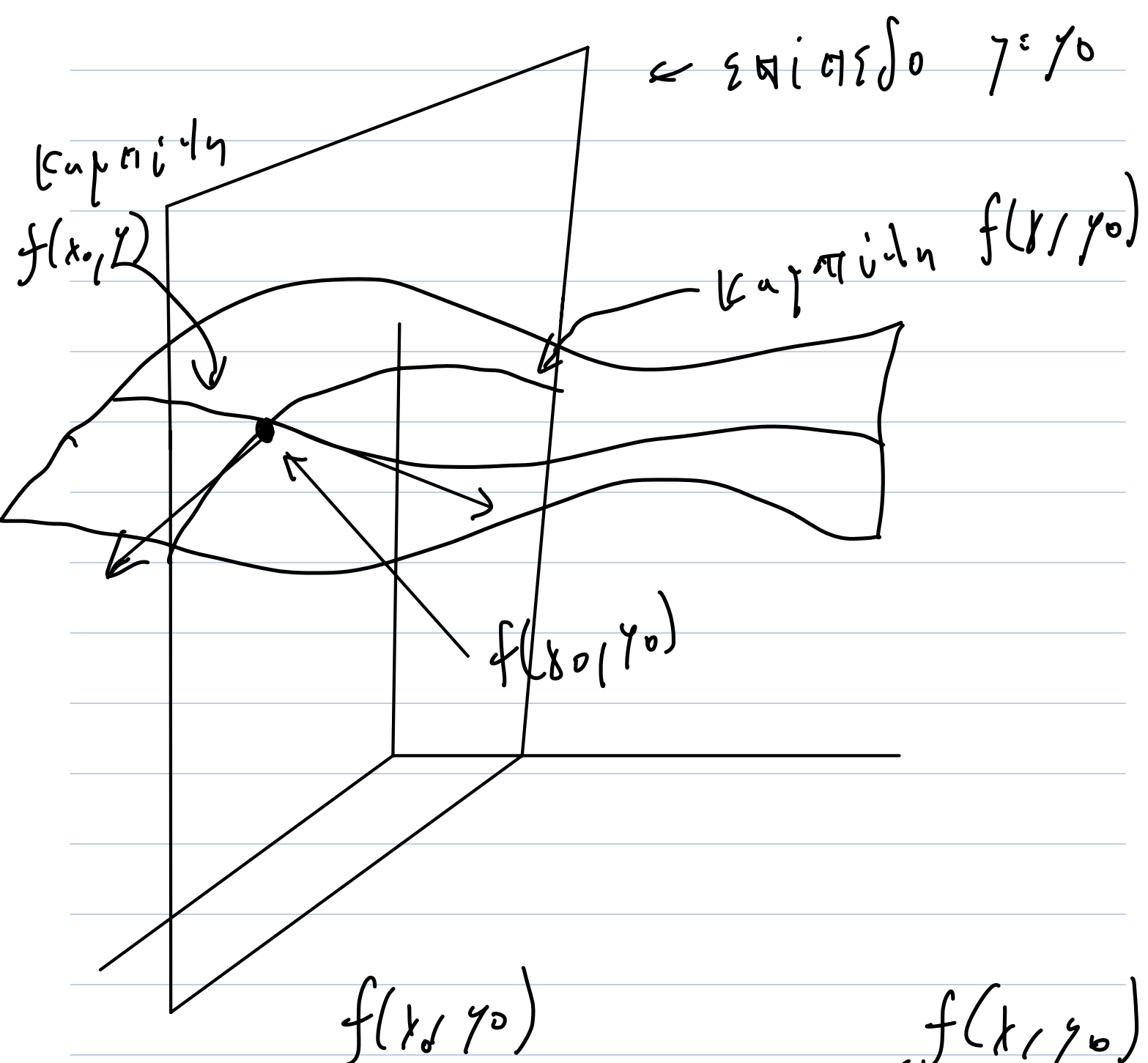
Μερική παράγωγος της $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
στο (x_0, y_0) ως προς x ονομάζεται

$$= \frac{\partial f}{\partial x} (x_0, y_0)$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}$$



Γράφημα της f
 $= \{ (x, y, f(x, y)), x, y \in A \}$



$$\left(1, \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \right)$$

$$\vec{k}_x = \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \right)$$

$$\vec{k}_y = \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right)$$

Αν υποθέσουμε ελαστικό

σημείο στο γράφημα της f

στο σημείο $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$

τότε πρέπει να επιλέξουμε

$(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ και τις κατασκευάζουμε

$$\left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \right)$$

$$(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0))$$

Αυτός το τμήμα είναι το

$$(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$$

$$+ t(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0))$$

$$+ s(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)), \quad t, s \in \mathbb{R}$$

$$= \left(\underbrace{x_0 + t}_x, \underbrace{y_0 + s}_y, \right.$$

$$f(x_0, y_0) + t \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$$

$$+ s \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0))$$

$$= (x, y, f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0)$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

$$Z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

15 Να παραγωγίσιμη στο (x_0, y_0)
 $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$f \text{ παραγωγίσιμη στο } (x_0, y_0) \\ \Leftrightarrow \lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} \frac{f(x, y) - \left(f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) \right)}{\|(x, y) - (x_0, y_0)\|} = 0$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{f_x(x-x_0) + f_y(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}}$$

$$\lim_{(a,b) \rightarrow (0,0)} \frac{f_x a + f_y b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\begin{array}{c} \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \\ \uparrow \qquad \qquad \uparrow \\ \vec{f} \qquad \qquad \vec{c} \end{array}$$

$$\lim_{\|\vec{c}\| \rightarrow 0} \frac{\vec{f} \cdot \vec{c}}{\|\vec{c}\|} = \lim_{\|\vec{c}\| \rightarrow 0} \frac{\|\vec{f}\| \|\vec{c}\| \cos \theta}{\|\vec{c}\|}$$

$$= \|\vec{f}\| \cos \theta$$

~~$\cos \theta \in [-1, 1]$ άρα
δεν υπάρχει το όριο.~~

$$\vec{f} = \vec{f}(x_0, y_0)$$

για να είναι παραγωγισιμη η
 f πρέπει $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y)$ να υπάρχει
 $\lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) \nearrow$

f_x, f_y constants

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} \frac{f(x, y) - f(x_0, y_0)}{\|(x, y) - (x_0, y_0)\|} = \|\vec{f}_d\| \cos \theta_{\vec{f}_d, \vec{c}}$$

$$\vec{f}_d \text{ constant} \quad \vec{c} = v \cdot \vec{f}$$

$$\vec{f} = \begin{bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{bmatrix}$$

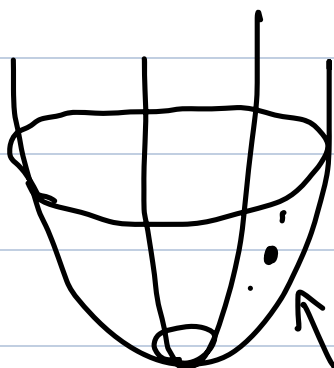
$$\|\vec{c}\| = v$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{r f_x \cos \varphi + r f_y \sin \varphi}{r}$$

$$= f_x \cos \varphi + f_y \sin \varphi$$

όπου φ ορίζει τον προσανατολισμό της $\vec{C} = (x, y) - (x_0, y_0)$

αντίστοιχα $\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} \frac{f(x, y) - f(x_0, y_0)}{\|(x, y) - (x_0, y_0)\|}$



έχει πρόσημο αυτό!

σημειώνω ο παρανομαστής είναι απόλυτη τιμή.

Μερικές Παράγωγοι και

Παραγωγισιμότητα

① Υψηλές Συνθήκες

$$f: A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

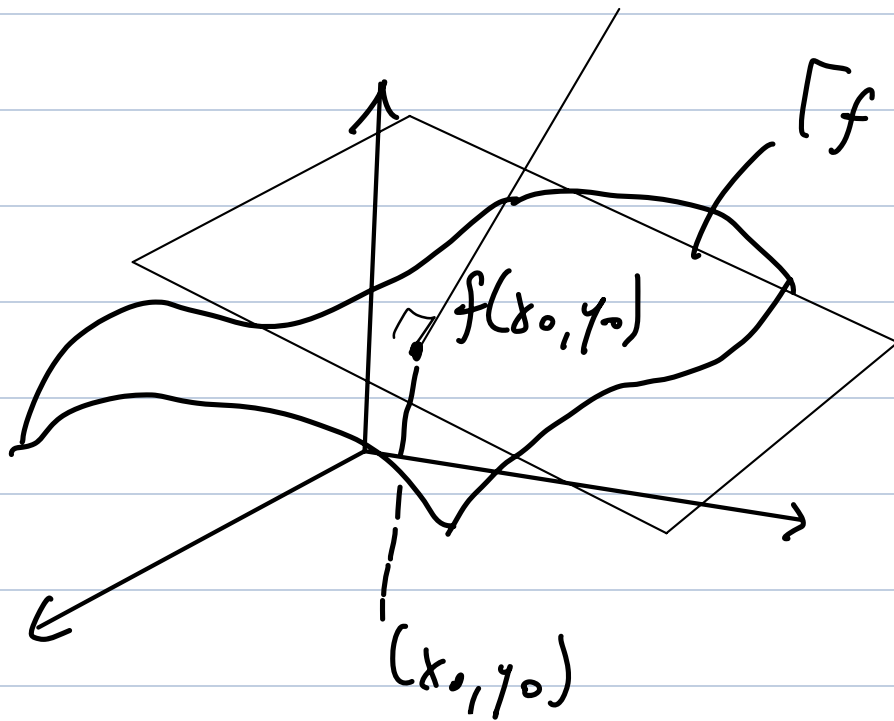
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}$$

Αν υπάρχει εφαπτόμενο επίπεδο στο γράφημα της f :

$$\Gamma_f = \{ (x, y, f(x, y)) : (x, y) \in A \}$$

σημ $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$



$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

↑
το σημείο γινεται επίκεντρο

② Παράδειγμα 1

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & x \neq 0 \text{ ή } y \neq 0 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad \text{σχεδόν παντού}$$

Παρόλα αυτά δεν έχει έννοια
ελαστικότητα για (x, y) με
 $x=0$ ή $y=0$

③ Παράδειγμα 2

$$f(x, y) = \sqrt[3]{xy} = x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{1}{3}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} y^{\frac{1}{3}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{3} x^{\frac{1}{3}} y^{-\frac{2}{3}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, y) - f(0, y)}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{1}{3}} - 0}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} y^{\frac{1}{3}} = \pm \infty$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x}$$

$$= 0$$

Obvious γ as to $\frac{\partial f}{\partial y}$.

$$\text{At } \tau_0(0, 0) \quad \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$$

Αν υποθέτουμε το παραπάνω σημείο
θα είχαμε ότι είχε εξίσωση:

$$z = 0$$

όμως μια παλιά στο γράφημα

δείχνει ότι βρίσκουμε αυτό το παραπάνω

σημείο.

Πρόβλημα 1

Επίσης αν:

$$h(x) = f(x, x)$$

$$\Rightarrow h'(x) = \left[x^{\frac{2}{3}} \right]' = \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}}, \quad x \neq 0$$

$$h'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x) - h(0)}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{\frac{2}{3}}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x^{-\frac{1}{3}} \quad \nexists$$

Πρόβλημα 2

Η $h(x)$ είναι
σύνθεση της

$f(x, y)$ με την

$$\vec{g}(x) = (x, x)$$

Παρότι η f, g ομαλές στο $(0, 0)$, ο
η h δεν είναι ομαλή.

4) Θεώρημα

$f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ σταθαιστική στο (x_0, y_0)

$$\Leftrightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - \left[f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) \right]}{\|(x,y) - (x_0,y_0)\|}$$

⑤ Γενίκευση

$$f: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

παράγωγ. στο $\vec{x}_0$

$$\Leftrightarrow \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} \frac{\|f(\vec{x}) - [f(\vec{x}_0) + T(\vec{x}_0)(\vec{x} - \vec{x}_0)]\|}{\|\vec{x} - \vec{x}_0\|} = 0$$

Για $n=2$ έχουμε $T(\vec{x}_0)$ $m \times n$

$$A \quad n=2$$

$$m=1$$

$$T(\vec{x}_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \end{bmatrix}$$

[ενικά

$$T(\vec{x}_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_x}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_x}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_y}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_y}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_z}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_z}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

⑥ Θεωρήματα

⊥ Αν υπάρχει ο $T(\vec{x}_0)$, είναι μοναδικός και

$$T(\vec{x}_0) = D\vec{f}(\vec{x}_0)$$

↑
διαφορικός της f στο $\vec{x}_0$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

$$\text{cu } n=2, m=1$$

$$\rightarrow Df(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right)$$

$$2] f: A \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \text{ trap.}$$

$$\Rightarrow \text{invers}$$

$$3] A_v \exists \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x_0) \quad \begin{matrix} j = 1, 2, \dots, m \\ i = 1, 2, \dots, n \end{matrix}$$

και είναι συνέπης της ανολατης
περιολής του x_0 τότε η f είναι
παγωγώση στην περιολή αυτή.

Ασκήσεις 2.2.8, 2.2.10

2.3.1, 2.3.8, 2.3.12

⑦ Θροτοχία

$Df(\vec{x}_0) \leftarrow$ διαφορικό της f
πίνακας $m \times n$

Σε κάποια βιβλία το διαφορικό
είναι η γραμμική συνάρτηση

$$Df(\vec{x}_0) \cdot \vec{x}$$

$$\Gamma_u \quad m=1$$

$$Df(\vec{x}_0) = \underbrace{\nabla f(\vec{x}_0)}$$

ανάδεκτη, βαθμίδα, τιμή της f

8 Παραδείγματα

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$z = f(x, y) = e^{xy^2} \ln(x^2 + y^2 + 1)$$

i) f διαφορίσιμη / αμερόληπτη;

ii) αν f διαφορίσιμη να γραφτεί η εξίσωση του εφαπτομένου επιπέδου στο σημείο $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$

$$= (0, 1, \ln 2)$$

iii) Να βρεθεί το πρ. εσθχχιστική η
 τιμή της f στο σημείο

$$f(0.1, 0.99) \quad \text{από το}$$

το αστεύριο το οποίο.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2 e^{xy^2} \ln(x^2 + y^2 + 1) + \frac{2xy e^{xy^2}}{x^2 + y^2 + 1} \quad \exists \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2xy e^{xy^2} \ln(x^2 + y^2 + 1) + \frac{2y e^{xy^2}}{x^2 + y^2 + 1} \quad \exists \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

συνεχής στο $\mathbb{R}^2$ ή να

παράγει σίγουρα $f(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

ii) εξίσωση σειράς Taylor στο (x_0, y_0)

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

$$f(0, 1) = \ln 2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 1) = \ln 2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 1) = 1$$

$$\begin{aligned}
 z &= \ln 2 + x \ln 2 + (y-1) \\
 &= (1+x) \ln 2 + (y-1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 z(0.1, 0.99) &= 1.1 \cdot \ln 2 - 0.01 \\
 &\hat{=} f(0.1, 0.99)
 \end{aligned}$$

9 Παράδειγμα

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x, y) \in (0, \infty) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

i) συνεχής

ii) περικοπές στα όρια;

iii) συνεχής • περικοπές στα όρια;

iv) είναι συνεχής;

i) αραφανής συνεχής για $(x, y) \neq (0, 0)$

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{r \cos \varphi r \sin \varphi}{r}$$

$$= \lim_{r \rightarrow 0^+} r \cos \varphi \sin \varphi$$

$$= \lim_{r \rightarrow 0^+} r \frac{\sin 2\varphi}{2}$$

$$= 0 \text{ αφού } \frac{\sin 2\varphi}{2}$$

πραγματοποιεί

$$-\frac{1}{2} \leq \frac{\sin 2\varphi}{2} \leq \frac{1}{2}$$

$$\text{Αρα } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \text{ ορίσας}$$

f συνεκτής

αρκεί $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = 2\varepsilon$ π.ω. αν

$$\|(x,y) - (0,0)\| < \delta \Rightarrow \|f(x,y) - f(0,0)\| < \varepsilon$$

Αρα συνεκτής και στο $(0,0)$

$$ii) \quad \Gamma_{\text{ca}} \quad (x,y) \neq (0,0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \right)$$

$$= \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{1}{2} \frac{2x^2y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x^2y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{x^2/y + y^3 - x^2/y}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

$$= \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)^3$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)^3$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x,0)}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x} = 0$$

Therefore $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$

Άρα οι $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ υπάρχουν παντού.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)^3 \text{ συνεχής}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)^3 \text{ συνεχής}$$

$$\Sigma \text{ε} \text{ } (0, 0)$$

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = ;$$

$$\Gamma \text{ε} \text{ } y = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\partial f}{\partial x}(x, 0) = 0$$

$$\Gamma \text{ε} \text{ } y = x \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\partial f}{\partial x}(x, x)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + x^2}} \right)^3$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{|x|\sqrt{2}} \right)^3 \quad \text{δεν υπάρχει (διαφορετικά σιμωρικά).}$$

$$\text{Άρα } \nexists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$$

$$\text{Άρα } \frac{\partial f}{\partial x} \text{ ασυνεχής στο } (0,0) \text{ και ομοίως και η } \frac{\partial f}{\partial y}.$$

$$iv) \text{ Απει } \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

$$\text{συνεχίζει στο } \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

$$\Rightarrow f \text{ απροσγwg. στο } \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

$$\in \text{ εξισώνεις την διαφ. στο } (0,0)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) - (f(0,0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)(x-0) + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)(y-0))$$

$$\| (x, y) - (0, 0) \|$$

$$= \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{\frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} - (0 + 0 + 0)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

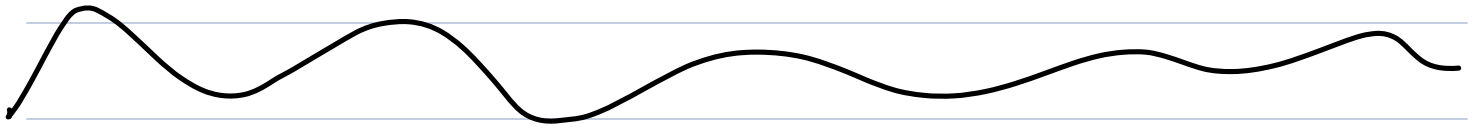
$$= \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

$$\text{Αν } y = x \quad \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^2}{x^2 + x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Αν } y = 2x \quad \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{2x^2}{x^2 + 4x^2} = \frac{2}{5} \neq \frac{1}{2}$$

Αρα δεν υπάρχει το όριο

Άρα η f έχει συνεκρίσιμη στο $(0,0)$



10) Δία της απόδειξης του

Θεωρ. 3

Συνέχεια Μερικώς Διαφ. $\Rightarrow$ Διαφορο-
οπισμ

Διαφ.

στο

$(0,0)$

$\Leftrightarrow$

πν

$f(x,y)$

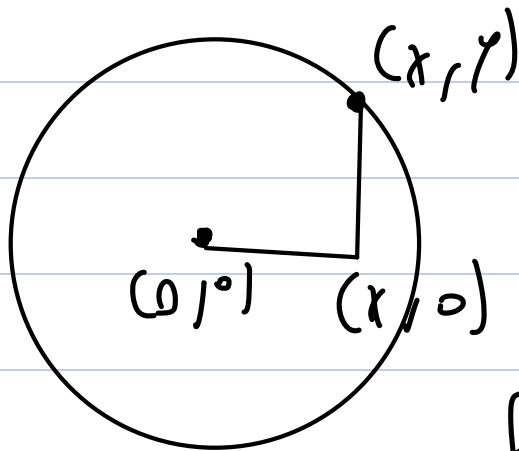
$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)}$

$-f(x,0) + f(x,0)$

$f(x,y) - f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)(x-0)$

$- \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)(y-0)$

$$\|(x, y) - (0, 0)\|$$



$$f(x, y) - f(x, 0)$$

)

$$\left[\begin{aligned} & \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, \xi_y) - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) \right) \cdot y \\ & + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\xi_x, 0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) \right) \cdot x \end{aligned} \right]$$

$$\|(x, y)\|$$



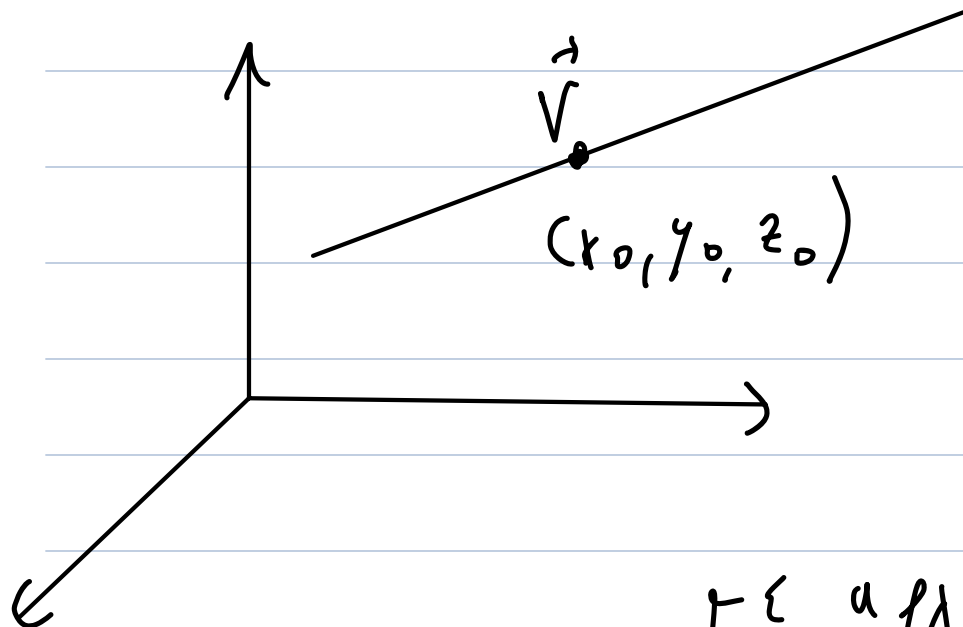
Διαδρομές και καμπύλες

① Ορισμός

$$\vec{v} : \underbrace{I \subseteq \mathbb{R}}_{\text{διάστημα}} \longrightarrow \mathbb{R}^m_{\text{διαδρομή}}$$

$\vec{v}(I) \leftarrow$ καμπύλη με μια
παραμετροποίηση $\vec{v}$

② Παραδείγματα



Διαδρομή με

Σ.Θ.Κ.

Γεωμετρική σημείωση

(x_0, y_0, z_0) Εκκέντρωση

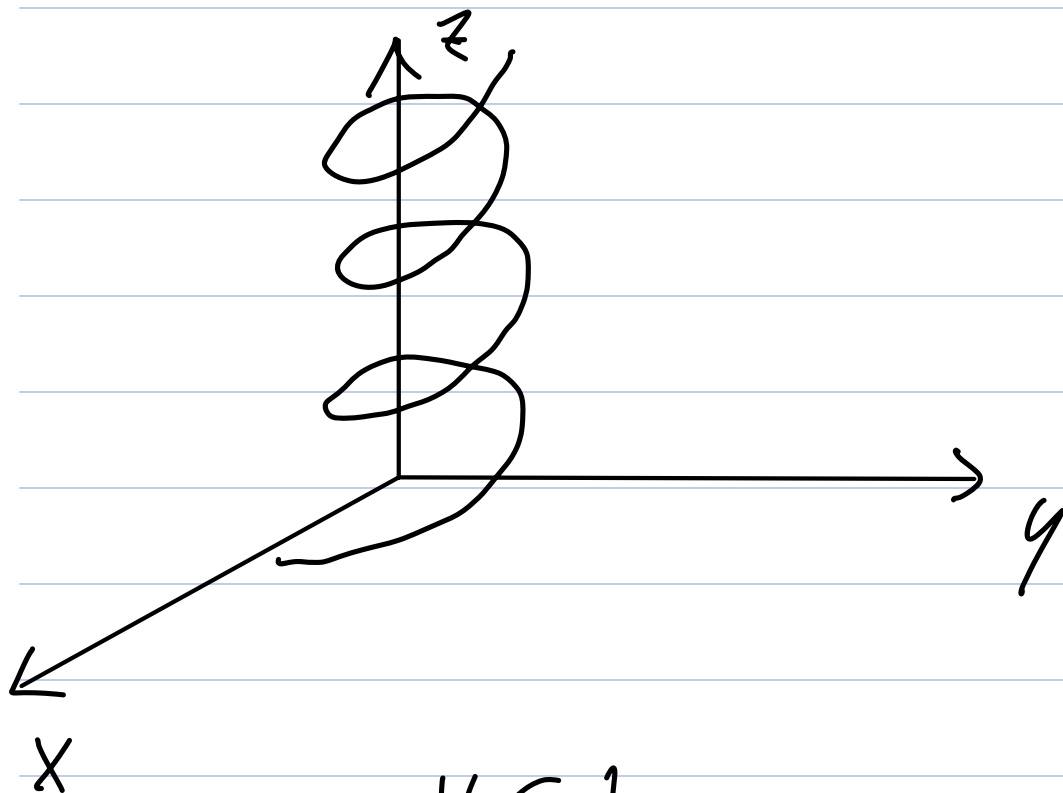
$$\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$$

$$\vec{r} : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\vec{r} = (x_0 + v_x t, y_0 + v_y t, z_0 + v_z t)$$

$$C = \{ \vec{r}(t) : t \in [0, +\infty] \}$$

3 Παράδειγμα 2

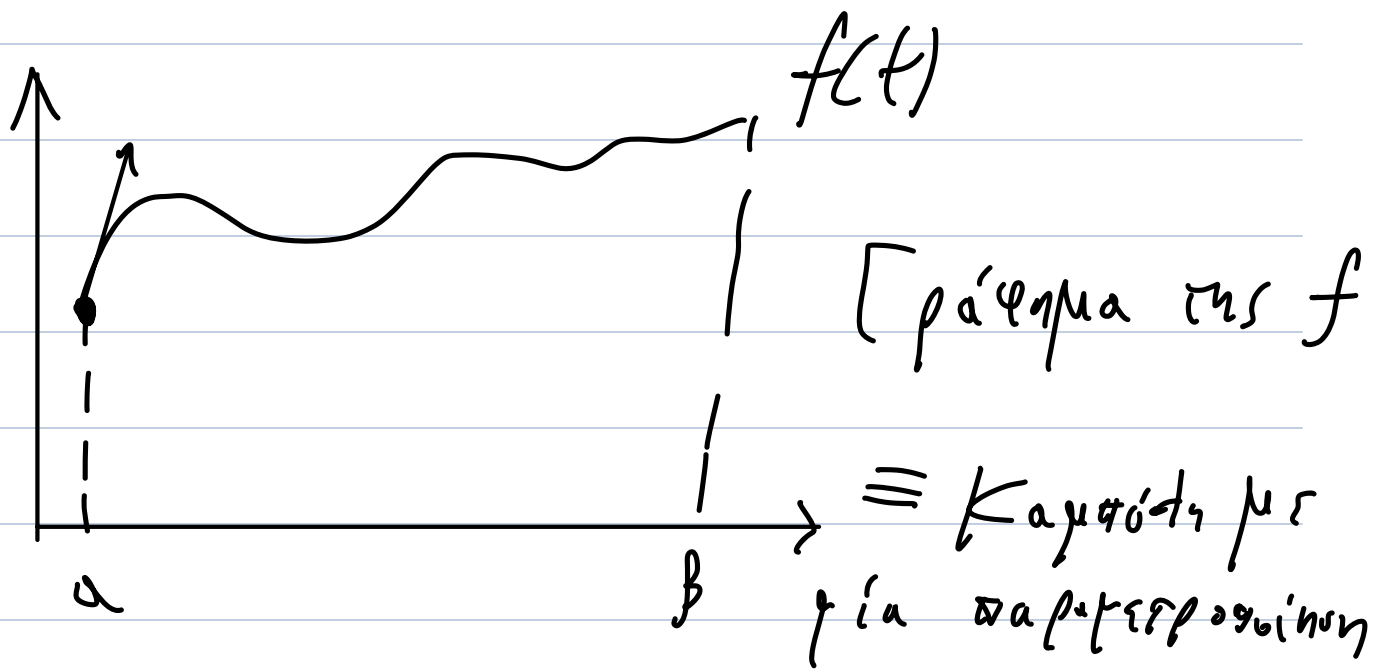


"Σπείρα",

$$\vec{r} : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\vec{r}(t) = (r \cos t, r \sin t, vt)$$

4 Παράδειγμα



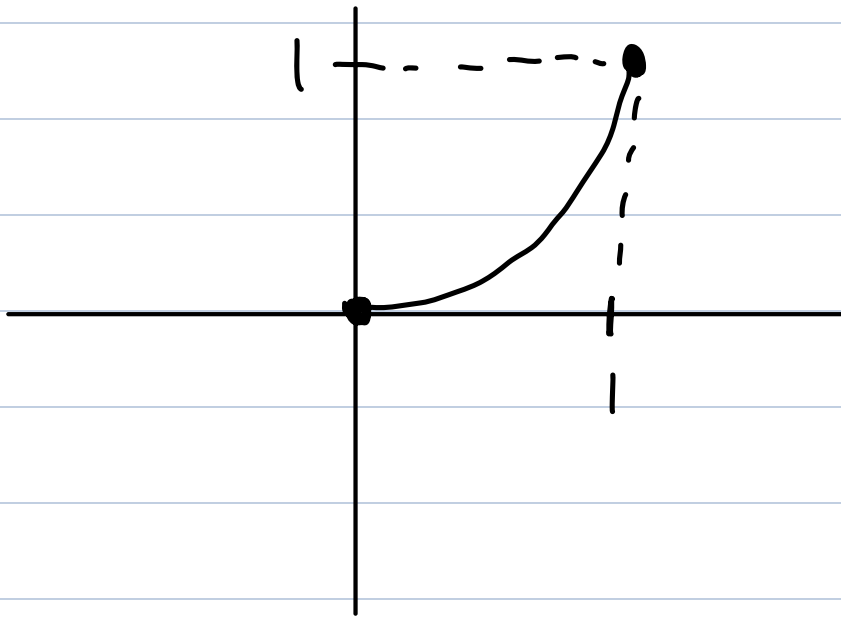
$$\vec{r}[a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\vec{r}(t) = (t, f(t))$$

5) Παράλ. 4

Καμπύλη: κομμάτι Παραβολής $y = x^2$

$$\text{για } x \in [0, 1]$$



Παραμετροποίηση 1: $\vec{r}_1: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$\text{Γε } \vec{r}_1(t) = (t, t^2)$$

Παραμετροποίηση 2:

$$\vec{r}_2: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

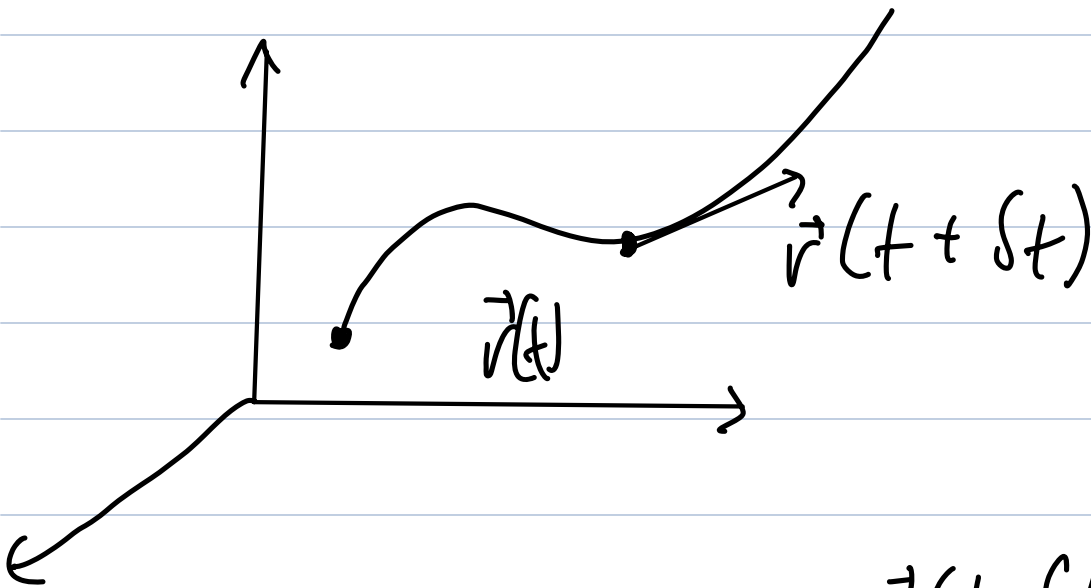
$$\text{Γε } \vec{r}_2(t) = \left(\frac{t}{2}, \frac{t^2}{4} \right)$$

Παραμετροποίηση 3:

$$\vec{r}_3: \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\text{πρ } \vec{v} = (\sin t, \sin^2 t)$$

6) Ταχύτητα Διαδρομής



$$\vec{v}'(t) = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \delta t) - \vec{r}(t)}{\delta t}$$

ταχύτητα της διαδρομής $\vec{r}(t)$

7 Παράδειγμα

Έστω η διαδρομή

$$\vec{r}: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\text{π.ε. } \vec{r}\left(\frac{1}{e^t}, e^t, te^t\right)$$

Έστω $C = \vec{r}([0,1])$ η εφ'αυτού

Να βρεθεί η εξω. εφαπ. της
C στο σημείο $(1,1,0)$

$$= (1,1,0) + \vec{r}'(t) \cdot x$$

$$\vec{r}'(t) = (se^{2t}te^{2t}, e^t, (t+1)e^t)$$

$$\vec{r}(t) = (1, 1, 0)$$

$$\Rightarrow t = 0 \quad \text{είναι } \vec{r}'(0) = 0$$

$$\vec{r}'(t) = (0, 1, 1)$$

$$\Rightarrow \vec{r}_0 = (1, 1, 0) + (0, 1, 1) \cdot s$$

$$= (1, 1+s, s)$$

η παραμετρική εξίσωση της ↗

εφαρμογής της $\vec{r}$ στο $(0, 0, 0)$

$$\begin{aligned} x &= 1 \\ y &= 1+s = 1+z \\ z &= s \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= 1 \\ y &= 1+z \end{aligned}$$

Παράγωγος - Ιδιότητες

① Βασικές Ιδιότητες

$$f: U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$$g: U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$$D(\vec{f} \pm \vec{g})(\vec{x}_0) = D\vec{f}(\vec{x}_0) \pm D\vec{g}(\vec{x}_0)$$

Για την περίπτωση $m=1$

$$\Rightarrow D(f \cdot g)(\vec{x}_0) = g(\vec{x}_0) \cdot Df(\vec{x}_0) \\ + f(\vec{x}_0) \cdot Dg(\vec{x}_0)$$

$m=1$:

$$D\left(\frac{f}{g}\right)(\vec{x}_0) = \frac{1}{g(\vec{x}_0)^2} \left(g(\vec{x}_0) Df(\vec{x}_0) - f(\vec{x}_0) Dg(\vec{x}_0) \right)$$

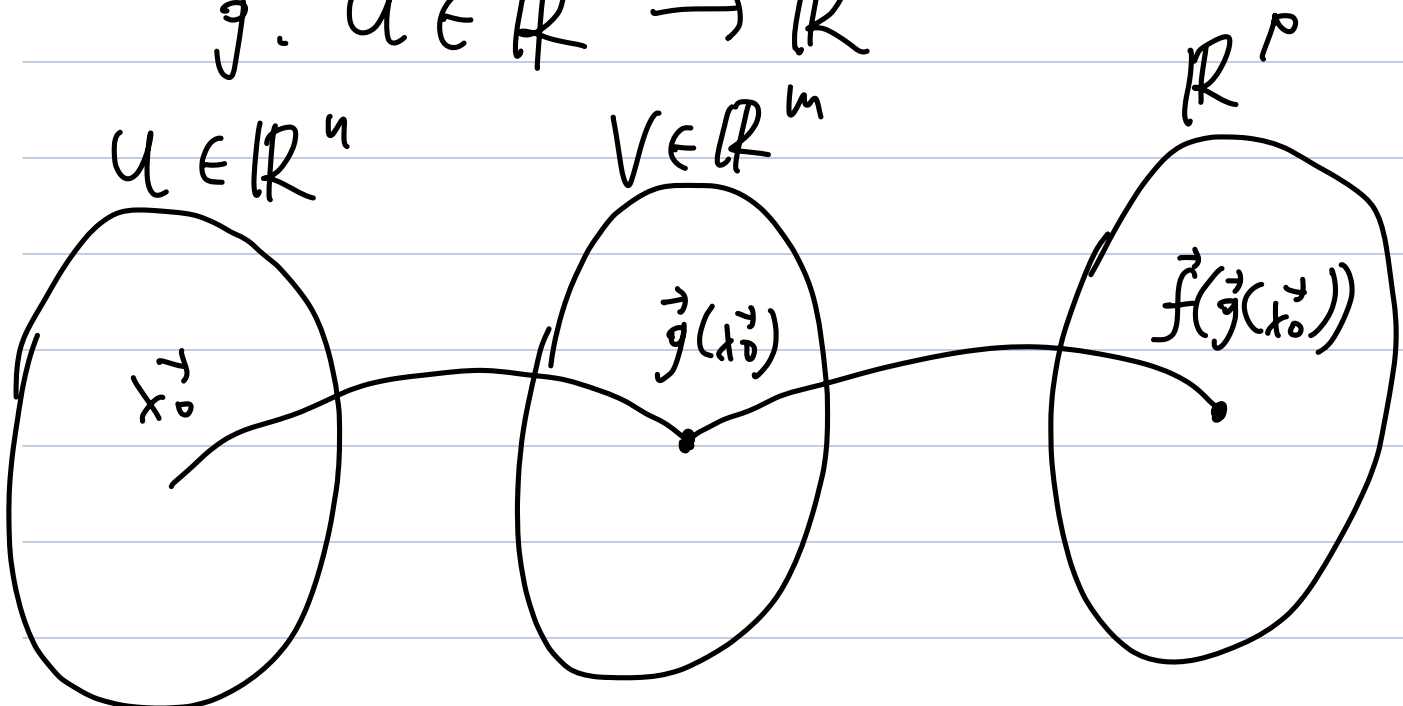
$$g(\vec{x}_0)^2 \neq 0$$

$$\left[\begin{array}{l} Df(\vec{x}_0) \in \mathbb{R}^{m \times n} \\ Dg(\vec{x}_0) \in \mathbb{R}^{m \times n} \end{array} \right]$$

② Καρίνας Αλμοίρας

$$\vec{f}: V \in \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$$

$$\vec{g}: U \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$



$$p = m = n = 1 :$$

$$(f \circ g)(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$$

Γενικά:

$$D(\vec{f} \circ \vec{g})(\vec{x}_0) = \underset{\substack{\uparrow \\ p \times n}}{D\vec{f}(\vec{g}(\vec{x}_0))} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ m \times n}}{D\vec{g}(\vec{x}_0)}$$

③ Παράδειγμα

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad f(x, y, z) = (xy^2, yz^2)$$

$$g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad g(s, t) = (e^s, s \cos t, s+t)$$

$$D(f \circ g)(s, t) = ;$$

$$f \circ g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$D(f \circ g)(s, t) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

Λύση:

los πρώτος (χωρίς εύνοια αλγορίθμου)

$$(f \circ g)(s, t) = (e^s \cdot s^2 \cos^2 t, s \cdot \cos t (s+t)^2)$$

$$D(f \circ g)(s, t) =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial s} (e^s s^2 \cos^2 t) & \frac{\partial}{\partial t} (e^s s^2 \cos^2 t) \\ \frac{\partial}{\partial s} (s \cdot \cos t (s+t)^2) & \frac{\partial}{\partial t} (s \cdot \cos t (s+t)^2) \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial}{\partial s} (e^s s^2 \cos^2 t) = e^s s^2 \cos^2 t + 2s e^s \cos^2 t$$

$$= \cos^2 t (e^s s^2 + 2e^s s)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (e^s s^2 \cos^2 t) = -2e^s s^2 \cos t \sin t$$

$$\frac{\partial}{\partial s} s \cdot \cos t \cdot (s+t)^2 = \cos t \cdot (s+t)^2 + 2s \cos t (s+t)$$

$$= \cos t ((s+t)^2 + 2(s+t))$$

$$\frac{\partial}{\partial t} s \cdot \cos t \cdot (s t t)^2 = -s \cdot \sin t (s t t)^2 + 2s \cos t (s t t)$$

Δύσκολο...

2ος τρόπος:

$$\begin{aligned} Df(x, y, z) &= \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} (x y^2) & \frac{\partial}{\partial y} (x y^2) & \frac{\partial}{\partial z} (x y^2) \\ \frac{\partial}{\partial x} (y z^2) & \frac{\partial}{\partial y} (y z^2) & \frac{\partial}{\partial z} (y z^2) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} y^2 & 2xy & 0 \\ 0 & z^2 & 2yz \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$Ug(s, t) =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial s}(e^s) & \frac{\partial}{\partial t}(e^s) \\ \frac{\partial}{\partial s}(s \cdot \cos t) & \frac{\partial}{\partial t}(s \cos t) \\ \frac{\partial}{\partial s}(stt) & \frac{\partial}{\partial t}(stt) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e^s & 0 \\ \cos t & -s \sin t \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

'Apa

$$g(s, t) = (e^s, s \cos t, s t t)$$

$$D(f \circ g)(s, t) = Df(g(s, t)) \cdot Dg(s, t)$$

$$= \begin{pmatrix} s^2 \cos^2 t & 2e^s \cdot s \cos t & 0 \\ 0 & (s+t)^2 & 2s \cos t (s+t) \end{pmatrix}$$

$$\times \begin{pmatrix} e^s & 0 \\ \cos t & -s \sin t \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial}{\partial s}(f \circ \gamma) = e^{s^2 \cos^2 t} + 2e^s \cdot s \cos^2 t + \phi$$

$\in \lambda \sigma.$

④ Ειδική Περίπτωση 1.

Καν. Ακρίβειας

$$f: V \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

← μέγεθος
(πχ. θερμοκρασία)

$$\vec{r}: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

← καμπύλη
(από το $\rightarrow$

$$\vec{f} \circ \vec{r}: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

συνάρτηση του χώρου)

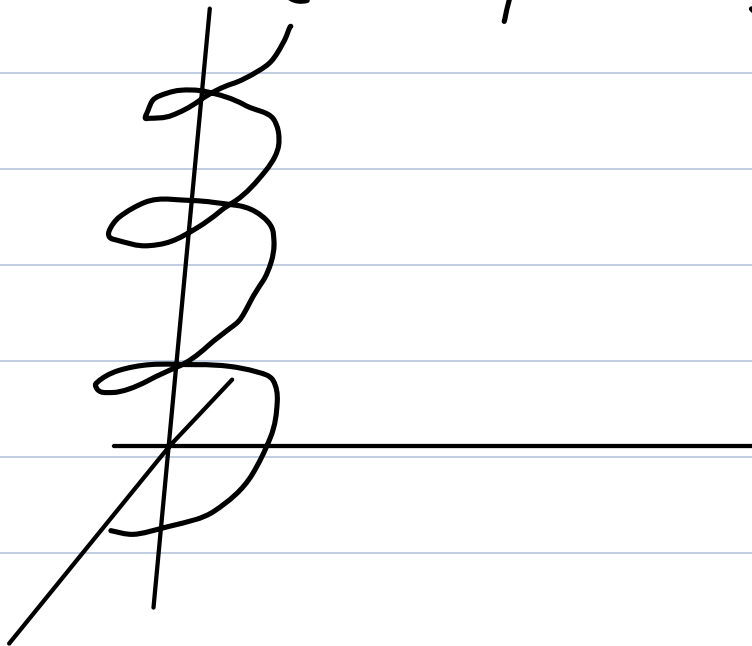
$$\frac{d(f \circ \vec{r})}{dt} = \nabla f(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t)$$

$\uparrow$
 δάνασμα
 ταχύτητας

Παράδειγμα

Ένα σωματίδιο διαγράφει τη
καμπύλη

$$\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, t)$$



$$f(x, y, z) = \text{Θερμότητα στο } (x, y, z) \\ = x^2 + y^2 + z^2$$

Ρυθμός μεταβολής της Θερμότητας
ως προς χρόνο που αισθάνεται το
σωματίδιο

$$= \frac{d(f \circ \vec{r})(t)}{dt} = \nabla f(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t)$$

$$\nabla f(x, y, z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \quad \frac{\partial f}{\partial y} \quad \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

$$= (2x, 2y, 2z)$$

$$\vec{r}'(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{d(f \circ \vec{r})(t)}{dt} =$$

$$= (2 \cos t, 2 \sin t, 2t) \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= -2 \cos t / \sin t + 2 \cancel{\cos t} \sin t + 2t = 2t$$

Äpa $\frac{d(f \circ \vec{r})(t)}{dt} = 2t$

Αντί η πιθανότητα του σημείου

στο $x-y$ επίπεδο είναι

$x^2 + y^2$ όπου η θερμοκρασία
είναι σταθερή

ή να συνοψίζει μόνο η z .

⑤ Ειδική Περίπτωση 2
Καν. Αλυσίδας

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x, y, z)$$

$$g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad g(s, t)$$

$$= (x(s, t), y(s, t), z(s, t))$$

$$h = f \circ g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$h(s, t) = f(x(s, t), y(s, t), z(s, t))$$

$$\frac{\partial h}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial s}$$

Пример:

$$f(x, y) = x^2 + xy - y$$

$$g(u, v, w) = \left(\underbrace{uv}_{x(u, v, w)}, \underbrace{w-v}_{y(u, v, w)} \right)$$

$$h = (f \circ g) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$h = (f \circ g)(u, v, w) = (uv)^2 + (uv)(w-v) - (w-v)$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial h}{\partial u} &= \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} \\
 &= (2x + y) \cdot v + (x-1) \cdot 0 \\
 &= (2uv + w - v) v
 \end{aligned}$$

6) Άσκηση

$$z = \frac{u^2 + v^2}{u^2 - v^2} \quad \text{όπου} \quad u = e^{-x-y} \\
 v = e^{xy}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = ;$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$= \frac{(u^2 - v^2) \cdot 2u - (u^2 + v^2) \cdot 2u}{(u^2 - v^2)^2} \cdot (-e^{-x-y})$$

$$+ \frac{(u^2 - v^2) \cdot 2v + (u^2 + v^2) \cdot 2v}{(u^2 - v^2)^2} \cdot (ye^{xy})$$

αντικαθιστούμε u, v με e^{-x-y} και e^{xy} αντίστοιχα.

⑦ Άσκηση

Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

ορίσω $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$h(x, y) = f(x - y)$$

Να υπολογιστεί το

$$\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial y}$$

$$g(x, y) = x - y$$

$$h(x, y) = f(g(x, y))$$

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{df}{dt} \cdot \frac{\partial g}{\partial x} = f'(x - y) \cdot 1$$

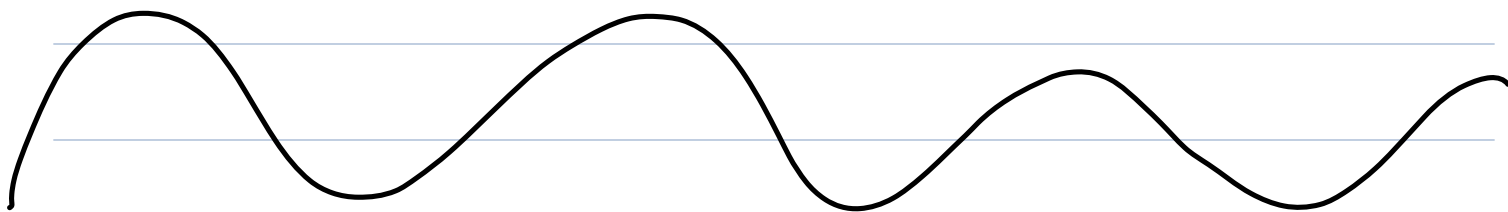
$$\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{df}{dt} \cdot \frac{\partial g}{\partial y} = f'(x - y) \cdot (-1)$$

$$\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial y} = 0$$

$$h(x, y) = f(x - y) = f(t)$$

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial x} \stackrel{=1}{=}$$

$$\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial h}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial y} \stackrel{=1}{=}$$



8 Κανονικοποίηση
Παράγωγος

$$f: u \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\text{Έστω } \vec{v} \in \mathbb{R}^n \text{ με } \|\vec{v}\| = 1$$

κατευθύν. παράγωγος στο

$\vec{x}_0$ γε κατεύθυνση $\vec{v}$

$$= \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\vec{x}_0) = D_{\vec{v}} f(\vec{x}_0)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(\vec{x}_0 + h\vec{v}) - f(\vec{x}_0)}{h}$$

9 Υπολογισμός κατευθ. παρ.γ.

Έστω $f: u \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ γε $\|\vec{v}\| = 1$

και σημείο $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$

$$g(t) = f(\vec{x}_0 + t \vec{v})$$

Τότε $g'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h) - g(0)}{h}$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\vec{x}_0 + h \vec{v}) - f(\vec{x}_0)}{h}$$

$$= D_{\vec{v}} f(\vec{x}_0)$$

Όμως

αυ $\vec{r}(t) = \vec{x}_0 + t \vec{v}$

επίσης $g'(t) = \nabla f(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t)$

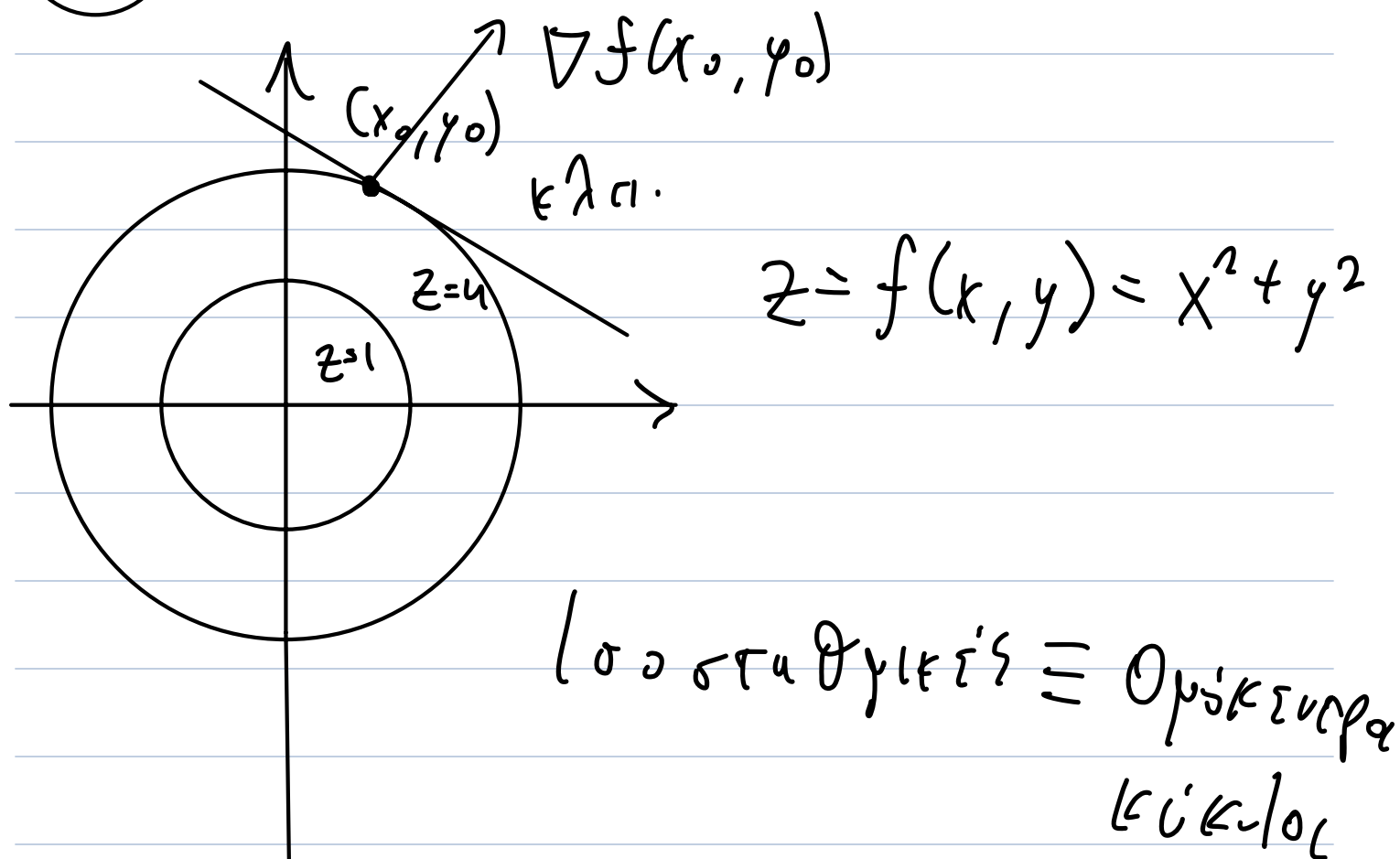
$$\Rightarrow g'(0) = \underbrace{\nabla f(\vec{r}(0))}_{\nabla f(\vec{x}_0)} \cdot \vec{r}'(0)$$

$$\nabla f(\vec{x}_0) \cdot \vec{v}$$

Θεωρ.

$$D_{\vec{v}} f(\vec{x}_0) = \nabla f(\vec{x}_0) \cdot \vec{v}$$

10) Σκοπή της του $\nabla f(\vec{x}_0)$



$$\nabla f(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \right.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

$$= (2x_0, 2y_0)$$

2 Βασικές Ιδιότητες

1) Το $\nabla f(\vec{x}_0)$ είναι η
κατακόρυφη ταχύτητα
απόδοσης της f

2) Το $\nabla f(\vec{x}_0)$ είναι κάθετο
στην ισοσταθμική που περνά
από το $\vec{x}_0$

(κάθετο στο εφαπτ. επίπεδο).

Αποδ. 1]

Ζητάμε κατεύθυνση ταχύτερης
αύξησης της f στο $\vec{x}_0$, δηλ.

Διάνυσμα $\vec{v}$ με $\|\vec{v}\|=1$, που
μεγιστοποιεί την

$$|D_{\vec{v}} f(\vec{x}_0)|$$

Όπως

$$|D_{\vec{v}} f(\vec{x}_0)| = |\nabla f(\vec{x}_0) \cdot \vec{v}|$$

$$= \|\nabla f(\vec{x}_0)\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos \theta$$

$$= \|\nabla f(\vec{x}_0)\| \cdot \cos \theta$$

$$\leq \|\nabla f(\vec{x}_0)\|$$

Η συνθήκη πλάνεται όταν
 $\vec{v} = \lambda \nabla f(\vec{x}_0), \lambda > 0$

Άρα η κατεύθυνση ταχύτερης
ανόδου είναι η

$$\vec{v} = \nabla f(\vec{x}_0)$$

Απόδειξη - 2]

Έστω $\vec{v}(t)$ μια καμπύλη
πάνω στην (50) σταθερή μας

$$\vec{v}(0) = \vec{x}_0$$

Τότε $f(\vec{v}(t)) = c$ σταθ.

$$\frac{d}{dt} (f(\vec{v}(t))) = 0$$

$$= \nabla f(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t)$$

$$\text{At } t=0$$

↑ τότε

$$\nabla f(\vec{x}_0) \cdot \vec{r}'(0) = 0$$



σηματικό για διάνυσμα
της εφαπτόμενης

Άρα $\nabla f(\vec{x}_0) \perp$ στο σημείο της
διάνυσμα της κοσινωθικής.

Ασκήσεις

2.5.8, 2.5.10, 2.5.11,
2.5.17, 2.5.36

Παραγωγή τισπλεξ. συναρτ.

Μερικές παραγωγές ανώτερης

τάξης

① Παραγωγός σταθ. συνάρτησης

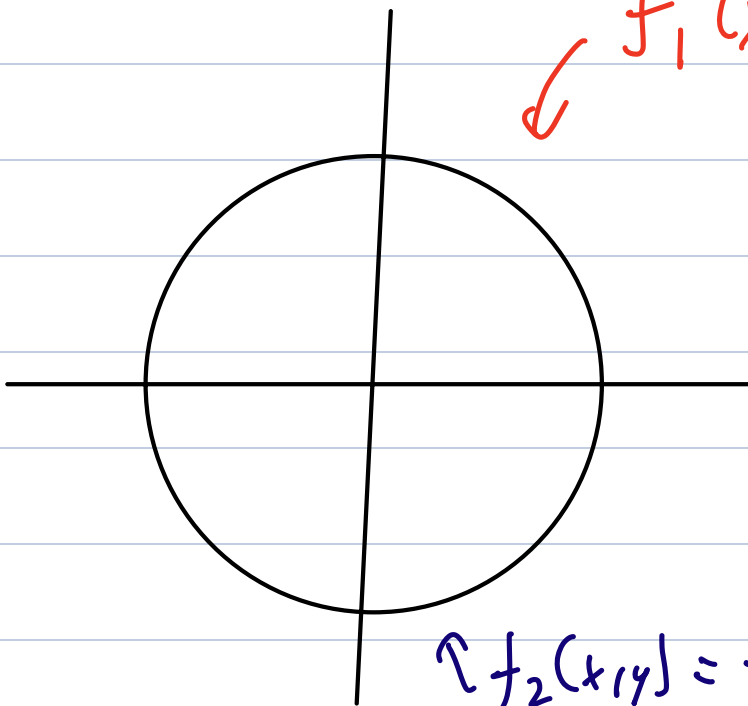
Συχνά αντί για τύπο μιας $f(x, y)$ που δίνουν για εξίσωση που κεντράζονται

$$H(x, y, f(x, y)) = 0$$

↑
γνωστή

$$f_1(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

π.κ.



$$f_2(x, y) = -\sqrt{x^2 + y^2}$$

$$f(x, y)$$

$$x^2 + y^2 - f(x, y)^2 = 0$$

$$= H(x, y, f(x, y))$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = ;$$

ως πρόπτος (απόστος - όταν έχω τύπο)

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial f} \left(\sqrt{x^2 + y^2} \right) = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot 2x \\ &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{aligned}$$

2ος πρόπτος (εγγύστος - όταν έχω εξίσωση)

$$H(x, y, f(x, y)) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} H(x, y, f(x, y)) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial H}{\partial x} \cdot \underbrace{\frac{\partial x}{\partial x}}_1 + \frac{\partial H}{\partial y} \cdot \underbrace{\frac{\partial y}{\partial x}}_0 + \frac{\partial H}{\partial f} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-\frac{\partial H}{\partial x}}{\frac{\partial H}{\partial f}} = \frac{-2x}{-2f} = \frac{x}{f(x, y)} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Γενική μέθοδος

Μερική διαμεγύωση της εξίσ.
σε κανόνα οκταίδας

② Παράδειγμα

Έστω η συνάρτηση $f(x, y)$ που δίνεται
σε μετ. μ. γ. :

$$\sin(f(x,y)) - f(x,y) + x^2 \tan y = 0$$

$$N_a \quad \beta_1 \approx \theta \varepsilon_i \quad \gamma \quad \frac{\partial f}{\partial x}$$

$$\begin{aligned} \text{Λίστη:} \quad & \text{Έστω } H(x,y, f(x,y)) \\ & = \sin(f(x,y)) - f(x,y) + x^2 \tan y = 0 \end{aligned}$$

$$\cos(f(x,y)) \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x} + 2x \tan y = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} (1 - \cos f) = 2x \tan y$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x \tan y}{1 - \cos f}}$$

③ Ασκηση 2.5.19 του Marsden-Tromba

α) $\gamma(x)$ ορίζεται μέσω $G(x, \gamma(x)) = 0$

$$\text{N.S. o.} \quad \frac{\partial \gamma}{\partial x} = - \frac{\frac{\partial G}{\partial x}}{\frac{\partial G}{\partial y}}$$

β) $y_1(x), y_2(x)$ ορίζονται μέσω

$$G_1(x, y_1(x), y_2(x)) = 0$$

$$G_2(x, y_1(x), y_2(x)) = 0$$

$$\frac{dy_1}{dx}, \frac{dy_2}{dx} = ;$$

γ) Αν $y(x)$ ορίζεται μέσω της

$$x^2 + y^3 + e^y = 0$$

να βρείτε την $\frac{dy}{dx}$

Λύση

$$\frac{dG}{dx} = \frac{\partial G}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dx} + \frac{\partial G}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-\frac{\partial G}{\partial x}}{\frac{\partial G}{\partial y}}$$

$$\beta) G_1(x, y_1(x), y_2(x)) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial G_1(x, y_1(x), y_2(x))}{\partial x} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial G_1}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial G_1}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial y_1}{\partial x} + \frac{\partial G_1}{\partial y_2} \cdot \frac{\partial y_2}{\partial x} = 0$$

$$\Rightarrow G_{1,x} + G_{1,y_1} \cdot \frac{dy_1}{dx} + G_{1,y_2} \cdot \frac{dy_2}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow G_{1,y_1} \frac{dy_1}{dx} + G_{1,y_2} \frac{dy_2}{dx} = -G_{1,x}$$

$$G_{2,y_1} \frac{dy_1}{dx} + G_{2,y_2} \cdot \frac{dy_2}{dx} = -G_{2,x}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} G_{1,y_1} & G_{1,y_2} \\ G_{2,y_1} & G_{2,y_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dy_1/dx \\ dy_2/dx \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -G_{1,x} \\ -G_{2,x} \end{bmatrix}$$

Λίστη 2x2 συστήματος

$$\Rightarrow \frac{dy_1}{dx} / \frac{dy_2}{dx}$$

$$g) \quad x^2 + y^3 + e^y = 0$$

$$\frac{d}{dx} \Rightarrow 2x + 3y^2 \frac{dy}{dx} + e^y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} (3y^2 + e^y) = -2x$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{3y^2 + e^y}$$

4) Reples anaywyl m-oins talas

$$f: u \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\frac{\partial^m f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_m}} = \frac{\partial f}{\partial x_{i_1}} \left(\frac{\partial f}{\partial x_{i_2}} \left(\cdots \frac{\partial f}{\partial x_{i_m}} \right) \right)$$

⑤ Partial Derivatives

$$f(x, y) = e^x \cos y$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^x \cos y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -e^x \sin y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = e^x \cos y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y \partial x} = -e^x \sin y$$

$$\frac{\partial f}{\partial x \partial y} = -e^x \sin y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y^2} = -e^x \cos y$$

⑥ Ορισμός

$$f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f \in \underbrace{C^p(U)}$$

p φορές συνεχώς παραγωγίσιμη

$\Leftrightarrow$ υπάρχουν οι παράγωγοι p -τάξης
και είναι συνεχείς στο U .

Αστυχ.

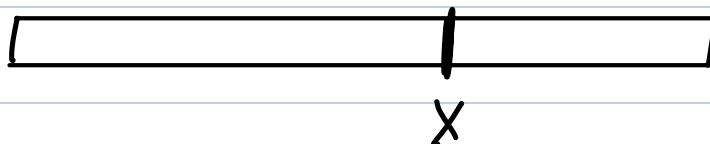
$$f \in C^1 \Rightarrow f \text{ διαφοροποιήσιμη}$$

$$f \in C^2 \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

⑦ Παράδειγμα

Η εξίσωση της θερμότητας

Ράβδος



$t = t_0$

$T(t, x)$: Θερμοκρασία στο σημείο x
της ράβδου την χρονική
στιγμή t .

Από βασικές αρχές έχω ότι η
 T ικανοποιεί:

$$k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial t}$$

Na diei Zertifikat ist

$$T(x, t) = t^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$$

zur Lösung gilt $k=1$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} &= -\frac{1}{2} t^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \\ &\quad + \frac{x^2}{4t^2} t^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial x} &= t^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \cdot \left(-\frac{2x}{4t} \right) \\ &= -\frac{1}{2} x t^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} &= -\frac{1}{2t} t^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \\ &\quad + \frac{1}{4} \frac{x^2}{t^2} t^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \\ &= \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{1}{2t} t^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \\ &\quad + \frac{x^2}{4t^2} t^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{4t}}\end{aligned}$$

Άρα

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial t}$$

8 Αρριολείς Συναρτήσεις

Το αρόβηγμα του Laplace

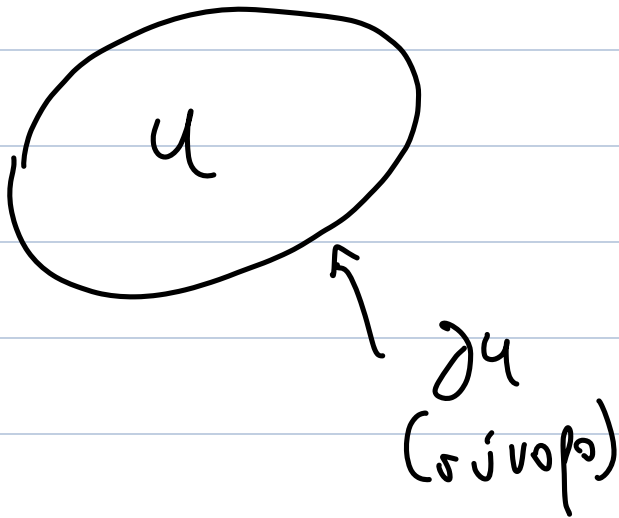
$f(x, y)$

Τελεστής Laplace

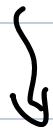
$$\Delta f(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

$$f \text{ αρροικτική} \Leftrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

Προβ. Laplace



$$g: \partial U \rightarrow \mathbb{R} \text{ γνωστή}$$



$$f: U \rightarrow \mathbb{R} \text{ τε}$$

$$f(x, y) = g(x, y) \quad \forall (x, y) \in \partial U$$

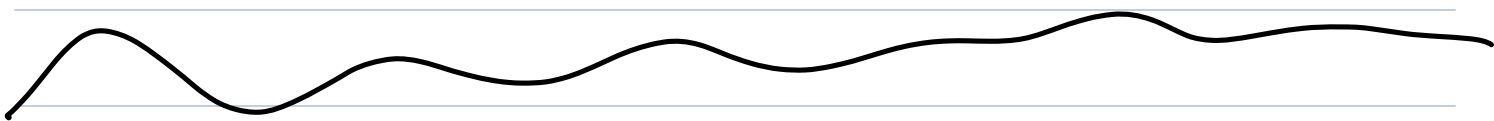
και f αρροικτική

9) Παράδειγματα Αρμονικών

Συναρτήσεων

$$f(x, y) = e^x \cos y$$

$$f(x, y) = x^2 - y^2$$



10) Ο Τετραγωνικός Laplace

σε πολικές συντεταγμένες

$u(x, y) \rightarrow$ Καρτεσιανός Συντετ.

Καρτεσ. $\rightarrow$ Πολικές

$(x, y) \rightarrow (r, \theta)$

$$x = r \cos \theta \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$y = r \sin \theta \quad \tan \theta = \frac{y}{x}$$

$$\Delta u(x, y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\Delta u(r, \theta) :$$

$$\text{Προ σωστά : } u(x, y) = \tilde{u}(r(x, y), \theta(x, y))$$

Θέλουµε Τελεστές Laplace σε πολικές

Λύση:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial y}$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{r \cos \theta}{r} = \cos \theta$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{r \sin \theta}{r} = \sin \theta$$

$$\sec^2 \theta \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{1}{x^2} = -\frac{r \sin \theta}{r^2 \cos^2 \theta}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{r \sin \theta}{r^2} = -\frac{\sin \theta}{r}$$

$$\sec^2 \theta \cdot \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{x} = \frac{1}{r \cos \theta}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\cos \theta}{r}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \cos \theta \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \sin \theta \cdot \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r} \cos \theta \frac{\partial u}{\partial \theta}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\cos \theta \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial r} \left(\cos \theta \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \cdot \frac{\partial r}{\partial x} \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\cos \theta \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= \left(\cos \theta \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \sin \theta \frac{1}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right. \\ &\quad \left. - \sin \theta \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} \right) \cos \theta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&+ \left(-\sin \theta \frac{\partial u}{\partial r} + \cos \theta \frac{\partial u}{\partial \theta \partial r} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{r} \cos \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \sin \theta \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right) \left(-\frac{\sin \theta}{r} \right)\end{aligned}$$

Task 1 (Kd):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$$

Θεώρημα Taylor

Ακρότατα Συναρτήσεων

Πολλών Μεταβλητών

① Θεωρ. Taylor στη 1 μεταβλητή

$$f: a \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad C^k$$

$$\Rightarrow f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 + \dots + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}h^k + R_k(x_0, h)$$

όπου

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{R_k(x_0, h)}{h^k} = 0$$

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \int_{x_0}^{x_0 + h} f'(u) du$$

② Θεώρημα Taylor στις n-μεταβλητικές

και αξίες

$$f: U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad C^1$$

$$\Rightarrow f(\vec{x}_0 + \vec{h}) = f(\vec{x}_0) + \nabla f(\vec{x}_0) \cdot \vec{h}$$

$$+ R_1(\vec{x}_0, \vec{h})$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{R_1(\vec{x}_0, \vec{h})}{\|\vec{h}\|} = 0$$

και αξίες

$$f: U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad C^2$$

τ ο' τ ε

$$\Rightarrow f(\vec{x}_0 + \vec{h}) = f(\vec{x}_0) + \vec{\nabla} f(\vec{x}_0) \cdot \vec{h} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f(\vec{x}_0)}{\partial x_i \partial x_j} h_i h_j + R_2(\vec{x}_0, \vec{h})$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{R_2(\vec{x}_0, \vec{h})}{\|\vec{h}\|^2} = 0$$

③ Πίνακας Hesse (εστωμένη συνάρτηση)

$$f: U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad C^2$$

$$H f(\vec{x}_0)(\vec{h}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f(\vec{x}_0)}{\partial x_i \partial x_j} h_i h_j$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} h_1 & h_2 & \dots & h_n \end{pmatrix}_{\vec{h}^T} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} \end{pmatrix} (\vec{x}_0) \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$$

④ Δία απόδειξης

$$f: U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \quad C^1, C^2$$

$$g(t) \stackrel{\text{ορίζω}}{=} f(\vec{x}_0 + t\vec{h})$$

και εφαρμόζω θ. Taylor για 1 μεταβλητή.

$$g'(t) = \nabla f(\vec{x}_0 + t\vec{h}) \cdot \vec{h}$$

Επομένως

$$g'(0) = \nabla f(\vec{x}_0) \cdot \vec{h}$$

$$f(\vec{x}_0 + \vec{h}) = g(1)$$

$$= \underbrace{g(0)}_{f(\vec{x}_0)} + \underbrace{g'(0) \cdot 1}_{\nabla f(\vec{x}_0) \cdot \vec{h}} + R_1$$

⑤ Taylor's series

$$f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + \nabla f(\vec{x}_0) \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0) + R_1(\vec{x}_0, \vec{x} - \vec{x}_0)$$

$$f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + \nabla f(\vec{x}_0) (\vec{x} - \vec{x}_0)$$

$$+ H f(\vec{x}_0) (\vec{x} - \vec{x}_0) + R_2(\vec{x}_0, \vec{x} - \vec{x}_0)$$

⑥ Symbolic composition $o(h)$

Let $g(h) = o(h)$

• proof $\Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h)}{h} = 0$

$$o(\|\vec{x} - \vec{x}_0\|)$$

$$R_1(\vec{x}_0, \vec{x} - \vec{x}_0)$$

$$o(\|\vec{x} - \vec{x}_0\|^2)$$

$$R_2(\vec{x}_0, \vec{x} - \vec{x}_0)$$

7) Απαρίθληση

Αποσείγγιση Taylor 1^{ης}, 2^{ης} τάξης

$$\text{εν) } f(x, y) = (x^2 - y^2) e^{-\frac{x^2 + y^2}{2}}$$

στο σημείο $(0, 0)$, $(\sqrt{2}, 0)$

Λύση

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x e^{-\frac{x^2 + y^2}{2}} - (x^2 - y^2) x e^{-\frac{x^2 + y^2}{2}}$$

$$= (2 - x^2 + y^2) x e^{-\frac{x^2 + y^2}{2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2y e^{-\frac{x^2 + y^2}{2}} - (x^2 - y^2) y e^{-\frac{x^2 + y^2}{2}}$$

$$= (-2 - x^2 + y^2) y e^{-\frac{x^2 + y^2}{2}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = (2 - 3x^2 + y^2) e^{-\frac{x^2 + y^2}{2}}$$

$$- (-2 - x^2 + y^2) x^2 e^{-\frac{x^2 + y^2}{2}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2xy e^{-\frac{x^2 + y^2}{2}} - (2 - x^2 + y^2) y e^{-\frac{x^2 + y^2}{2}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = (-2 - x^2 + 3y^2) e^{-\frac{x^2 + y^2}{2}}$$

$$- (-2 - x^2 + y^2) y^2 e^{-\frac{x^2 + y^2}{2}}$$

$$\Sigma_{90} (0,0)$$

$$f(x, y) = f(0, 0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)(x-0)$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)(y-0)$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0)(x-0)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x-0)(y-0)$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0)(y-0)^2 + o(\|(x, y)\|^2)$$

Ανάπτυξη 2^{ης} τάξης στο $(0,0)$

$$f(x,y) = 0 + \underbrace{0 + 0}_{\text{1ης τάξης}}$$

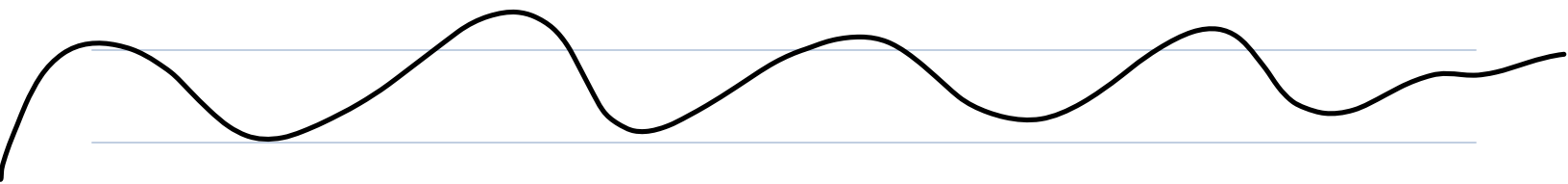
$$+ x^2 - y^2 + o((x^2 + y^2))$$

Ανάπτυξη 1^{ης} τάξης στο $(0,0)$

$$f(x,y) = 0 + o(\sqrt{x^2 + y^2})$$

Ανάπτυξη 2^{ης} τάξης στο $(\sqrt{2}, 0)$

$$f(x,y) = \frac{2}{e} - \frac{4}{e}(x - \sqrt{2})^2 - \frac{4}{e}y^2 + o((x^2 + y^2))$$



8 Ορισμός

$$f: U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad C^2$$

- $\vec{x}_0$ τοπικός ελάχιστος της f

$$\Leftrightarrow \exists r > 0 \text{ τ.ω. } f(\vec{x}_0) \leq f(\vec{x}) \\ \forall \vec{x}: \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < r$$

- $\| \text{-----} \|$ τοπικός μέγιστος

$$\Leftrightarrow \| \text{-----} \| \quad f(\vec{x}_0) \geq f(\vec{x}) \\ \| \text{-----} \|$$

- $\vec{x}_0$ τοπ. ακρότατο της $f \Leftrightarrow \vec{x}_0$ τοπ. μέγ. της f
ή τοπ. ελάχισ. της f .

- $\vec{x}_0$ κρίσιμο της f

$$\nabla f(x_0) = \vec{0}$$

$\Leftrightarrow$ ή x_0 σημείο μη-εξουλοποίησης της df

(saddle)

- x_0 σταθματικό σημείο $\Leftrightarrow x_0$ κρίσιμο

αλλά όχι τοπ. ακρότατο.

- x_0 ολικό γινόμενο (μέγιστο)
 $\Leftrightarrow \forall \vec{x} \in U : f(x_0) \underset{(\geq)}{\leq} f(\vec{x})$

9 Κρίσιμο τοπ. ακρότατο στη 1 περίπτωση.
 $f: u \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad C^2$

Αναγκαίες συνθήκες ακρότατων

Αν x_0 τοπ. ακρότατο

$$\Rightarrow f'(x_0) = 0$$

Αν x_0 εστ. ελάχιστο

$$\Rightarrow f''(x_0) \geq 0$$

Αν x_0 τοπ. μέγιστο

$$\Rightarrow f''(x_0) \leq 0$$

Κανείς συνθήκες ακροτάτων

$$f'(x_0) = 0, f''(x_0) > 0 \Rightarrow x_0 \text{ τοπ. ελάχιστο}$$

$$f'(x_0) = 0, f''(x_0) < 0 \Rightarrow x_0 \text{ τοπ. μέγ.}$$

10 Κριτήρια τοπικών ακροτάτων
ή μεταβλητές

$$f: \mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \subset \mathbb{C}^2$$

↑
ανοικτό

αναγκαίως συνθήκες των ατρώτων

$$\vec{x}_0 \text{ τοπ. ατρώτ.} \Rightarrow \nabla f(\vec{x}_0) = \vec{0}$$

$$\vec{x}_0 \text{ τοπ. ελάχ.} \Rightarrow Hf(\vec{x}_0)(\vec{h}) \text{ είναι} \\ \text{θετική ημιορισμένη}$$

$$(\forall \vec{h} : Hf(\vec{x}_0)(\vec{h}) \geq 0)$$

$$\vec{x}_0 \text{ τοπ. μέγ.} \Rightarrow Hf(\vec{x}_0)(\vec{h}) \text{ είναι} \\ \text{αρνητική ημιορισμένη}$$

$$(\forall \vec{h} : Hf(\vec{x}_0)(\vec{h}) \leq 0)$$

1 κανείς

$$\text{Av } \nabla f(\vec{x}_0) = \vec{0}, \quad Hf(\vec{x}_0)(\vec{h})$$

$$\text{θετ. ορισμ. } (\forall \vec{h} \neq \vec{0} : Hf(\vec{x}_0)(\vec{h}) \geq 0)$$

$$\Rightarrow \vec{x}_0 \text{ τοπ. ελάχ.}$$

$$\text{Αν } \vec{\nabla} f(\vec{x}_0) = \vec{0}, \quad Hf(\vec{x}_0)(\vec{h})$$

$$\text{αφρ. οφρ. μ. } (\forall \vec{h} \neq \vec{0} : Hf(\vec{x}_0)(\vec{h}) \leq 0)$$

$$\Rightarrow \vec{x}_0 \text{ τοπ. μέγ.}$$

II Θ. Fermat στις υ-μειαβλητές

(Αναγκαία συνθήκη τοπ. αφρ. μ.)

$$f: U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad C^2$$

↑
ανοικτό

$$\text{Αν } \vec{x}_0 \text{ τοπ. αφρ. μ. } \Rightarrow \vec{\nabla} f(\vec{x}_0) = \vec{0}$$

Απόδ.

Θεωρώ την f στην ευθεία $\underbrace{\vec{x}_0 + t\vec{h}}_{\ell(t)}, t \in \mathbb{R}$

$$g(t) \stackrel{\text{composition}}{=} f(l(t))$$

$\vec{x}_0$ τογ. ακρότατο της $f \Rightarrow 0$ τογ. ακρότ. της $g(t)$

$$\Rightarrow g'(0) = 0$$

$$\text{Θα ως } g'(t) = \vec{\nabla} f(l(t)) \cdot l'(t)$$

$$g'(0) = \vec{\nabla} f(\vec{x}_0) \cdot l'(t)$$

$$l'(t) = \vec{h}$$

$$\Rightarrow g'(0) = \vec{\nabla} f(\vec{x}_0) \cdot \vec{h}$$

το εσωτερικό γινόμενο είναι 0 για κάθε $\vec{h}$ οπότε αναγκαστικά $\vec{\nabla} f(\vec{x}_0) = 0$ (όχι αντίστροφα)

$$\Gamma_{\alpha} \quad \vec{h} = \vec{\nabla} f(x_0^*) \quad \dot{x}_\alpha$$

$$\vec{\nabla} f(x_0^*) \cdot \vec{\nabla} f(x_0^*) = 0$$

$$\Rightarrow \|\vec{\nabla} f(x_0^*)\|^2 = 0$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} f(x_0^*) = \vec{0}$$

12) Κριτήρια για την $Hf(x_0^*)$

να είναι θετικά/αρνητικά ορισμένα/
η/αφασμένον

για $n=2$ μεταβλητές

$$f: U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad C^2$$

$$Hf(x_0^*)(h_1, h_2) = (h_1, h_2) \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

1012

i) $a > 0$ $\text{and } ac - b^2 > 0 \Rightarrow$

$$Hf(\vec{x}_0)(h_1, h_2) > 0$$

$$\forall (h_1, h_2) \neq (0, 0)$$

ii) $a < 0$ $\text{and } ac - b^2 > 0 \Rightarrow$

$$Hf(\vec{x}_0)(h_1, h_2) < 0$$

$$\forall (h_1, h_2) \neq (0, 0)$$

iii) $ac - b^2 < 0 \Rightarrow Hf(\vec{x}_0)(h_1, h_2)$
 $\text{is not always } > 0$

Agod.

$$Hf(\vec{x}_0)(h_1, h_2) = \frac{1}{2} (h_1, h_2) \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} (a h_1^2 + 2 b h_1 h_2 + c h_2^2)$$

$$= \frac{a}{2} \left[\left(h_1 + \frac{b}{a} h_2 \right)^2 + \frac{a c - b^2}{a^2} h_2^2 \right]$$

κλπ.

13) Παράδειγμα

Τοπικά ακρότατα & σαφηνιστική σημείωση

της $f(x, y) = x^2 - y^2$

Λύση:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$$

$$\frac{\partial f}{\partial x^2} = 2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \Rightarrow (x, y) = (0, 0)$$

$$Hf(x, y)(h_1, h_2) = \frac{1}{2} (h_1, h_2) \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$$

$$a = 2 > 0 \quad \text{and} \quad b = -2 < 0$$

Άρα $Hf(x, y)(h_1, h_2)$ μη-ορισμένος

Άρα $(0, 0)$ σταθματικός σημείο

Πράγματι: $f(0, 0) = 0$

$$\begin{aligned} \text{Όμως } f(x, 0) &= x^2 > 0, \quad x \neq 0 \\ f(0, y) &= -y^2 < 0, \quad y \neq 0 \end{aligned}$$

Ακρότατα Συναρτήσεων

Πολλών μεταβλητών

① Συνθήκες τοπ. ακρότητας

$$f: U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad C^2$$

↑
ανοικτό

1] Αν f έχει τοπικό ακρότατο στο x_0
τότε πρέπει αναγκαστικά να ισχύει

$$\vec{\nabla} f(\vec{x}_0) = \vec{0}$$

2] x_0 : $\vec{\nabla} f(x_0) = \vec{0}$, $H f(x_0)(h)$ θετ.
ορισμ.

$\Rightarrow x_0$ τοπ. σταθ. (μεγ.) (αρ. ορισ.)

όπου $\vec{\nabla} f(\vec{x}_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}_0), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\vec{x}_0), \frac{\partial f}{\partial x_3}(\vec{x}_0), \dots \right)$

$$H f(\vec{x}_0)(\vec{h}) = \frac{1}{2}(h_1, h_2, \dots, h_n) \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(\vec{x}_0) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\vec{x}_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\vec{x}_0) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n}(\vec{x}_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$$

3) $\vec{x}_0$: $\vec{\nabla} f(\vec{x}_0) = \vec{0}$, $H f(\vec{x}_0)$ η-ορισμένη
 $\Rightarrow$ το $\vec{x}_0$ είναι σταθματικό σημείο

② Κριτήρια για την $H f(\vec{x}_0)$

Για $n=2$: $f(x, y)$

$$B = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

$$A_v \quad a > 0, \quad ac - b^2 > 0$$

$\Rightarrow Hf$ θρε. ορω.

$$A_v \quad a < 0 \quad ac - b^2 > 0$$

$\Rightarrow Hf$ υπερητ. ορω.

$$A_v \quad \text{οίμως} \quad ac - b^2 < 0$$

$\Rightarrow Hf$ μη-οριζήση

Για γενικό η :

$$B = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} \end{pmatrix}$$

$$B_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}$$

$$B_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2} \end{vmatrix}$$

$\Downarrow$ Αν $B_1, B_2, \dots, B_n$ όλοι θετικοί

$\Rightarrow$ Hf θετική ορισμένη.

$\Downarrow$ $B_1 < 0, B_2 > 0, B_3 < 0, B_4 > 0, \dots$

... $B_n < 0$ αν η επόμενη
 $B_n > 0$ αν η άρτιος $\Rightarrow Hf$ αρ.
ορι.

3) $B_n \neq 0$ & ούτε $\uparrow$ ούτε $\downarrow$

$\Rightarrow Hf$ μη-ορισμένη

③ Παράδ.

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y^2$$

λογ. $\forall x, \forall y$, το $\nabla f(x, y) = 0$ αμφι. σημείο.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 2y \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -2x + 4y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial xy} = -2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4$$

$$\vec{\nabla} f(x, y) = 0$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 2x - 2y &= 0 \\ -2x + 4y &= 0 \end{aligned}$$

$$2y = 0 \Rightarrow y = 0$$

$$2x = 0 \Rightarrow x = 0$$

krivuljo opreži 0 $\vec{x}_0 = (0, 0)$

$$B = \begin{pmatrix} 2^{=a} & -2^{=b} \\ -2^{=b} & 4^{=c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

$$a \cdot z > 0$$

$$a \cdot (-b^2) = 8 - 4 = 4 > 0$$

$\Rightarrow Hf(0,0)$ Θετ. ορισμένη.

$(0,0)$ είναι τοπ. ελάχ.

Δεν υπάρχουν βίτ., γέγ. ούτε σαφ. ηγεία.

4) Παράδειγμα

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x,y) = x^2 y + y^2 x$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + y^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 2xy$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2x + 2y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x$$

$$\vec{\nabla} f(x, y) = \vec{0}$$

$$\Rightarrow 2xy + y^2 = 0$$

$$x^2 + 2xy = 0$$

$$(2x + y)y = 0$$

$$(2x + x)x = 0$$

$$x = 0, y = 0 \text{ (Ευνοητική)}$$

$$A_v \quad 2x + y = 0$$

$$2x + x = 3x = 0$$

$$\text{ότι μάλλον } (x, y) = (0, 0)$$

$$\text{Άρα } \vec{x}_0 = (0, 0)$$

$$B = \begin{pmatrix} 2y & 2x+2y \\ 2x+2y & 2x \end{pmatrix} \Big|_{(x,y)=(0,0)}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Συνεπώς βγαίνει συμπέρασμα πς το κριτήριο.

Παίρνουμε τον απροσγρευτό της f στην ευθεία $y=x$ του στοχασμού

$$f(x, x) = 2x^3$$

$$\begin{array}{ll} \text{Αν } x > 0 & f(x, x) > 0 \\ x < 0 & f(x, x) < 0 \end{array}$$

Άρα $\exists$ σημεία οπούδήποτε κοντά στο

$(0,0) > 0, < 0 \rightsquigarrow (0,0)$ saddle point.
 συμπίπτει.

5

Για την $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad C^2$

$$f(x, y) = (x^2 - y^2) e^{-\frac{x^2 + y^2}{2}}$$

Κριτήριο	$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$	$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$	$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$	$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)^2$	
$(1, 0)$	2	-2	0	-4	σaddle
$(0, \sqrt{2})$	$\frac{4}{e}$	$\frac{4}{e}$	0	$\frac{16}{e^2}$	τοπ. ελκ.
$(0, -\sqrt{2})$	$\frac{4}{e}$	$\frac{4}{e}$	0	$\frac{16}{e^2}$	τοπ. ελκ.
$(\sqrt{2}, 0)$	$-\frac{4}{e}$	$-\frac{4}{e}$	0	$\frac{16}{e^2}$	τοπ. πρ.
$(-\sqrt{2}, 0)$	$-\frac{4}{e}$	$-\frac{4}{e}$	0	$\frac{16}{e^2}$	τοπ. πρ.

6 Κριτήριο ύπαρξης ολικών μεγίστων - ελάχιστων

- Θεώρημα Weierstrass

$$f: D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

συνεχής

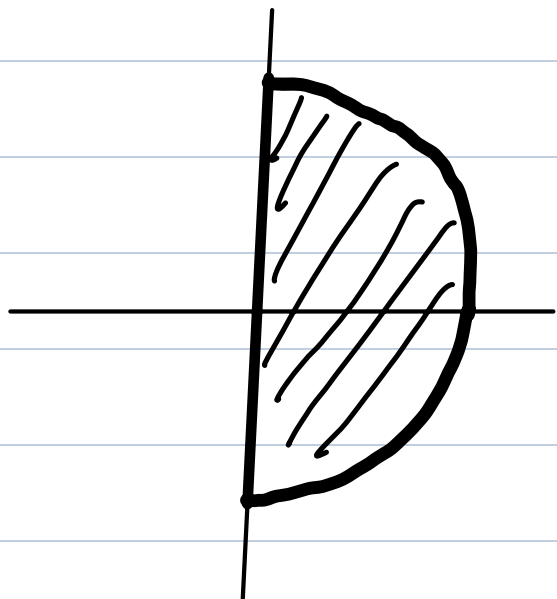


συμπαγής

(κλειστό, αβχμίνο)

$\Rightarrow f$ έχει μεγ. & ελάχ. τιμή στο D .

π.χ. $D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, \right.$
 $\left. x \geq 0 \right\}$



Αν ορίζουμε
$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1, x \geq 0 \right\}$$



Πόρτορα

$$f: D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \text{ συνεχής}$$

↑
κλειστό

$$\text{Av } \lim_{\|\vec{x}\| \rightarrow \infty} f(\vec{x}) = \infty \Rightarrow \text{ολικό ελάχιστο}$$

$$\text{Av } \lim_{\|\vec{x}\| \rightarrow \infty} f(\vec{x}) = -\infty \Rightarrow \text{ολικό μέγιστο}$$



⑦ Εύρεση ολικών Μεγίστων
ή ελαχίστων

$$f: D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

⌋ Weierstrass / Λόρσχα $\leadsto$ Υπαρξη
Μεγ./Ελαχ.

(f συνεχής, D κλειστό,

Ο φραγμένη ή $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} f(x) = \begin{matrix} +\infty \\ -\infty \end{matrix}$)

2) Βρίσκω μεγ. / ελάχ. στο εσωτερικό του D

Λύνω $\vec{\nabla} f(\vec{x}) = \vec{0}$ στο εσωτ. D

$\leadsto$ Υποψήφιοι μεγ. ελάχ.

3) Βρίσκω μεγ. ελάχ. στο ∂D

Παραμετροποιώ το ∂D που είναι κυρτό-η χων $n=2$.

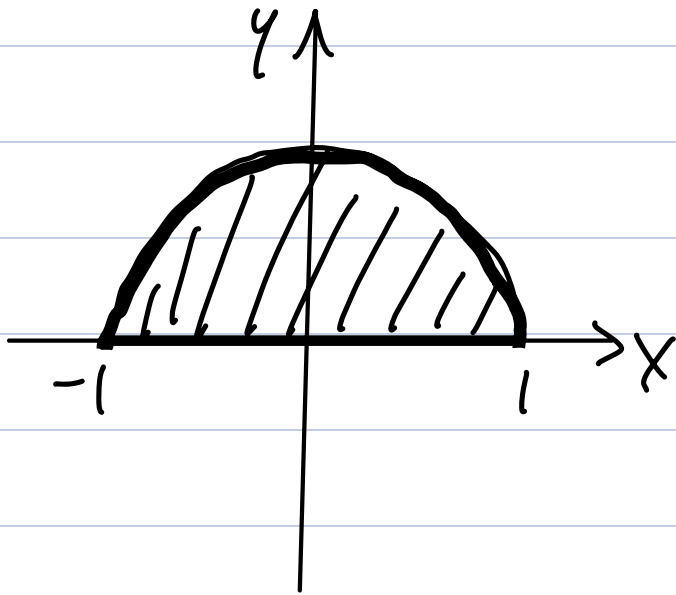
Μεγ. / Ελάχ. $\leadsto$ Υποψήφιοι μεγ. / ελάχ.

4) Υπολογίζω την f σε όλα τα υποψήφια σημεία και βρίσκω τελικό μεγ. / ελάχ.

8 Παράλ.

$$\begin{array}{c} \max \quad \text{ή} \quad \min \quad \text{της} \\ f(x, y) = 16x^2 - 24xy + 40y^2 \end{array}$$

$$\text{στο } D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0 \right\}$$



Λύση

|| f προφανώς συνεχής ως πολυωνυμική

▷ ορίζεται πάνω συνεχών συναρτήσεων

$$x^2 + y^2 \leq 1, \quad y \leq 1 \quad \text{περιγραφή του συνόλου}$$

Άρα το D είναι κλειστό.

Επίσης το ∂ είναι περικοπόμενο από:
 $\forall x, y \in D \quad \|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1$

Άρα από Θ. Weierstrass $\exists$ σταθ. & μεγ. της f στο D .

$$\underset{\text{int}(D)}{\overset{\circ}{D}} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1, y > 0\}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 32x - 24y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -24x + 80y$$

$$\vec{\nabla} f(x, y) = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 32x - 24y = 0 \\ -24x + 10y = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4x - 3y = 0 \\ -3x + 10y = 0 \end{cases} \Rightarrow (x, y) = (0, 0) \notin D^o$$

όχι κρίσιμα στο
σημείο του D .

3] Το σύνολο έχει 2 μορφές

$$\partial D_1 = \{ (x, 0), x \in [-1, 1] \}$$

$$\begin{aligned} \partial D_2 &= \{ (\cos \theta, \sin \theta), \theta \in [0, \pi] \} \\ &= \{ x, x \in [-1, 1], y = \sqrt{1-x^2} \} \end{aligned}$$

$$\Sigma \tau_0 \partial D_1$$

$$f(x, 0) = 16x^2, \quad x \in [-1, 1]$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, 0) = 0 \Rightarrow 32x = 0 \Rightarrow x = 0$$

Υποψήφια εκπτώματα:

$$\begin{array}{ccc} (1, 0), & (0, 0), & (-1, 0) \\ \text{π.ε.γ.} & \text{ε.λαχ.} & \text{π.ε.γ.} \end{array}$$

$$\Sigma \tau_0 \partial D_2$$

$$g(\theta) = f(\cos \theta, \sin \theta) = 16 \cos^2 \theta + 24 \cos \theta \sin \theta + 40 \sin^2 \theta$$

$$\begin{aligned} g'(\theta) &= -32 \cos \theta \sin \theta - 24 \sin^2 \theta + 24 \cos^2 \theta \\ &\quad + 80 \cos \theta \sin \theta \\ &= 24 \cos^2 \theta + 48 \cos \theta \sin \theta - 24 \sin^2 \theta \end{aligned}$$

$$= 24 \cdot \sin 2\theta - 24 \cos 2\theta$$

$$= 0$$

$$\Rightarrow \sin 2\theta = \cos 2\theta$$

$$\Rightarrow \tan 2\theta = 1 \Rightarrow 2\theta = \frac{\pi}{4} \text{ ή } \frac{5\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{8} \text{ ή } \frac{5\pi}{8}$$

Υποστήκη

$$\left(\cos \frac{\pi}{8}, \sin \frac{\pi}{8} \right), \left(\cos \frac{5\pi}{8}, \sin \frac{5\pi}{8} \right)$$

4)	(x, y)	
	$(-1, 0)$	16
	$(0, 0)$	0 ← ελάχιστο
	$(1, 0)$	16

$$\left(\cos \frac{\pi}{8}, \sin \frac{\pi}{8}\right) \approx 11$$

$$\left(\cos \frac{5\pi}{8}, \sin \frac{5\pi}{8}\right) \approx 45 \leftarrow \mu \dot{\gamma} \cot \alpha$$

Ακρότατα υπό συνθήκες

Μέθοδος Πολλαπλασιαστών

Lagrange

① Γενικό Πρόβλημα

$$f: U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

↑
ανοικτός

$$\vec{g}: U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$$

$$\parallel$$
$$(g_1, g_2, \dots, g_k)$$

max ή min $f(\vec{x})$

$$\vec{x} : g_1(\vec{x}) = c_1$$

$$g_2(\vec{x}) = c_2$$

⋮

$$g_k(\vec{x}) = c_n$$

$$\vec{x} \in U$$

② Θεωρ. Ανεξαρτησιότητας Lagrange

f, g | περ. (k=1)

$$\text{Θεωρ. } f: U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$g: U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$D = \{ \vec{x} \in U : g(\vec{x}) = c \}$$

Αν $\vec{x}_0$ τοπ. ακρότ. (πρ. ή εδ.κ.)
της f στο D , και $\vec{\nabla}g(\vec{x}_0) \neq \vec{0}$

τότε $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ (πολλαπλ. Lagrange)

$$\text{ώστε } \vec{\nabla}f(\vec{x}_0) = \lambda \vec{\nabla}g(\vec{x}_0)$$

(συνδυασμα, αν ορίσω

$$h(\underbrace{\vec{x}}_{\mathbb{R}^n}, \underbrace{\lambda}_{\mathbb{R}}) = f(\vec{x}) - \lambda(g(\vec{x}) - c)$$

τότε αν $\vec{x}_0$ τοπ. ακρότ. τότε $\exists \lambda$

$$\text{ε.κ. } \vec{\nabla}h(\vec{x}_0, \lambda) = \vec{0}$$

η Lagrangeανή της f υπό του
πρ. $g=c$

$$\left(\begin{array}{l} \frac{\partial h}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} - \lambda \frac{\partial g}{\partial x_i} = 0, \quad i=1, 2, \dots, n \\ \Rightarrow \nabla f(\vec{x}^*) = \lambda \nabla g(\vec{x}^*) \\ \frac{\partial h}{\partial \lambda} = -(g(\vec{x}^*) - c) = 0 \Rightarrow \end{array} \right.$$

Ακρίβεια (για $n=3$)

$$\text{Από: } g(\vec{x}) = c \quad \forall \vec{x} \in D$$

αν πάρω μια καμπύλη $(\vec{v}(t) : t \in I)$
στη του D με $\vec{x}_0 = \vec{v}(0)$

$$\text{Τότε } g(\vec{v}(t)) = c$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} g(\vec{v}(t)) = 0$$

$$= \vec{D}g(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t)$$

$$\stackrel{t=0}{\Rightarrow} \vec{D}g(\vec{x}_0) \cdot \vec{r}'(0) = 0$$

$$\Rightarrow \vec{D}g(\vec{x}_0) \perp \vec{r}'(0)$$

οπότε $\vec{D}g(\vec{x}_0)$ κάθετη στην σ στην $\vec{r}'(0)$ εφαπτ.

Επίσης $\vec{x}_0$ τοπ. ακρότ. της f στο D .

Παίρνω καμπύλη $(\vec{r}(t): t \in I)$
 στο D με $\vec{r}(0) = \vec{x}_0$, τότε,
 το 0 είναι τοπ. ακρότ. της

$$f(\vec{r}(t))$$

Από το Θεωρ. Fermat

$$\frac{d}{dt} f(\vec{r}(t)) = 0$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} f(\vec{r}(0)) \cdot \vec{r}'(0) = 0$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} f(\vec{x}_0) \perp \vec{r}'(0)$$

Άρα $\vec{\nabla} f(\vec{x}_0)$, $\vec{\nabla} g(\vec{x}_0)$ είναι κάθετα στο ίδιο επίπεδο, άρα είναι συγγαμικά.

③ Θεωρ. Πολλαπλασιαστών
Lagrange για 6 περιπτώσεις

Θεωρ.

$$f, g_1, g_2, \dots, g_n : \underset{\substack{\uparrow \\ \text{αντικείμενο}}}{U \in \mathbb{R}^n} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$D = \left\{ \vec{x} \in U : g_i(\vec{x}) = c_i, i=1,2,\dots,k \right\}$$

Αν $\vec{x}_0$ τοπ. ακρότ. της f στο D και

$\vec{\nabla} g_1, \vec{\nabla} g_2, \dots, \vec{\nabla} g_k$ γραμμικά ανεξάρτητα

Τότε $\exists \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$
ώστε

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} f(\vec{x}_0) &= \lambda_1 \vec{\nabla} g_1(\vec{x}_0) \\ &+ \lambda_2 \vec{\nabla} g_2(\vec{x}_0) \\ &+ \dots + \lambda_k \vec{\nabla} g_k(\vec{x}_0) \end{aligned}$$

Ισοδύναμα, ορίζω

$$h(\vec{x}, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$$

$$= f(\vec{x}) - \lambda_1 (g_1(\vec{x}) - c_1)$$

$$- \dots - \lambda_k (g_k(\vec{x}) - c_k)$$

Αν $\vec{x}_0$ τοπ. ακρ. της f στο D

τότε $\exists \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$

ώστε $\vec{0} = \nabla h(\vec{x}, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$

④ Πρόβλημα εφ'αφ'ης για εύρεση
ακρόων μεγίστων/ελαχίστων για
αποβλήματα με εξ. περ.ορ.

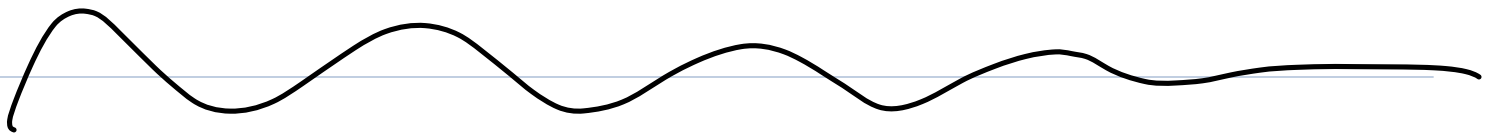
↓ Εξασφάλιση ύπαρξης λύσης
 (με Weierstrass ή το πρόγραμμα)

2) Θρόνος Λαγκρανζιανής
και λύση κρίσιμων σημείων

3) Σύρεση σημείων που η f δεν
είναι διαφορίσιμη ή που τα

$\vec{\nabla} g_1(x^*)$, $\vec{\nabla} g_2(x^*)$ γραμμικά
εξαρτημένα.

4) Υπολογισμός της f σε όλα
τα παραπάνω σημεία και βρούμε
 $\max$ & $\min$



5) Παρέδειγμα

$$\max_{(x,y,z)} f(x,y,z) = x+y+z$$

$$g_1(x,y,z) = x^2 + y^2 - 2 = 0$$

$$g_2(x, y, z) = x + z - 1 = 0$$

Λύση:

$$D = \left\{ (x, y, z) : \underbrace{x^2 + y^2 - 2 = 0}_{\text{συνέχρις}}, \underbrace{x + z - 1 = 0} \right\}$$

D ορίζεται μέσω συνεχών συναρτήσεων και τριπλ. δύσεων $\leq, \geq, =$, άρα κλειστό.

$$\Gamma \alpha \text{ κάθε } (x, y, z) \in D$$

$$x^2 + y^2 = 2 \Rightarrow \begin{aligned} -\sqrt{2} &\leq x \leq \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} &\leq y \leq \sqrt{2} \end{aligned}$$

$$z = 1 - x \Rightarrow 1 - \sqrt{2} \leq z \leq 1 + \sqrt{2}$$

D κλειστό και φραγμένο $\Rightarrow$

→ 0 συμπαγής

f συνεχής στο D

Άρα $\exists \max, \min$ της f στο D .

Λαμβανούμεν

$$h(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = x + y + z - \underbrace{\lambda_1 (x^2 + y^2 - 2)}_{g_1(x, y, z)} - \underbrace{\lambda_2 (x + z - 1)}_{g_2(x, y, z)}$$

$$\frac{\partial h}{\partial x} = 1 - 2\lambda_1 x - \lambda_2 = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial h}{\partial y} = 1 - 2\lambda_1 y = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial h}{\partial z} = 1 - \lambda_2 = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial h}{\partial \lambda_1} = -(x^2 + y^2 - 2) = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial h}{\partial \lambda_2} = -(x + z - 1) = 0 \quad (5)$$

Εχόμενα :

$$(3) \Rightarrow \lambda_2 = 1 \quad (6)$$

$$(2) \Rightarrow \lambda_1, y_1 \neq 0$$

$$\Rightarrow y_1 = \frac{1}{2\lambda_1} \quad (7)$$

$$(1) \Rightarrow 2\lambda_1 \cdot x = 0$$

$$(1), (6), (7) \Rightarrow x = 0 \quad (8)$$

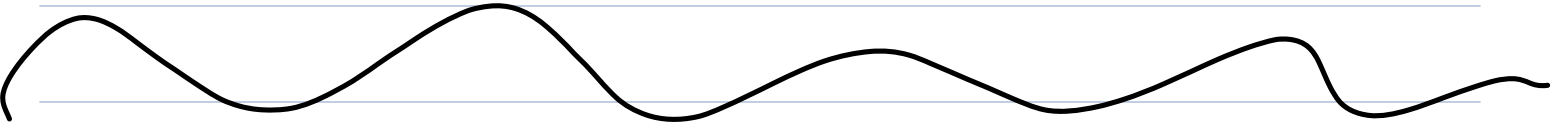
$$(4) \Rightarrow y^2 = 2 \Rightarrow y = \pm \sqrt{2} \quad (9)$$

$$(5) \Rightarrow z = 1$$

Άρα έχουμε 2 επιπλέον σημεία

$$(x, y, z) = (0, \sqrt{2}, 1)$$

$$(0, -\sqrt{2}, 1)$$


$$\vec{\nabla} g_1(\vec{x}) = (2x, 2y, 0)$$

$$\vec{\nabla} g_2(\vec{x}) = (1, 0, 1)$$

$$\lambda_1 (2x, 2y, 0) + \lambda_2 (1, 0, 1) = \vec{0}$$

$$\Rightarrow 2\lambda_1 x + \lambda_2 = 0$$

$$2\lambda_1 y = 0$$

$$\lambda_2 = 0$$

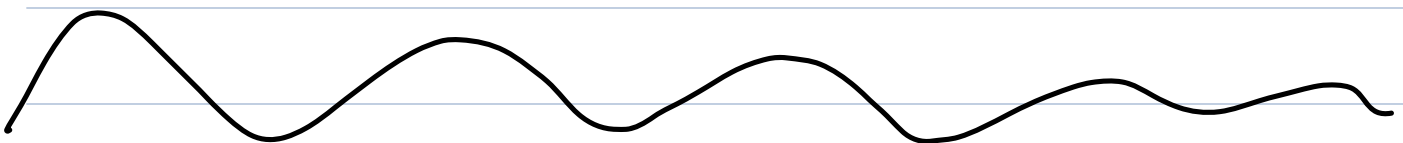
$$\Rightarrow (\lambda_1, \lambda_2) = 0$$

$$\lambda_2 = 0 \quad \text{και} \quad (x, y) = (0, 0)$$

↑
ή - εφέτος

Αρα ^{$\Delta \in \mathbb{N}$} λ_1 έχω επεπλάκον να εξίσχζω
κάθειο σημείο

$$\begin{aligned} \text{Έχω } f(0, \sqrt{2}, 1) &= 1 + \sqrt{2} \rightarrow \text{Max} \\ f(0, -\sqrt{2}, 1) &= 1 - \sqrt{2} \rightarrow \text{Min} \end{aligned}$$



6 Παράδειγμα

$$\max_{(x,y,z)} f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - x + y$$

$$\text{υπό: } x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$$

Λύση

$$D = \{ (x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \}$$

συμπαγής, f συνεχής στο D

$$\Rightarrow \exists \max, \min$$

το D είναι το εσωτ. και οριοτ.

$$D^\circ = \{ (x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 < 1 \}$$

ανοικτή

$$\partial D = \{ (x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1 \}$$

$\Sigma_1 = \vec{0}$ is the normal vector. The f

is given in (x, y, z) c.w.

$$\vec{\nabla} f(x, y, z) = (0, 0, 0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 1 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y + 1 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 2z = 0$$

$$(x, y, z) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0 \right) \in \vec{D}$$

1a) найти экстр. зго ∂D :

$$h(x, y, z, \lambda) = x^2 + y^2 + z^2 - x + y - \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$$

$$\frac{\partial h}{\partial x} = 2x - 1 - 2\lambda x = 0$$

$$\Rightarrow 2(1 - \lambda)x = 1$$

$$\frac{\partial h}{\partial y} = 2y + 1 - 2\lambda y = 0$$

$$\Rightarrow 2(1 - \lambda)y = -1$$

$$\frac{\partial h}{\partial z} = 2z - 2\lambda z = 0$$

$$\Rightarrow 2(1 - \lambda)z = 0$$

$$\frac{\partial h}{\partial \lambda} = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

$$\lambda \neq 1$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2(1-\lambda)}$$

$$y = \frac{-1}{2(1-\lambda)}$$

$$z = 0$$

$$\text{K.O.} \quad \left(\frac{1}{2(1-\lambda)}\right)^2 + \left(\frac{-1}{2(1-\lambda)}\right)^2 + 0^2 = 1$$

$$\Rightarrow \lambda = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\leadsto \left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

$$\nabla f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Εκτός του } (0, 0, 0) \in \partial D$$

Τελικά θα μόνα υποψ. ακρότατα:

$$\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right),$$

$$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) = \frac{1}{2} \text{ max}$$

$$f\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right) = -\frac{1}{2} \text{ min}$$

Διαυυσματικές συνάρτησης

① Διαδρομές

$$\vec{c}: I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$\downarrow$
 t (χρόνος)

$\vec{c}(t)$: θέση συσταδίου t τη στιγμή t

$\vec{v}(t) = \vec{c}'(t) \approx \dot{\vec{c}}(t)$: ταχύτητα ~~||~~

$\vec{a}(t) = \vec{c}''(t) = \ddot{\vec{c}}(t)$: επιτάχυνση ~~||~~

Παράδειγμα

$$\vec{F}(\vec{c}(t)) = m \cdot \ddot{\vec{c}}(t) \quad \text{Νόμος Νεύτωνα}$$

Συνολικές εξισώσεις για την
 $\vec{C}(t)$ κλπ.

② Παράδειγμα

Σωματίδιο

Αρχική θέση $(0, 0, 1)$

Αρχική ταχύτητα

$(1, 1, 0)$

Σταθερή επιτάχυνση
 $(0, 0, -1)$

Πότε και που θα προσχλωθεί στο
xy επίπεδο.

$\vec{c}(t)$: θέση εν στιγμή t

$$\vec{c}(0) = (0, 0, 1)$$

$$\dot{\vec{c}}(0) = (1, 1, 0)$$

$$\ddot{\vec{c}}(t) = (0, 0, -1)$$

$$\vec{c}'(t) = \int_0^t \ddot{\vec{c}}(u) du + \vec{c}'(0)$$

$$= (0, 0, -1)t + (1, 1, 0)$$

$$\vec{c}(t) = \int_0^t \vec{c}'(u) du + \vec{c}(0)$$

$$= (0, 0, -1) \frac{t^2}{2} + (1, 1, 0)t$$

$$+ (0, 0, 1)$$

$$= \left(t, t, 1 - \frac{t^2}{2} \right)$$

Άρα θα προσγειωθεί για $z=0$

$$\Rightarrow 1 - \frac{t_0^2}{2} = 0 \Rightarrow \boxed{t_0 = \sqrt{2}}$$

$$\vec{c}(t_0) = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$$

③ Κανονική σημεία διαδρομής

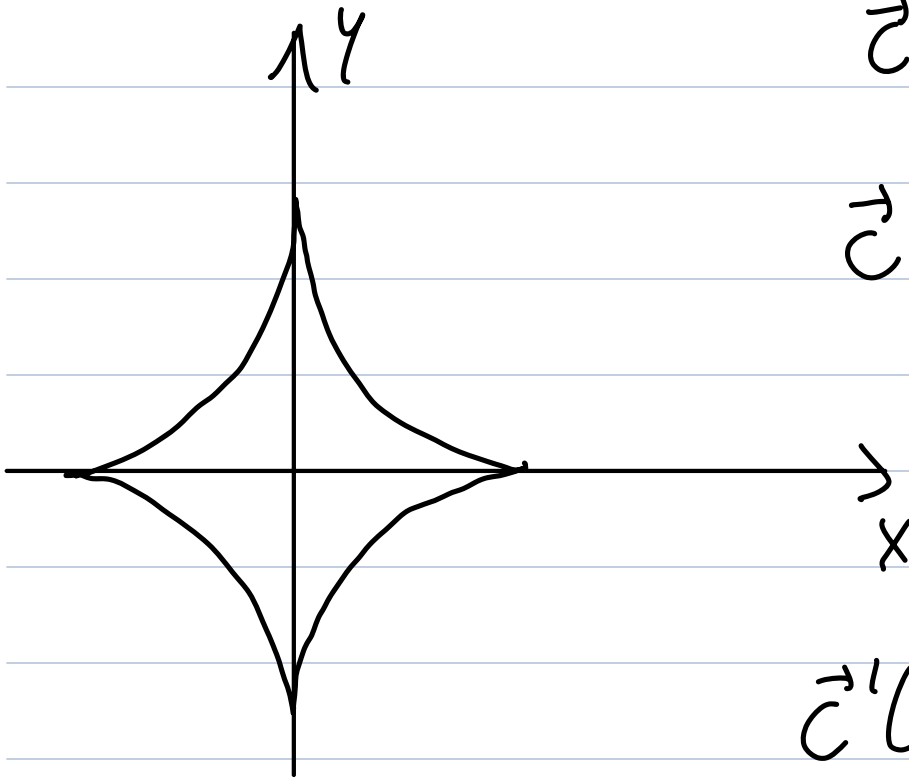
$$\vec{c}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$$

Ένα σημείο t_0 λέγεται κανονικό,
αν $\vec{c}'(t_0) \neq \vec{0}$

Κανονική διαδρομή $\Leftrightarrow$ όλα τα
σημεία κανονικά.

Μη-κανονικό σημείο $\Rightarrow$ Ακμή

④ Παράδειγμα



$$\vec{c}: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\vec{c}(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$$

$$\vec{c}'(t) = ;$$

Υποκυκλοειδής με
4 αχρές

Μη-κανονική
σημεία της $\vec{c}$;

$$\vec{c}'(t) = (-3\cos^2 t \sin t, 3\sin^2 t \cos t),$$

$$t \in [0, 2\pi]$$

$$\vec{c}'(t) = (0, 0)$$

$$\Rightarrow \|\vec{c}'(t)\|^2 = 0$$

$$\Rightarrow 9 \cos^4 t + \sin^2 t + 9 \sin^4 t + \cos^2 t = 0$$

$$\Rightarrow 9 \cos^2 t \sin^2 t (\cos^2 t + \sin^2 t) = 0$$

$$\Rightarrow \cos^2 t \sin^2 t = 0$$

$$\Rightarrow \cos t \sin t = 0$$

$$\cos t = 0 \quad \vee \quad \sin t = 0$$

$$\Rightarrow t = \frac{\pi}{2} N = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi, \dots$$

⑤ Παράδειγμα

Αναδεικνύεται ότι $\|\vec{c}'(t)\|$ σταθερός

$$\Rightarrow \vec{c}'(t) \perp \vec{c}(t)$$

Απόδειξη:

$$\|\vec{c}(t)\| = c \Rightarrow \|\vec{c}(t)\|^2 = c^2$$

$$\Rightarrow \vec{c}(t) \cdot \vec{c}(t) = c^2 \xrightarrow{\frac{d}{dt}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{c}'(t) \cdot \vec{c}(t) + \vec{c}(t) \cdot \vec{c}'(t) = 0$$

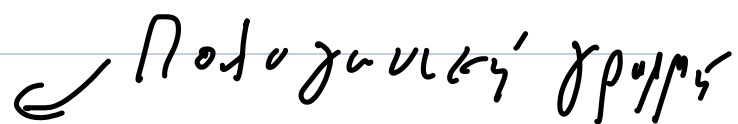
$$\Rightarrow 2\vec{c}'(t) \cdot \vec{c}(t) = 0$$

$$\Rightarrow \vec{c}'(t) \perp \vec{c}(t)$$

⑥ Μήκος τόξου

$$\vec{c}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$$

Μήκος του τόξου $\ell(\vec{c}([a, b]))$


$$t_i = a + i \frac{b-a}{N}$$
$$L(\vec{c}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N ||\vec{c}(t_i) - \vec{c}(t_{i-1})||$$

$$f_i = a + \frac{b-a}{N} i$$

$$\sqrt{(x_1(t_i) - x_1(t_{i-1}))^2 + (x_2(t_i) - x_2(t_{i-1}))^2 + \dots + (x_n(t_i) - x_n(t_{i-1}))^2}$$

$$= \sqrt{(x_1'(t_i^*)(t_i - t_{i-1}))^2 + \dots + (x_n'(t_i^{***})(t_i - t_{i-1}))^2}$$

↑ θεωρημα ρίσους ιαγής

=

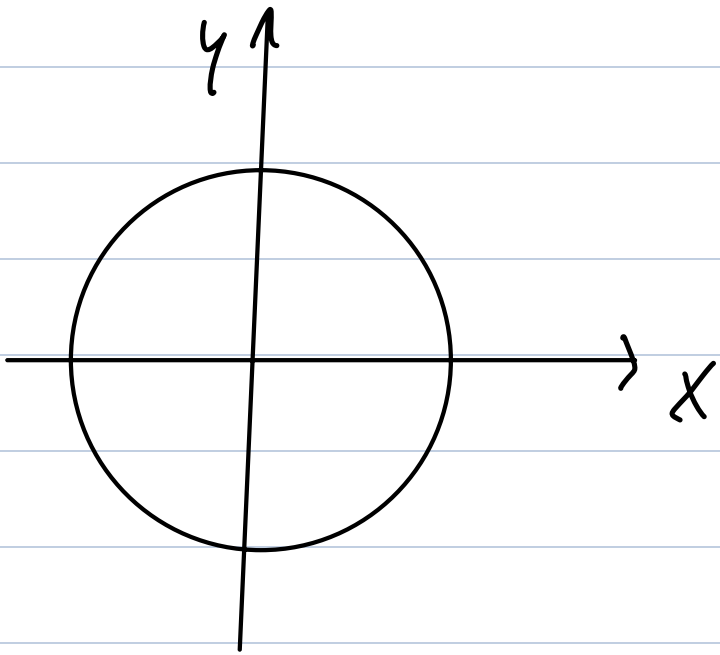
$$(t_i - t_{i-1}) \sqrt{x_1'(t_i^*)^2 + x_2'(t_i^{**})^2 + \dots + x_n'(t_i^{***})^2}$$

$$L(\vec{c}) = \int_a^b \sqrt{x_1'(t)^2 + x_2'(t)^2 + \dots + x_n'(t)^2} dt$$

Αρα το μήκος ενός τόξου είναι

$$L(\vec{c}) = \int_a^b \|\vec{c}'(t)\| dt$$

⑦ Παράδειγμα
Μήκος κύκλου



$$\vec{c}: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$$

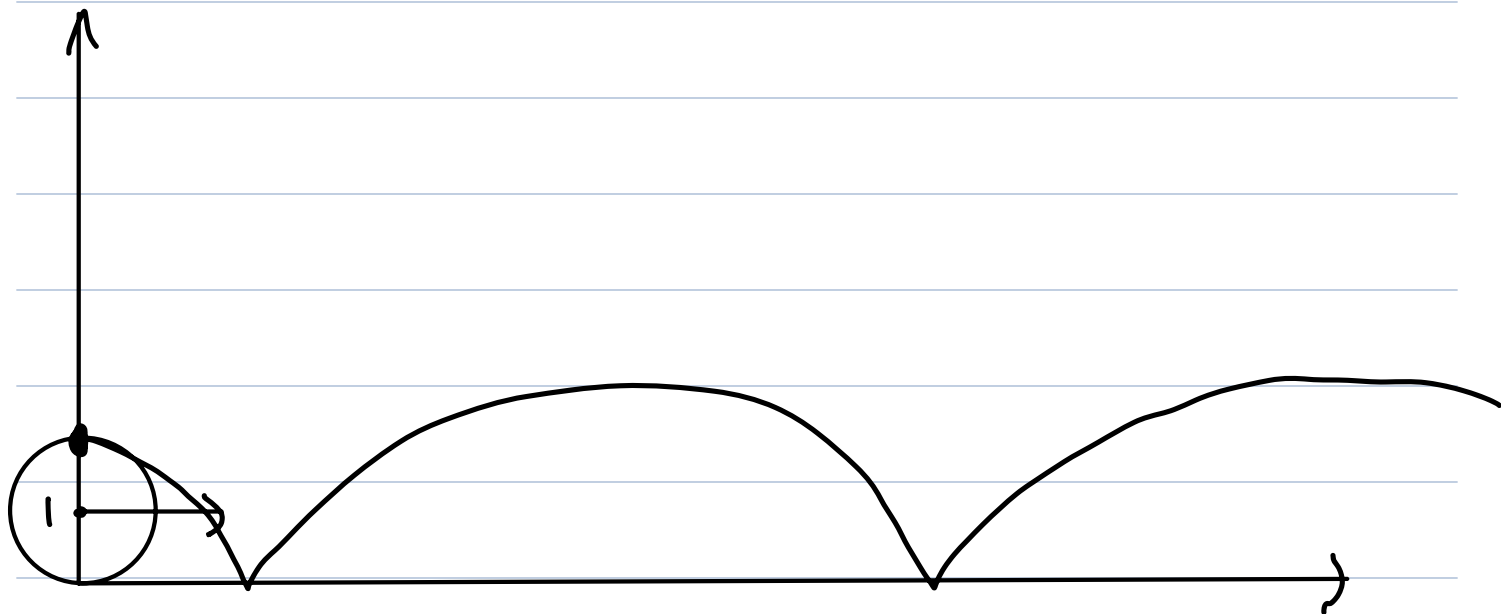
$$\vec{c}(t) = (r \cos t, r \sin t)$$

$$\vec{c}'(t) = (-r \sin t, r \cos t)$$

$$\begin{aligned} \text{Mittels } |\dot{\vec{c}}|_{\text{Loo}} &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(-r \sin t)^2 + (r \cos t)^2} dt \\ &= \int_0^{2\pi} r dt = 2\pi r \end{aligned}$$

8 Παράδειγμα

Μηκος κυκλοειδους



$$\vec{c}(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$$

$$= (1 - \cos t, \sin t)$$

$$\|\vec{c}'(t)\| = \sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t}$$

$$= \sqrt{2 - 2 \cos t}$$

$$= \sqrt{4 \sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}$$

$$= 2 \left| \sin\left(\frac{t}{2}\right) \right|$$

$$L(\vec{c}) = 2 \int_0^{2\pi} \left| \sin\left(\frac{t}{2}\right) \right| dt$$

$$= 2 \int_0^{2\pi} \sin\left(\frac{t}{2}\right) dt$$

$$= -4 \cdot \cos\left(\frac{t}{2}\right) \Big|_0^{2\pi}$$

$$= 4 - (-4) = 8$$

$$\boxed{L(\vec{c}) = 8}$$

9) Beispiel

$$\vec{c}(t) = (1, 3t^2, t^3), \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$L(\vec{c}) = ?$$

$$\vec{c}'(t) = (0, 6t, 3t^2), \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$L(\vec{c}) = \int_0^1 \|\vec{c}'(t)\| dt$$

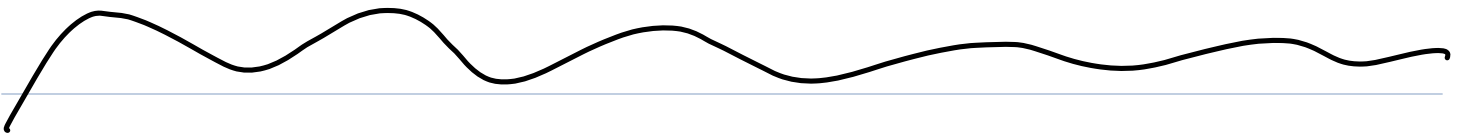
$$= \int_0^1 \sqrt{0^2 + 36t^2 + 9t^4} dt$$

$$= \int_0^1 3 \sqrt{4t^2 + t^4} dt$$

$$= \int_0^1 3t \sqrt{t^2 + 4} dt$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} (t^2 + 4)^{\frac{3}{2}} &= \frac{3}{2} \cdot 2t \cdot (t^2 + 4)^{\frac{1}{2}} \\ &= 3t \sqrt{t^2 + 4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}L(\vec{c}) &= \int_0^1 3t \sqrt{t^2 + 4} dt \\ &= (t^2 + 4)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 \\ &= 5^{\frac{3}{2}} - 4^{\frac{3}{2}} \\ &= \boxed{5\sqrt{5} - 8}\end{aligned}$$



10 Διασκευασμένο Πρόβλημα - Σφραγισμένο

12) Παράδειγμα

Προσγγ. $\int$ αυ. επιδ. ταχυτ. νερού
τιον πίστι προς ομή κυκλ. λρε.

$$\vec{V}(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \hat{i} - \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \hat{j}$$

13) Πεδίο κλίσεων

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\vec{F} = \vec{\nabla} f = \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

Πεδίο κλίσεων της f

(14) Παράδειγμα

$T(x, y, z)$: Θερμότητα στο σημείο (x, y, z)

$$J(x, y, z) = -k \nabla T(x, y, z)$$

Διαν. πεδίο δόθους
της θερμότητας

(15) Παράδειγμα (βαρυτικό πεδίο της Γης)

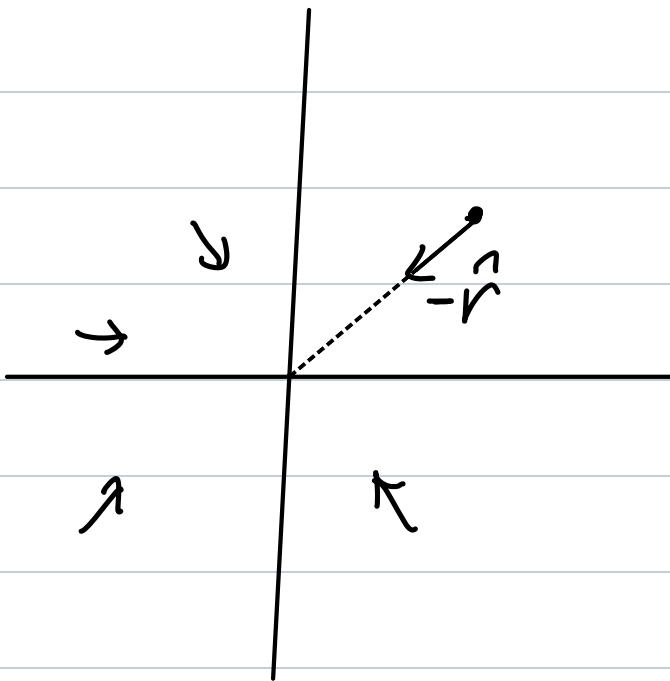
Σώμα στην αγκυρά αξόνων μάζας M

Σωματίδιο μάζας m σε θέση $r = (x, y, z)$

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\frac{GMm}{\|\vec{r}\|^3} \vec{r}$$

$$= - \frac{GMm}{\|\vec{r}\|^2} \cdot \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|}$$

$$= - \frac{GMm}{\|\vec{r}\|^2} \cdot \hat{r}$$



Είναί επίσης εκτίσων; Ναι!

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} V$$

$$V(\vec{r}) = - \frac{GMm}{\|\vec{r}\|}$$

Βαρυνικό
Δυναμικό

Πράγματι

$$V(\underbrace{x, y, z}_{\vec{r}}) = -\frac{GMm}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{GMm}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right)$$

$$= -GMm \left(-\frac{1}{2} \right) (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2x$$

$$= \frac{GMm}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot x$$

$$\frac{\partial V}{\partial y}(x, y, z) = \frac{GMm}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot y$$

$$\frac{\partial V}{\partial z}(x, y, z) = \frac{GMm}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot z$$

$$\Rightarrow \vec{F} = -\vec{\nabla} V(x, y, z)$$

$$= -\frac{GMm}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} (x, y, z)$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{F} = \frac{GMm}{\|\vec{r}\|^3} \vec{r}}$$

16) Εφαρμογή: Διατ. Μηρ. Ενέργειας

2ος Νόμος Νεύτωνα: $F(\vec{r}(t)) = m \ddot{\vec{r}}(t)$

Βορογυλικό πεδίο είναι: $\vec{F}(\vec{r}) = -\nabla U(\vec{r})$

Ενέργεια τη στιγμή t :

$$E(t) = \frac{1}{2} m \|\dot{\vec{r}}(t)\|^2 + U(\vec{r}(t))$$

$$\Rightarrow \frac{dE(t)}{dt} = \frac{1}{2} m \cdot 2 \ddot{\vec{r}}(t) \dot{\vec{r}}(t) + \vec{\nabla} V(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t)$$

$$= \underbrace{\left[m \ddot{\vec{r}}(t) - \vec{F}(\vec{r}(t)) \right]}_{=0} \dot{\vec{r}}(t)$$

$$\Rightarrow \frac{dE(t)}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow E_1 = E_2 = \dots = E_N.$$

⑪ Είναι όλα τα διασυνδεδεμένα σιρσία
σιρσία κλειστών;

OXI!!

π.χ. $\vec{V}(x, y) = (y, -x)$

Αν ήταν πεδίο κλίσεων, τότε

$$\vec{\nabla} f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y \partial x} = 1 \quad \frac{\partial f}{\partial x \partial y} = -1$$

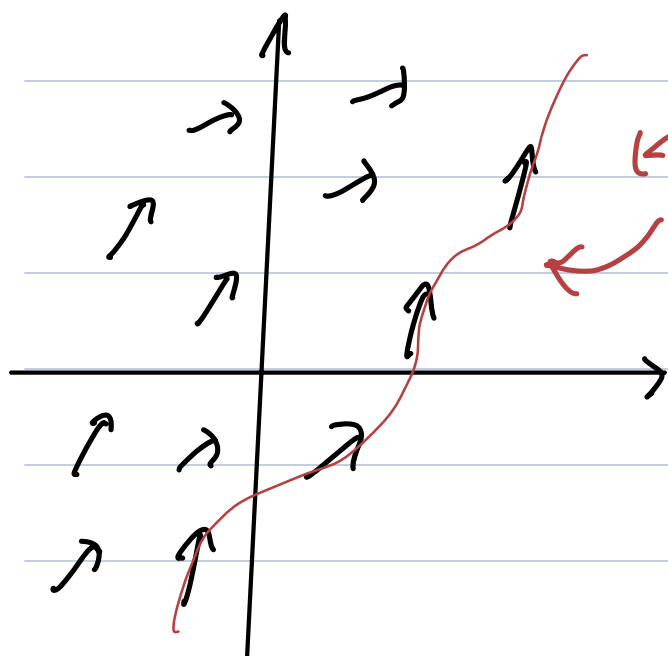
$$\frac{\partial f}{\partial y \partial x} \neq \frac{\partial f}{\partial x \partial y} \quad \text{ενώ } f \text{ συνεχής}$$

ή $f \in C^2$

άρα όχι.

Άρα $\vec{V}(x, y)$ δεν είναι scalar πεδ.
κλίσεων.

18) Καμπύλη Φοής Διαν. Ρεδίου



καμπύλη φοής διαν.
ρεδίου $\vec{F}$

$$\vec{c}'(t) = \vec{F}(\vec{c}(t))$$

Διαν. εξίσωση διαδρ. σωματιδίου
σε ρευστό με πεδίο ταχυτήτων $\vec{F}$

Λύνουμε διαε. εξίσωση (σύστημα)

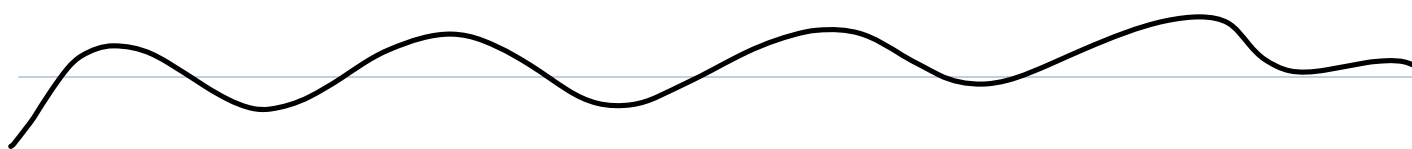
$$\text{Αν } \vec{c}(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

επίτ

$$x' = F_x(x, y, z)$$

$$y' = F_y(x, y, z)$$

$$z' = F_z(x, y, z)$$



⑨ Τετρεση's ∇

(Κλίση (βαθμίδα, *grad*), *gradient*), Ακρόαση (*div*), *divergence*,
 Στεροβόλωση (*curl*), Λαπλάσιανή (*Laplacian*)

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$$

$$(n=3) \vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

επίσημη / παθριδα της f :

$$\vec{\nabla} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

Ερμηνεία: Κατεύθυνση ταχύτερης
απόδοσης της f

$$\vec{F}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n}$$

Ερμηνεία: Σχετική διαστολή του
ρευστού αν η $\vec{F}$ είναι
αδείο ταχυτήτων

στροβιλισμός του διανυσματικού
πεδίου

Μόνο για $n=3$

$$\vec{F}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_x & f_y & f_z \end{vmatrix}$$

$\text{curl}(\vec{F})$

$$= \left(\left(\frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z} \right), \left(\frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x} \right), \left(\frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y} \right) \right)$$

Ερμηνεία: Σειροτάκτως του πεδίου

Λαπαλασση

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\nabla^2 f = \Delta f = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} f) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\nabla^2 f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}$$

Απόκλιση - Στροβιλισμός

Κλίση - Λαπλασιανή

① Θεωρούς

$$\mathbb{R}^n: \quad \vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$$

$$\mathbb{R}^3: \quad \vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

$$\mathbb{R}^2: \quad \vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\text{Βαθμίδα: } \vec{\nabla} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

(κλίση)

$$F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

Atiklon (div / divergence):

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}$$

$$\nabla \cdot \vec{F} > 0 \Rightarrow \text{"\textit{Divergence"}}$$

Συνοψτικός (curl):

$$n=3: \operatorname{curl} \vec{F} := \vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix}$$

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\nabla^2 f : \Delta f$$

$$= \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} f)$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}$$

② Παράδειγμα

$$\vec{F}(x, y, z) = \overbrace{x^2 y}^P \hat{i} + \overbrace{z}^Q \hat{j} + \overbrace{xyz}^R \hat{k}$$
$$= (x^2 y, z, xyz)$$

$$\text{div } \vec{F}, \quad \text{curl } \vec{F} = ;$$

$$\text{div } \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

$$= 2xy + 0 + xy$$

$$= 3xy$$

$$\text{curl } \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \hat{i} - \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z} \right) \hat{j}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \hat{k} \\
& = (xz - 1) \hat{i} - (yz - 0) \hat{j} \\
& + (0 - x^2) \hat{k} \\
& = (xz - 1, -yz, -x^2)
\end{aligned}$$

③ Παράδειγμα

$$\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\vec{F}(x, y, z) = \overbrace{xy}^P \hat{i} - \overbrace{5xz}^Q \hat{j} + \overbrace{1}^R \hat{k}$$

$$\text{div } \vec{F}, \text{curl } \vec{F} = ;$$

$$\text{div } \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

$$= y - 0 + 0 = y$$

$$\text{curl } \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \hat{i}$$

$$- \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z} \right) \hat{j}$$

$$+ \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \hat{k}$$

$$= \left(0 + \cos z \right) \hat{i}$$

$$- \left(0 - 0 \right) \hat{j}$$

$$+ \left(0 - x \right) \hat{k}$$

$$= \cos z \hat{i} - x \hat{k} = (\cos z, 0, -x)$$

4) Παράδειγμα

$$\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\vec{F}(x, y, z) = \frac{\overbrace{y}^p}{x^2 + y^2} \hat{i} - \frac{\overbrace{x}^q}{x^2 + y^2} \hat{j} + \overbrace{0}^R \hat{k}$$

$$\text{div} \vec{F}, \text{curl} \vec{F} = ;$$

$$\text{div} \vec{F} = \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

$$= - \frac{y}{(x^2 + y^2)^2} \cdot 2x + \frac{x}{(x^2 + y^2)^2} \cdot 2y$$

$$= 0$$

$$\text{curl} \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ p & q & R \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \hat{i}$$

$$- \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z} \right) \hat{j}$$

$$+ \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \hat{k}$$

$$= (0 - 0) \hat{i}$$

$$- (0 - 0) \hat{j}$$

$$+ \left(- \frac{1(x^2 + y^2) - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{1(x^2 + y^2) - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right) \hat{k}$$


 αστέροειδο μέσο

5) (δ, ότ η τ α σ τ ρ ο λ ι τ ω ρ ό ς (ελίρ η ς) = 0

Θεωρ.

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \quad C^2$$

$$\Rightarrow \text{curl}(\vec{\nabla} f) = \vec{0}$$

Απολ.:

$$f(x, y, z)$$

$$\vec{\nabla} f(x, y, z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

$$\text{curl}(\vec{\nabla} f) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} \right) \hat{i} \\
&- \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} \right) \hat{j} \\
&+ \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right) \hat{k}
\end{aligned}$$

(επιστήμη
f: C²)

$$= 0 \hat{i} + 0 \hat{j} + 0 \hat{k} = \vec{0}$$

6) (Συμότητα Αποδείξεων (Σημειώσεις))

= 0

Θεωρ.

$$\vec{F}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\operatorname{div}(\operatorname{curl} \vec{F}) = 0$$

Ans.:

$$\vec{F} = (p, q, r)$$

$$\operatorname{curl} \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ p & q & r \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial r}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial z} \right) \hat{i} - \left(\frac{\partial r}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial z} \right) \hat{j} + \left(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y} \right) \hat{k}$$

$$\Rightarrow \operatorname{div}(\operatorname{curl} \vec{F}) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right)$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial R}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial z} \right)$$

$$+ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)$$

$$= \underbrace{\frac{\partial^2 R}{\partial x \partial y}}_{\text{red}} - \underbrace{\frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial z}}_{\text{blue}} - \underbrace{\frac{\partial^2 P}{\partial y \partial x}}_{\text{red}} + \underbrace{\frac{\partial^2 P}{\partial y \partial z}}_{\text{purple}} \\ + \underbrace{\frac{\partial^2 Q}{\partial z \partial x}}_{\text{blue}} - \underbrace{\frac{\partial^2 P}{\partial z \partial y}}_{\text{purple}}$$

$$= \text{red } 0 + \text{blue } 0 + \text{purple } 0 = 0.$$

$$(u, v, w) \quad \vec{F} : \mathbb{C}^2$$

⑦ Παράδειγμα

Δείξτε ότι $\vec{V}(x, y, z) = y\hat{i} - x\hat{j}$

δεν είναι πεδίο κλίσεων.

Αποδ.:

Αν ήταν το $\vec{V}$ πεδίο κλίσεων

$\vec{V} = \vec{\nabla} f$ τότε ο στροβιλισμός

του είναι $\text{curl}(\vec{\nabla} f) = \vec{0}$

$$\text{curl} \vec{V} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ y & -x & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (0 - 0)\hat{i}$$

$$\begin{aligned}
 & - (0 + 0) \hat{j} \\
 & + (-1 - 1) \hat{k} \\
 & = -2 \hat{k}
 \end{aligned}$$

Άρα: $\text{curl } \vec{V} \neq 0$ δεν είναι
εγκέντρο κτιστων.

8) Παράδειγμα

Δείξτε ότι το $\vec{V}(x, y, z)$
 $= \underset{P}{x} \hat{i} + \underset{Q}{y} \hat{j} + \underset{R}{z} \hat{k}$ δεν είναι
 στροβιλικός κάποιοι άλλου πεδίου.

Απόδειξη:

$$\text{Αν } \vec{V} = \text{curl } \vec{F} \text{ τότε}$$

$$\text{div } (\vec{V}) = \text{div } (\text{curl } \vec{F}) = 0$$

Εξάρα

$$\text{div } \vec{V} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} = 3 \neq 0$$

Άρα $\vec{V}$ δεν είναι απροβλεπτός
κύριου $\vec{F}$.

9) Ιδιότητες (Διαφορ. Ταυτοτητες)

$$1. \vec{\nabla}(f+g) = \vec{\nabla}f + \vec{\nabla}g$$

$$2. \vec{\nabla}(f \cdot g) = g \vec{\nabla}f + f \vec{\nabla}g$$

$$3. \vec{\nabla}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g \vec{\nabla} f - f \vec{\nabla} g}{g^2}, \quad g \neq 0$$

$$4. \vec{\nabla} \cdot (\vec{F} + \vec{G}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} + \vec{\nabla} \cdot \vec{G}$$

$$5. \vec{\nabla} \times (\vec{F} + \vec{G}) = \vec{\nabla} \times \vec{F} + \vec{\nabla} \times \vec{G}$$

$$6. \vec{\nabla} \cdot (f \vec{F}) = (\vec{\nabla} f) \cdot \vec{F} + f(\vec{\nabla} \cdot \vec{F})$$

$$7. \vec{\nabla} \cdot (\vec{F} \times \vec{G}) = \vec{G} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}) - \vec{F} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{G})$$

$$8. \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = 0$$

$$9. \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} f) = \vec{0}$$

ΤΕΛΟΣ ΤΟΥ ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΥ

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ

forecast.uoa.gr

Γιώργος Παπαθανασίου

g.papathanasiou@phys.uoa.gr

Γραείο κτηρ. [ο.π.σ 4, #15



Περιγραφή

1. Διανύσματα
2. Συναρτήσεις Πολύων μεταβλητών
(επαγωγική, καμπύλες)
3. Μερικές Παραγωγές ανώτερης τάξης,
γραφική απεικόνιση
4. Διασυντακτικές συναρτήσεις, αλγόριθμοι,
οπτικοποίηση

5. Πολλαπλή ολοκλήρωση ←

6. Αλλαγές Μεταβλητών + εφαρμογές ολοκλήρωσης

7. Επικαταγύκτα και επικοινωνιακά ολοκληρώματα

8. Θεμελιώδη θεωρήματα
Διανυσματικής Ανάλυσης

ΤΕΛΟΣ

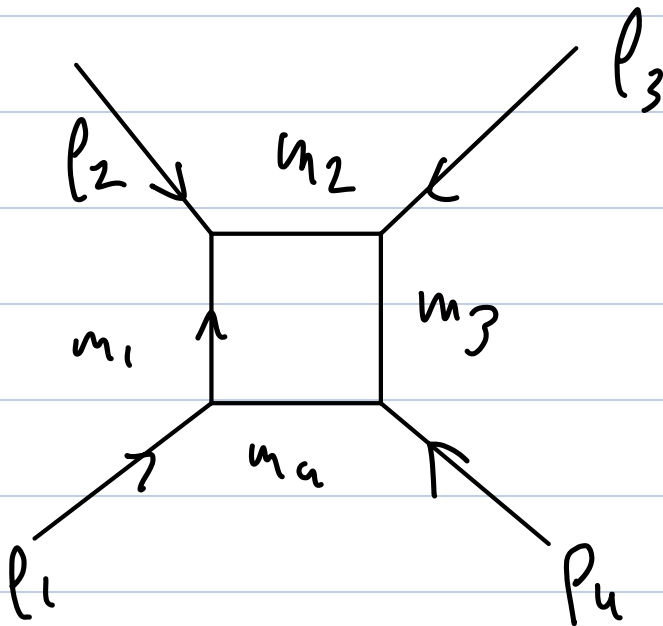
Χρησιμότητα Ολοκλήρωσης

π.χ. για υπολογισμό :

- μάζας ή ηλ. φορτίου

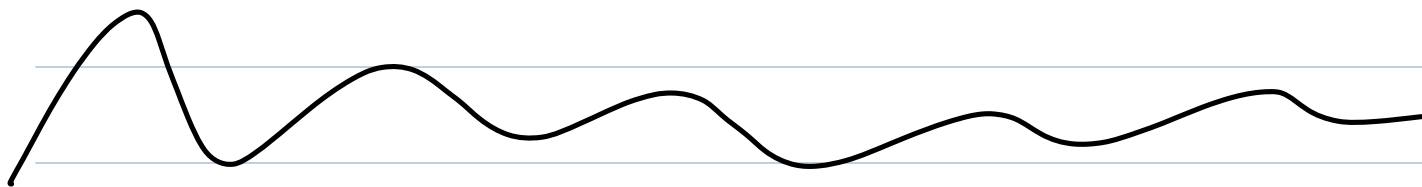
στη βελτίωση της απόδοσης

- έργο δύναμης
- επιρροή της για αποτελέσματα
στοιχειωδών συστημάτων



$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dk^0 \frac{1}{(k^2 - m_1^2) [(k+p_1)^2 - m_1^2] [(k+p_1+p_2)^2 - m_3^2] \times [(k-p_4)^2 - m_4^2]}$$

k^0

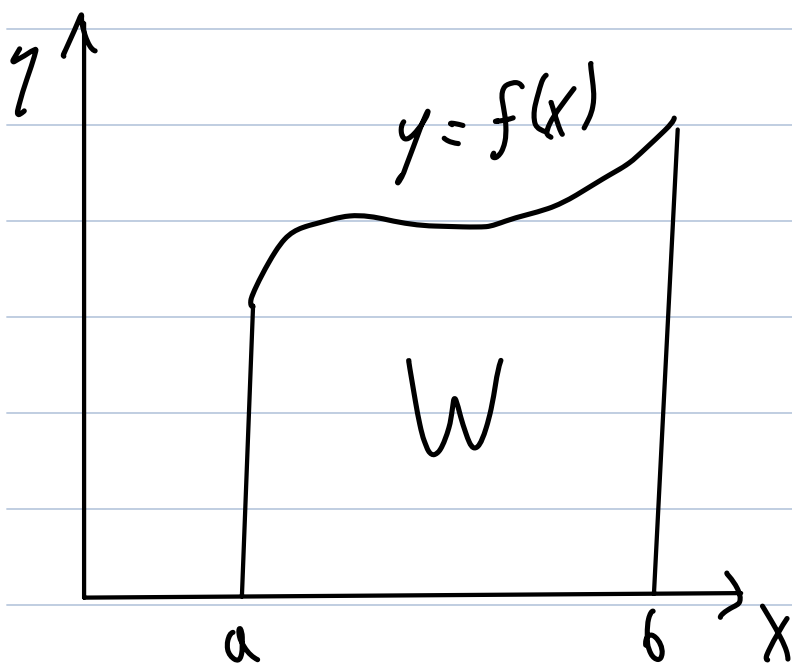


5.0. Εφαρμογή σε αδιάκριτα

Βοήθημα: σημειώσεις του Γεωργίου

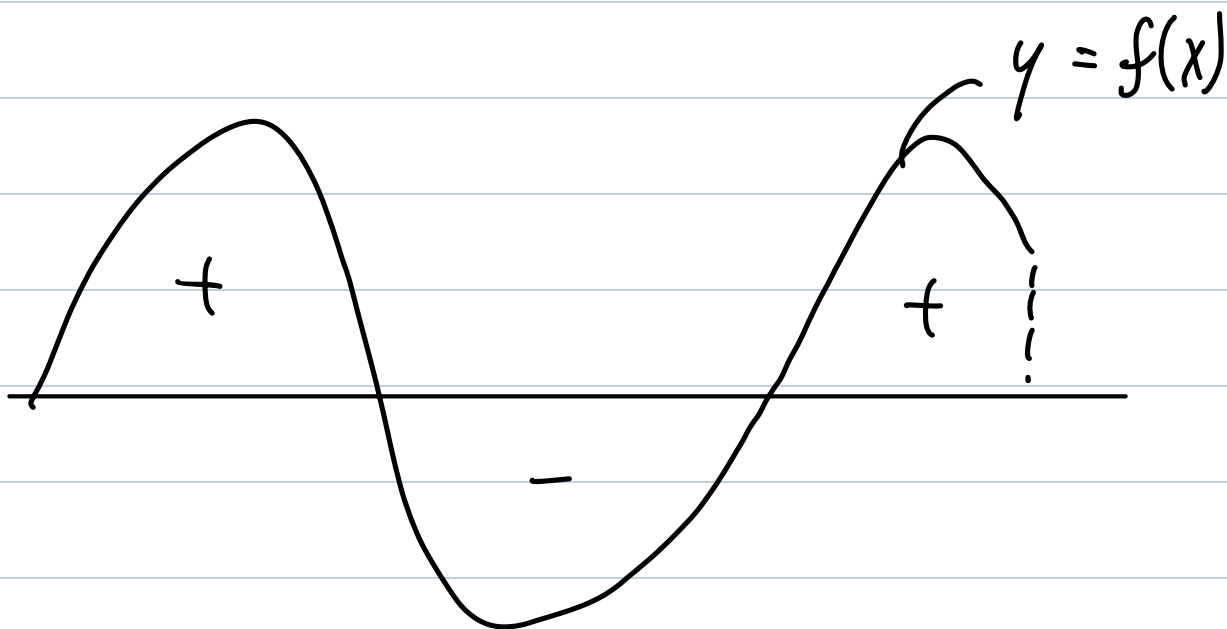
Για συνεχή συνάρτηση $f(x)$,
 $x \in [a, b]$ γς $f(x) \geq 0$

ορίζου αδιάκριτα



$$\int_a^b f(x) dx = \text{εμβαδόν χωρίου } W$$

[Συλλεγόμενα, προσεγγιστικό εμβαδόν



Α! πρώτο ολοκλήρωμα

$$F(x) := \int f(x) dx \quad \text{Απαγωγική ισχύει}$$

συνάρτηση f ε continuous

$$F'(x) = f(x)$$

Σχέση με ορισμό ολοκλήρωμα:

$$F(x) = \int_c^x f(t) dt$$

← x ← γενικευμένο

← οποιδήποτε σταθερά
 $\in [a, b]$

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

2^ο Θεμελιώδες Θεώρημα
ολοκληρωτικής λογιστικής

5.0.1 Στοιχιστικές μεθόδους ολοκλήρωσης

Δ Βασικές Ολοκληρώσεις

απαλοσιποίησης του

$$1) \int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C, \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

$$2) \int \frac{1}{x} dx = \ln |x|$$

$$3) \int e^x dx = e^x$$

$$4) \int \sin x = -\cos x$$

Area of circle
with Taylor?

$$5) \int \cos x = \sin x$$

$$6) \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$7) \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x, \quad x \neq n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$8) \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x, \quad x \in (-1, 1)$$

$$9) \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x, \quad x \in \mathbb{R}$$

Β Θέλετη ρύση κατά παράγοντες

$$\int_a^b f(x) g'(x) dx = \left[f(x) g(x) \right]_a^b - \int_a^b f'(x) g(x) dx$$

(+ για αόριστα ολοκληρώματα)

Γ. Μέθοδος της αντικατάστασης

$$\int_a^b f(g(x)) g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) du$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{Θέτουμε } u = g(x) \\ \Rightarrow du = g'(x) dx \end{array} \right.$$

Ασκήσεις Εξανάληψης:

Υπολογίστε τα:

1. $\int_0^1 x^2 e^x dx$

2. $\int x \ln x dx$

3. $\int \ln^2 x dx$

4. $\int \sin^2 x dx$

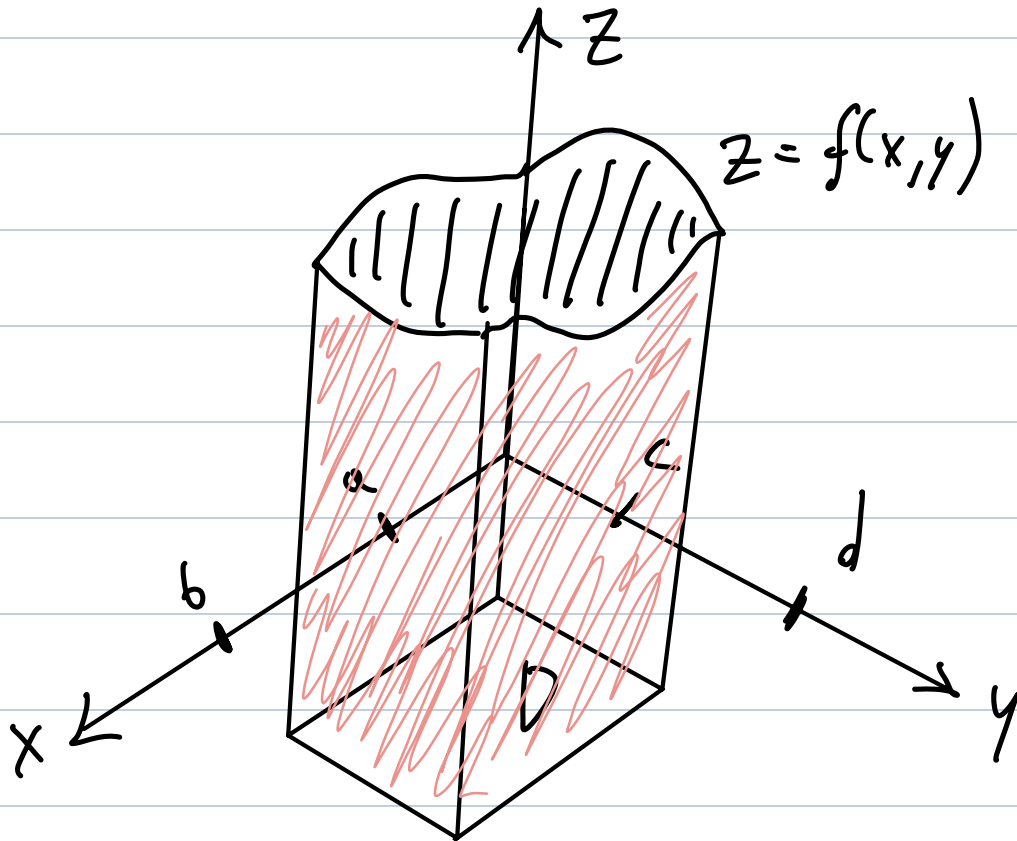
5. $\int \sin^4 x dx$

6. $\int \sin^3 x \cos^4 x dx$

! 7. $\int \sin^n x \cos^m x dx$ για n ή m άρτιο

5.1. Εισαγωγή στη Διττά

Έστω συνεχής συνάρτηση $f(x,y)$ με πεδίο ορισμού $\underline{D}$ γραβλ.
 $(x,y) \in D$
 $= [a,b] \times [c,d]$
ορθογώνιο



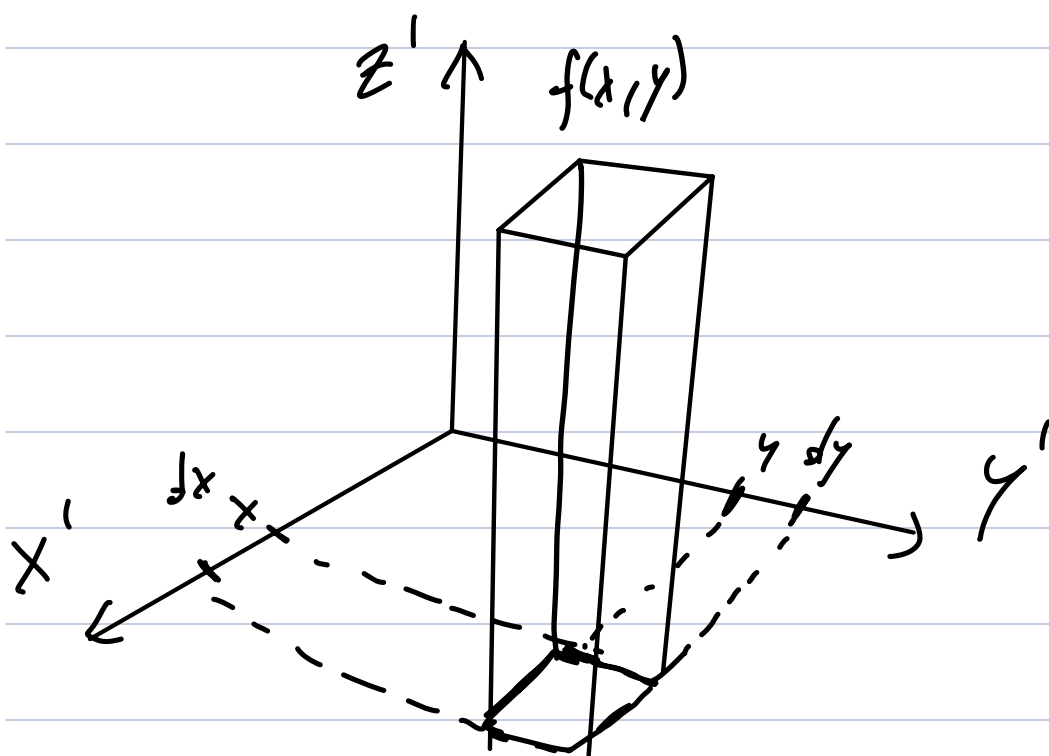
Αν $f(x,y) \geq 0$ τότε σε αναλογία
με αειλό ολοκλήρωμα

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \text{όγκος πάνω από } D, \text{ κάτω από γραφίδα } f(x, y)$$

γιατί ολοκλήρωμα

εξήγηση στο σχεδιασμό όγκου

$$dV = f(x, y) dx dy$$



Πως υπολογίζεται στην πράξη;



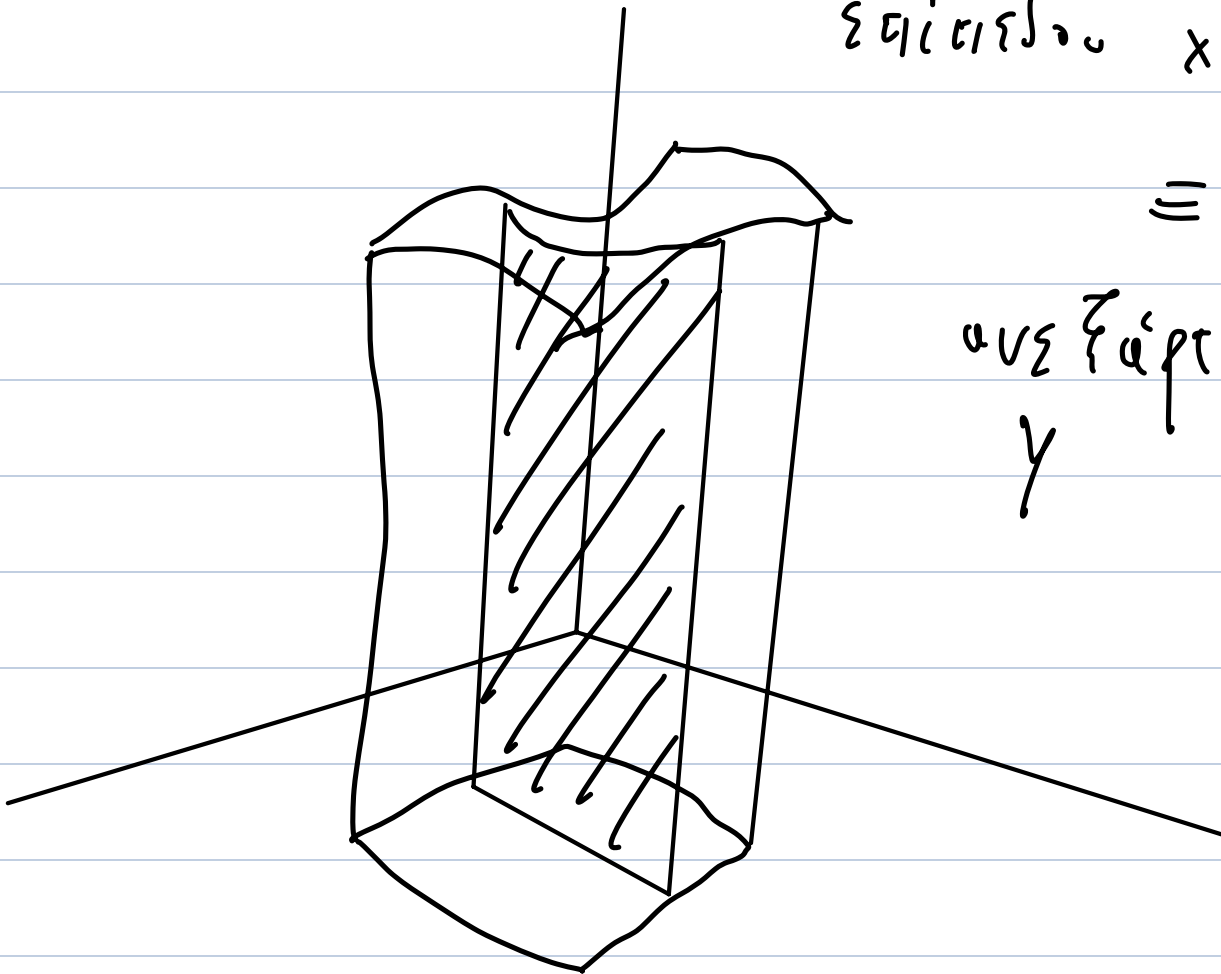
$$\int_C^d f(x_0, y) dy = \text{εμβαδόν}$$

$\int \text{κατοψής}$

επιπέδου $x = x_0 = A$

$$\equiv A(x_0)$$

αυξήρηση του
 y



$$\iint f(x, y) dx dy = \text{όγκος}$$

$$= \int_a^b A(x) dx$$

στοιχειώδης όγκος μιας
"φέτας" πάχους dx

"Αρχή του Cavalieri"

$$= \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx$$

↑

Διαδοχικό Θεώρημα :

1. Θεωρήρηση ως προς y τελ. σταθ.
Αποτέλεσμα είναι ανεξάρτητο του y

2. Θεωρήρηση ως προς x

Αντίς ολοκληρώσεις

Αντιλόγως, μπορούμε να θεωρήσουμε διαδοχικά αντί επίταστο γινόμενο. Γιαταθ.

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx$$

$$= \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy$$

* Οι δύο διαφορετικές σειρές ολοκλήρωσης
πρέπει να δίνουν το ίδιο αποτέλεσμα
(Θεώρ. Fubini)

Παράδ. 5.1.3.

$$\Gamma \alpha \quad D = [-1, 1] \times [0, 1]$$

$$\text{υπολογιστεί} \quad \iint_D (x^2 + y^2) dx dy$$

$$= \int_0^1 dy \int_{-1}^1 (x^2 + y^2) dx$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{x^3}{3} + xy^2 \right]_{-1}^1 dy$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{2}{3} + 2y^2 \right) dy$$

$$= \left[\frac{2}{3}y + \frac{2}{3}y^3 \right]_0^1$$

$$= \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \boxed{\frac{4}{3}}$$

Αντίστροφη Σελίδα:

$$I = \int_{-1}^1 dx \int_0^1 (x^2 + y^2) dy$$

$$= \int_{-1}^1 \left[x^2 y + \frac{y^3}{3} \right]_0^1 dx$$

$$= \int_{-1}^1 \left(x^2 + \frac{1}{3} \right) dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x}{3} \right]_{-1}^1$$

$$= \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \boxed{\frac{4}{3}}$$

Δίνει ίδια
αποτίλεση!

Ασκήσεις για επόμενη φορά

Μ.Τ. Σ.Ι.Ι.

Υπολογίστε:

$$\alpha) \int_0^1 \int_0^1 (1 - x^3 + xy) dx dy$$

$$\beta) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin y \, dx dy$$

$$\gamma) \int_1^2 \int_2^4 \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) dx dy$$

$$\delta) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{\cos^2 y} \, dx dy$$

Πότε για συνάρτηση είναι ολοκληρώσιμη

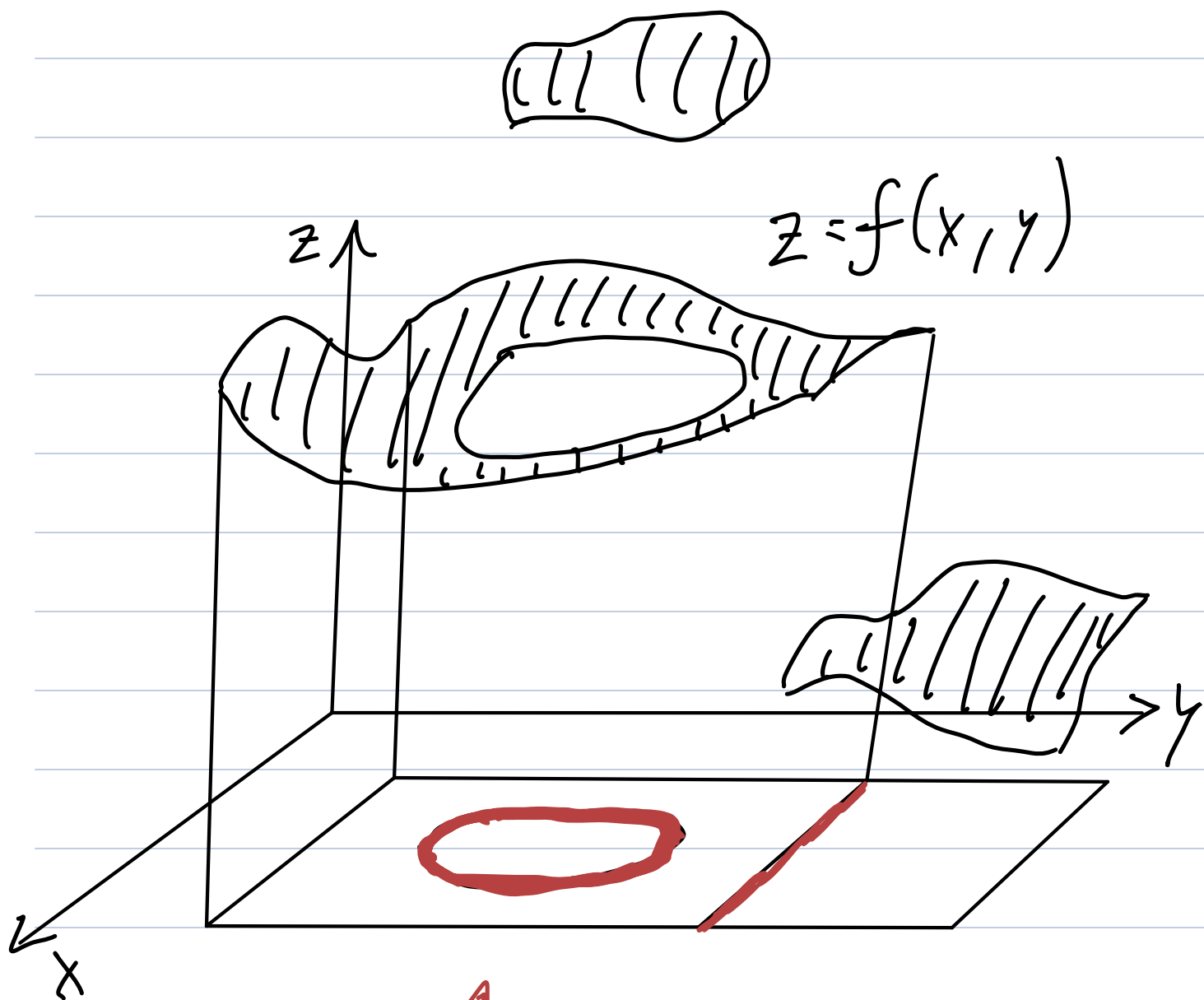
Θεώρημα Fubini: Αν $f: R = [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$

είναι:

- φραγμένη, δηλ $\exists M > 0$ τ.ω.
 $-M < f(x, y) < M \quad \forall (x, y) \in R$

- σχεδόν - παντού συνεχής: Το σύνολο σημείων ασυνέχειας της f έχει μηδενικό εμβαδόν

$$\begin{aligned} \text{Τότε} \quad \iint_R f(x, y) dx dy &= \int_c^d \underbrace{\left[\int_a^b f(x, y) dx \right]}_{f(y)} dy \\ &= \int_a^b \underbrace{\left[\int_c^d f(x, y) dy \right]}_{f(x)} dx \end{aligned}$$



α συνίσταται της f είναι
 μονοκύστερες καμπύλες γυδευτικού
 εμβαδού