

Γιώργος Παπαθανασίου

g.papathanasiou@phys.uoa.gr

Γραφείο I + 4 # 15

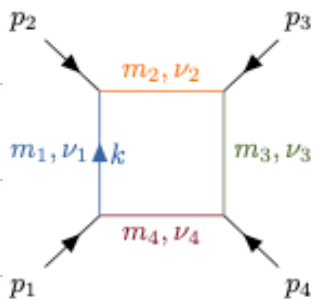
Πείραγμα Μανιχατός [$\sim$ κέρταρια Marsden-Tromba]

1. Διενεργείται σε ευκαίσιους χώρους
2. Συνεργείες ποταμών μεταβλητών, παραχώγηση, καρπύες
3. Μερικές παραχώγοι ανώτερης τάξης, γραμμική παραχώγηση, ακρόαση
4. Διενεργατικές συνεργείες, αποκλίση + ερωβιτισμός
5. Ποταμότητα (βαθμική) οτοκλήρωση $\leftarrow$ Πάρις
6. Αλλαγές μεταβλητών + εφαρμογές οτοκλήρωσης
7. Επικαρκύλια + επικρατικά οτοκλήρωματα
8. Θεωριών Θεωρήματα της διενεργατικής ανάλυσης

Χρησιμότητα ολοκλήρωσης

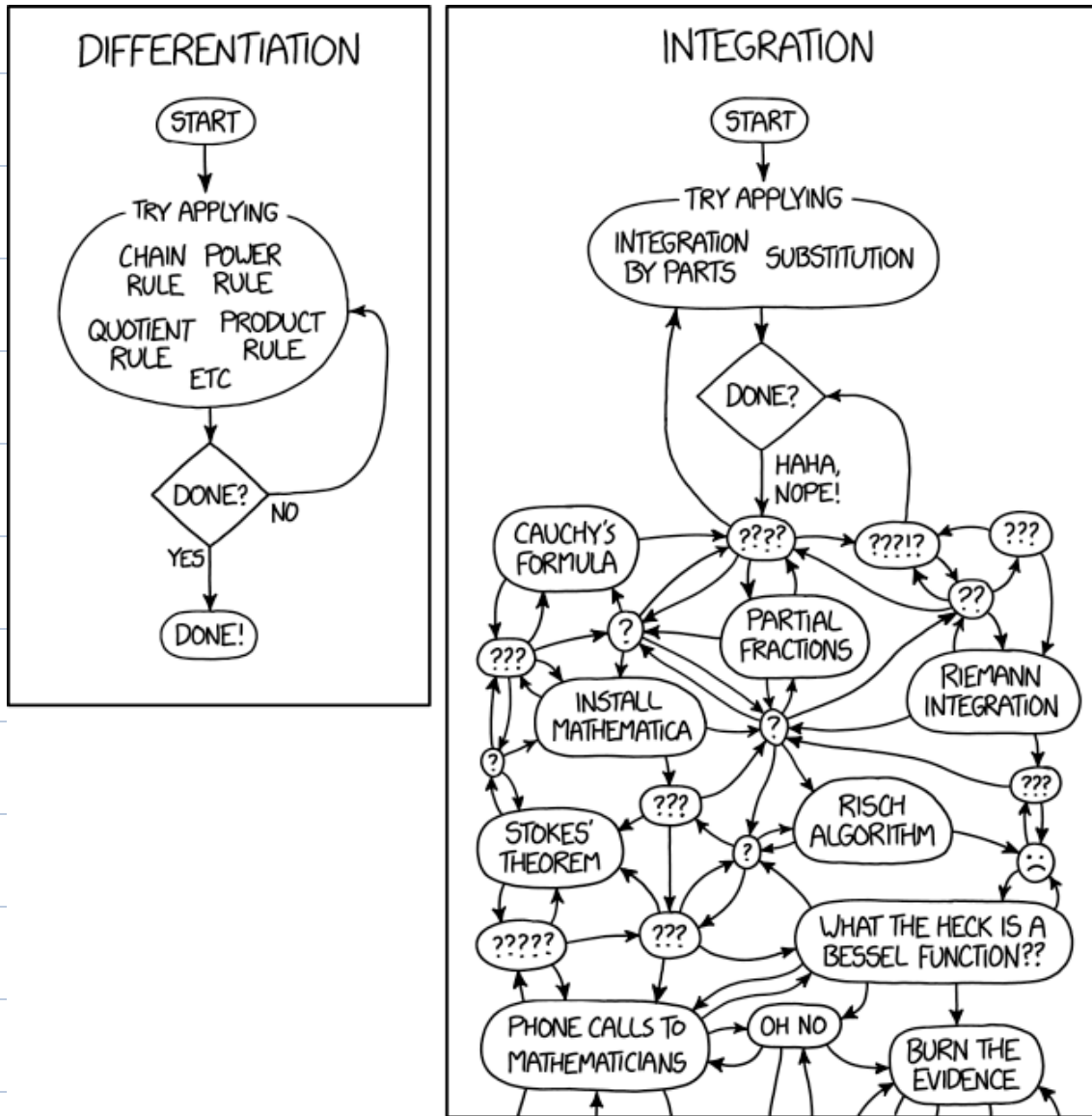
Π.χ. για τον υπολογισμό

- τάξης ή ηθ. φορτίου σταθερού σωματός από πεκνότητα
- έργου δύναμης
- προβλέψτε για πεκνότητα στοιχειωδών σωματιδίων



$$= \int \frac{d^d k}{(k^2 - m_1^2)^{\nu_1} [(k + p_1)^2 - m_2^2]^{\nu_2} [(k + p_1 + p_2)^2 - m_3^2]^{\nu_3} [(k - p_4)^2 - m_4^2]^{\nu_4}}$$

Η Διαφορά με την παραγωγή



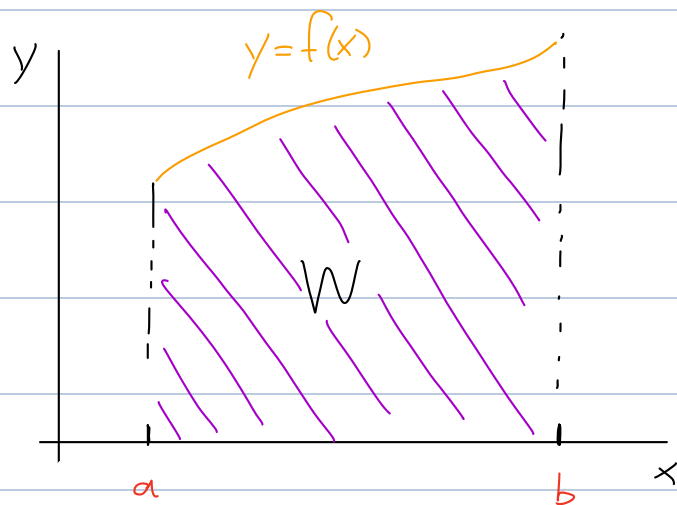
πηγή: xkcd

Η ομοιοτήτων δεν είναι εν γένει αλγοριθμική

Βοήθηα: Σηκτώσεις Ανάλυσης I από Σ. Νότιση (κεφ. 7)

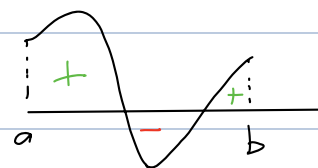
Για συνεχή συνάρτηση $f(x)$, $x \in [a, b]$ με $f(x) \geq 0$,
ορισμένο οθοκλήρωμα

$$\int_a^b f(x) = \text{εμβαδόν χωρίου } W$$



(πάνω από άξονα x ,
κάτω από χρ. παράσταση $y=f(x)$
ανάμεσα από ευθείες $x=a$, $x=b$)

Γενικότερα, προσημασμένο εμβαδόν:



Αόριστο οθοκλήρωμα $F(x) = \int f(x) dx$:

Παραγωγ. συνάρτηση με ιδιότητα $F'(x) = f(x)$

Σχέση με ορισμένο $\int$: $F(x) = \int_a^x f(x') dx'$
για οποιοδήποτε σταθερά $a \in [a, b]$

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

2^ο Θεμελιώδες Θεωρ.
αντιμεστροφικοί
λογισμοί

5.0.1 Στοιχειώδεις μέθοδοι ολοκλήρωσης

A. Βασικά ολοκληρώματα

Πρέπει να τα θυμάστε
ή να μπορείτε να τα ελέγχετε

$$i) \int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} \quad a \in \mathbb{R}, a \neq -1$$

$$ii) \int \frac{1}{x} dx = \ln|x|$$

$$iii) \int e^x dx = e^x$$

$$iv) \int \sin x dx = -\cos x$$

$$v) \int \cos x = \sin x$$

$$vi) \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x$$

$$vii) \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x$$

$$viii) \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x \quad ix) \int \frac{1}{1+x^2} = \arctan x$$

B. Ολοκλήρωση κατά Παράγοντες (in fēpn)

$$\int_a^b f(x) g'(x) dx = [f(x) g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x) g(x) dx$$

(και για αόριστα ολοκλ)

Παράδειγμα:

$$\begin{aligned} \int_1^e \ln x \, dx &= \int_1^e \ln x (x') \, dx = [x \ln x]_1^e - \int_1^e \frac{1}{x} \cdot x \, dx \\ &= [x \ln x - x]_1^e = 1 \end{aligned}$$

Γ. Μέθοδος της αντικατάστασης

$$\int_a^b f(g(x)) g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) du \quad \left[\begin{array}{l} \text{Θέτουμε } u = g(x) \\ \Rightarrow du = g'(x) dx \end{array} \right]$$

Παράδειγμα:

$$\begin{aligned} \int_2^e \frac{1}{x \ln x} \, dx & \quad \begin{array}{l} u = \ln x \\ du = \frac{dx}{x} \end{array} \quad \begin{array}{l} 1 \\ \ln 2 \end{array} \\ &= \int_{\ln 2}^1 \frac{du}{u} \\ &= [\ln u]_{\ln 2}^1 \end{aligned}$$

Τέλος, αξιωματικά 1 ιδιότητες ολοκληρωμάτων όπως

- $\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$
- $\int a \cdot f(x) dx = a \int f(x) dx \dots$

Ασκσεις Επανάληψης

Υπολογίστε τα ακόλουθα ολοκληρώματα:

1. $\int_0^1 x^2 e^x dx$

4. $\int \sin^2 x dx$

2. $\int x \ln x dx$

5. $\int \sin^4 x dx$

3. $\int \ln^3 x dx$

6. $\int \sin^3 x \cos^4 x dx$

7! $\int \sin^n x \cos^n x dx$ για n ή n περιττό

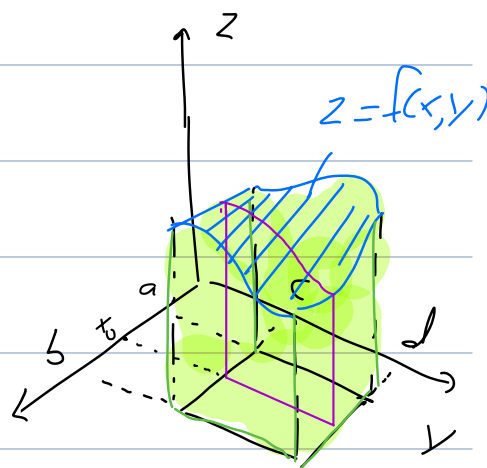
5.1 Εισαγωγή στα διπλά ολοκληρώματα

Έστω συνεχής συνάρτηση δύο μεταβ. $f(x, y)$ με πεδίο ορισμού $(x, y) \in R = \underbrace{[a, b]}_x \times \underbrace{[c, d]}_y \subset \mathbb{R}^2$ ορθογώνιο

Αν $f(x, y) \geq 0$ τότε γρ. παράσταση:

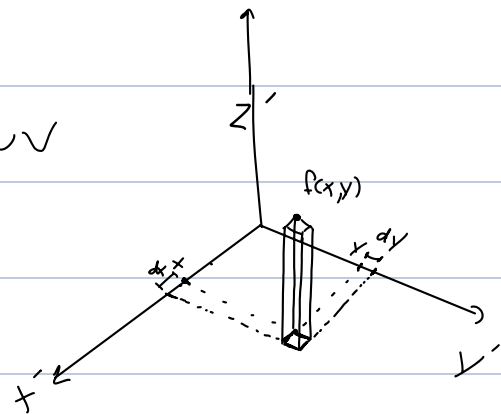
Σε αναλογία με αυτό ολοκληρώμα,

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \text{όγκος πάνω από } R \\ \text{και κάτω από την επιφάνεια } f(x, y)$$



«Αθροισμα» στοιχειωδών όγκων

$$dV = f(x, y) dx dy$$



Πώς υπολογίζεται στην πράξη;



$$\int_c^d f(x_0, y) dy = \text{εμβαδο διατομής επιπέδου } x = x_0$$

$$\Rightarrow \iint_R f(x, y) dx dy = \text{όγκος} = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx$$

όγκος "φύλας", μήκος dx

Διαδοχικό ολοκλήρωμα:

1. Ολοκλήρωση ως προς y **θεωρώντας x σταθερό**

Αποτέλεσμα δεν εξαρτάται πλέον από το y

2. Ολοκλήρωση ως προς x

Αναλογως η προκύπτει να θεωρήσουμε διατομές
στη ένταση $y = y_0$

$$\Rightarrow \iint_R f(x, y) dx dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy$$

Οι δύο διαδοχικές βήτες ολοκλήρωσης πρέπει να δίνουν το ίδιο αποτέλεσμα: **Θεώρημα Fubini**

Παράδειγμα 5.1.3: Για $R = [-1, 1] \times [0, 1]$, υπολογίστε

$$\begin{aligned} I &= \iint_R (x^2 + y^2) dx dy \\ &= \int_0^1 \left[\int_{-1}^1 (x^2 + y^2) dx \right] dy = \int_0^1 \left[\frac{x^3}{3} + y^2 x \right]_{-1}^1 dy \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{3} + y^2 + \frac{1}{3} + y^2 \right) dy = \int_0^1 \left(\frac{2}{3} + 2y^2 \right) dy \\ &= \left[\frac{2}{3} y + \frac{2}{3} y^3 \right]_0^1 = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Αντίστροφη φορά ολοκλήρωσης :

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{-1}^1 \left[\int_0^1 (x^2 + y^2) dy \right] dx = \int_{-1}^1 \left[xy + \frac{y^3}{3} \right]_0^1 dx \\
 &= \int_{-1}^1 \left(x^2 + \frac{1}{3} \right) dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x}{3} \right]_{-1}^1 = \frac{4}{3}
 \end{aligned}$$

Πράγματι δίνει ίδιο αποτέλεσμα.

Άσκησης για επόμενη φορά : υπολογίστε Μ.Τ. 5.1.1

$$(α) \int_0^1 \int_0^1 (1 - x^3 + xy) dx dy$$

$$(β) \int_0^{\pi/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x \sin y dx dy$$

$$(γ) \int_1^2 \int_2^4 \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) dx dy$$

$$(δ) \int_0^{\pi/4} \int_0^{\pi/4} \frac{\tan x}{\cos^2 x} dx dy$$

11
Θεώρημα Fubini: Αν $f: \mathbb{R} = [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$

- **φραγμένη**: $\exists$ αριθμός $M > 0$ έτσι ώστε
- $M < f(x, y) < M \quad \forall (x, y)$ στο πεδίο ορισμού της.

- **δ्वे-ηαντω συνεχής**: Το σύνολο των σημείων αβσέχιας της f έχει μηδενικό εμβαδό (ακολουθεί παραδειγμα)

Τότε

$$\iint_{\mathbb{R}} f(x, y) dx dy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{F(x)}$

αλλάει []

επειδή ανατρίβονται

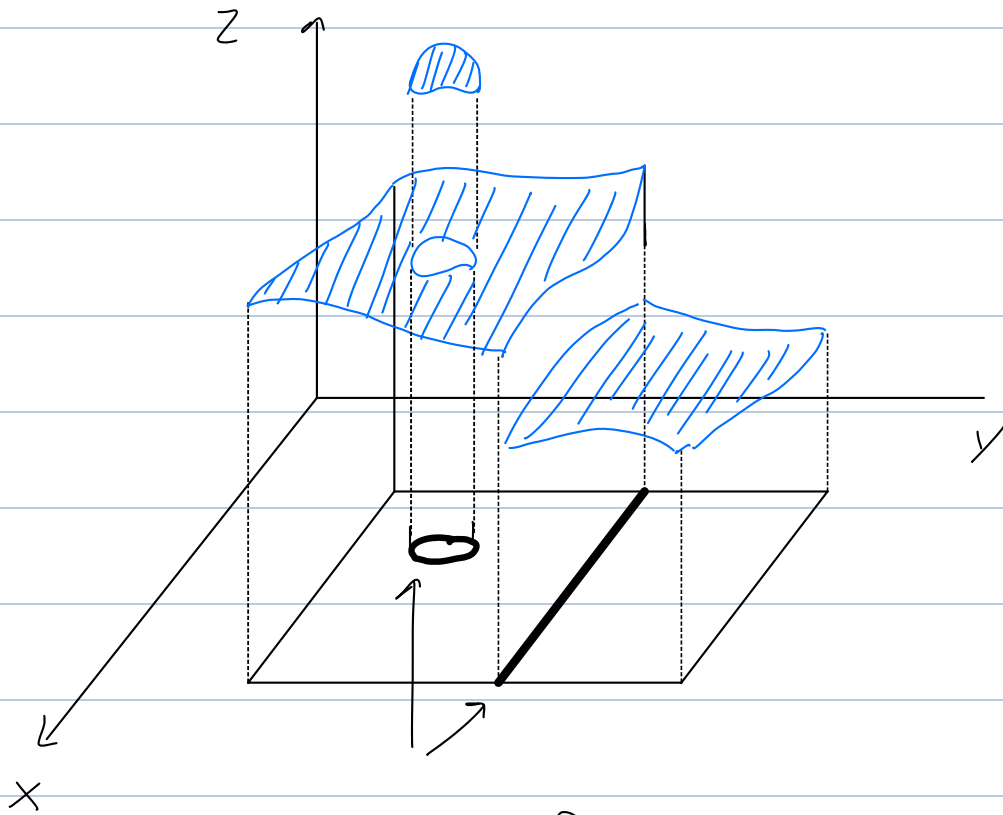
$$= \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{G(y)}$

μπορεί να υπολογιστεί ως διαδοχικά
απλά ολοκληρώματα.

- ! Σε πολλαπλές περιπτώσεις, μια σειρά είναι
πολύ ευκολότερη της αλυσ. (πιθανότατα προεκτείνεται)

Παράδειγμα σχεδόν-γλυτού συνεχώς συνάρτησης 12



ακονέχειες της f : μονοδιαστάτες καμπύλες
μνδενικού εμβαδού.

Επίλυση ασκήσεων προηγμένου μαθήματος

✓νοηλογιστέ :

$$α) \int \sin^4 x dx = \int (\sin^2 x)^2 dx = \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^2 dx$$

Χρησιμοποιούμε ταυτότητες

$$= \int \frac{1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x}{4} dx$$

Επιπλέον έχουμε :

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

$$= \frac{1}{4} \int \left(1 - 2\cos 2x + \frac{1 + \cos 4x}{2} \right) dx$$

$$= \frac{1}{8} \int (3 - 4\cos 2x + \cos 4x) dx$$

$$= \frac{1}{8} \left(3x - 2 \sin 2x + \frac{\sin 4x}{4} \right)$$

όπως φαίνεται χρειάζεται.

Ίδια μέθοδος και για $\int \sin^m x \cos^n x dx$ με m, n άρτια

$$b) \int \sin^3 x \cos^4 x dx = \int \cos^4 x (-\sin^2 x) (-\sin x dx)$$

Αντικατάσταση: $u = \cos x \quad = \int \cos^4 x (-1 + \cos^2 x) (-\sin x dx)$

$$\Rightarrow du = -\sin x dx$$

$$= \int u^4 (-1 + u^2) du$$

$$= \int (-u^4 + u^6) du = -\frac{u^5}{5} + \frac{u^7}{7}$$

$$= -\frac{\cos^5 x}{5} + \frac{\cos^7 x}{7}$$

Ίδια μέθοδος για $\int \sin^m x \cos^n x dx$ με m ή n περιττό.

$$g) \int_1^2 \int_2^4 \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) dx dy$$

$$= \int_1^2 \left[\frac{x}{2y} + \ln x y \right]_2^4 dy = \int_1^2 \left(\frac{16}{2y} + 2 \ln 2 y - \frac{4}{2y} - \ln 2 y \right) dy$$

$$= \int_1^2 \left(\frac{6}{y} + (\ln 2) y \right) dy = \left[6 \ln y + \ln 2 \frac{y^2}{2} \right]_1^2$$

$$= 6 \ln 2 + \ln 2 \cdot 2 - 0 - \frac{\ln 2}{2} = \frac{15}{2} \ln 2$$

5.2 Ορισμός Σινητού ολοκληρώματος επί ορθογωνίου

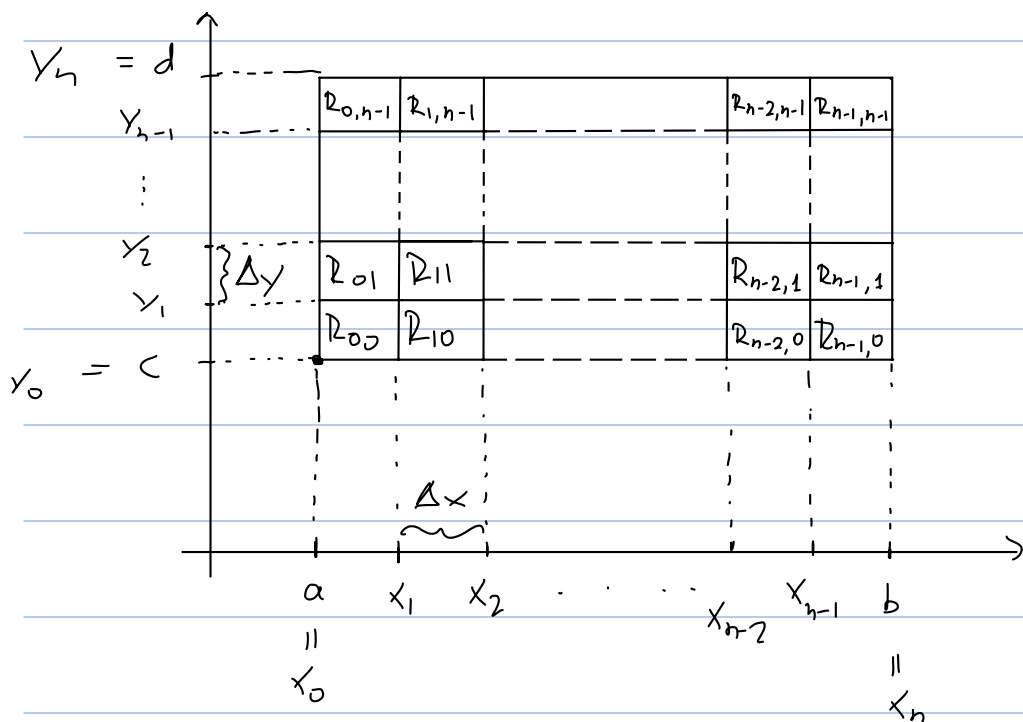
$$R = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2 \text{ ορθογώνιο}$$

Κατασκευή διαμέρισης τμήσης η του R :

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b \quad \text{ισομήχοντα} \Rightarrow \Delta x_i = x_{j+1} - x_j = \frac{b-a}{n}$$

$$c = y_0 < y_1 < \dots < y_n = d \quad \text{ισομήχοντα} \Rightarrow \Delta y_i = y_{k+1} - y_k = \frac{d-c}{n}$$

$R_{jk} := [x_j, x_{j+1}] \times [y_k, y_{k+1}]$, $j, k = 0, 1, \dots, n-1$: n^2 ορθογώνια
του οποίων η ένωση στο R , με εμβαδό $\Delta A = \Delta x \Delta y$



Έστω $(x, y) = \zeta_{jk} \in R_{jk}$ τυχαίο σημείο του R_{jk}

και

$$S_n := \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} f(\vec{\zeta}_{jk}) \Delta x \Delta y \quad \text{αθροίσμα Riemann}$$

μιας συνάρτησης $f(x,y)$

Ορισμός: f **ομοκλήσιμη** **επὶ τοῦ $\mathbb{R}$** αν
υπάρχει το όριο $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ και είναι ανεξάρτητο

απὸ τὴν ἐπιλογή των σημείων $\vec{\zeta}_{jk}$. Τότε

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n =: \iint_{\mathbb{R}} f(x,y) dx dy =: \iint_{\mathbb{R}} f(x,y) dy dx$$

$$=: \iint_{\mathbb{R}} f(x,y) dA$$

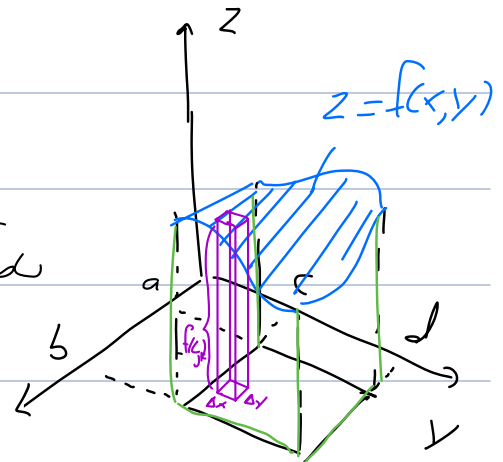
λέγεται το **διπλό ομοκλήσιμα** τῆς f ἐπὶ τοῦ $\mathbb{R}$

Διαθεστική ερμηνεία:

$$f(\vec{\zeta}_{jk}) \Delta x \Delta y = \Delta V \quad \text{όγκος παραλληλεπίπεδου}$$

$$\sum \sum \Delta V \approx \text{συνολικός όγκος}$$

$$\xrightarrow{\text{συνεχές α-αριθμο}} \iiint dV$$



Πότε μια συνάρτηση είναι ομοκληρώσιμη;

Θεώρημα: Έστω $f: \mathbb{R} = [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$

φραγμένη και ομοκλήτων-παντού συνεχής (ορίστηκε
πρην. φορά). Τότε f ομοκληρώσιμη.

5.3 Διηρώ ομοκλήτων επί γενικότερων χωρίων

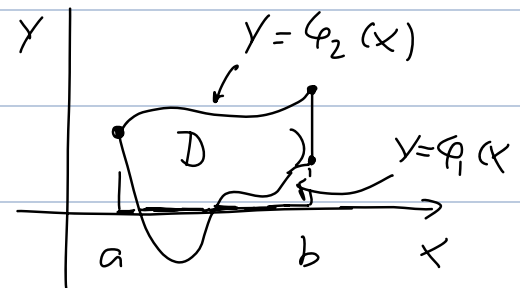
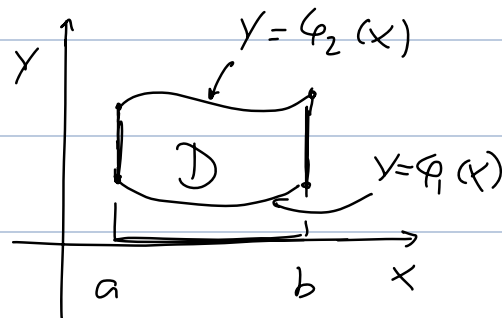
Ορισμός: Ένα χωρίο D του επιπέδου λέγεται **y-ορθό** αν
γράφεται ως

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$$

όπου $\varphi_1, \varphi_2: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις με $\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x)$ για $x \in [a, b]$

Παραδείγματα:

y-ορθά χωρία

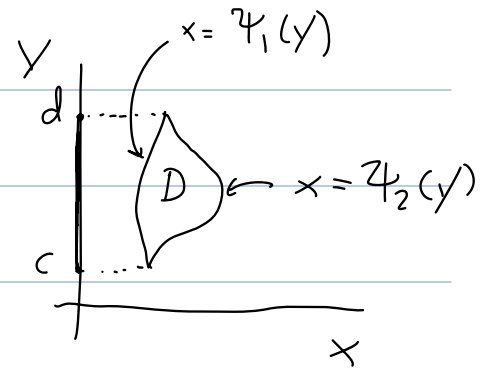
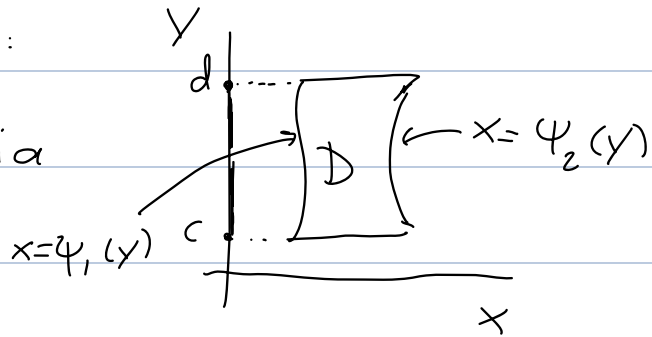


Ομοίως, D **x-ορθό** αν $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d, \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\}$

όπου $\psi_1, \psi_2: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις με $\psi_1(y) \leq \psi_2(y)$ για $y \in [c, d]$

Παραδείγματα:

x -αντί χωρία



Αντί χωρίο: x -αντί και y -αντί

Στοιχειώδες χωρίο: x -αντί ή y -αντί

Ερώτηση ποιότητας προηγ. φαθήματος: } παράδειγμα συνάρτησης

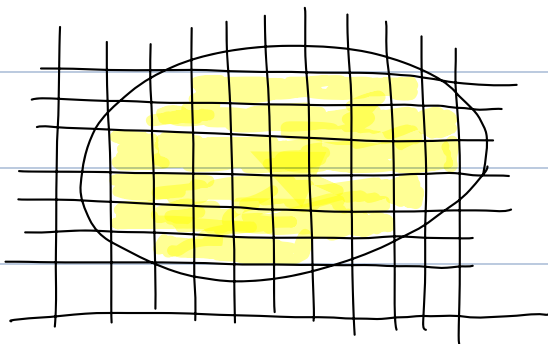
όπου $\lim_{h \rightarrow \infty} S_n$ υπάρχει, αλλά δεν είναι μονόδικό;

Ναι : $f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{αν } x, y \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}, D = [0, 1] \times [0, 1]$

Συνέχεια: 5.3 Διηρώ ολοκλήρωμα επί γενικότερων χωρίων

Παράδειγμα | καίσιος δίσκος $x^2 + y^2 \leq c^2$. Γράφεται ως
 ορθού χωρίου $\left\{ (x, y) : -c \leq x \leq c, -\sqrt{c^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{c^2 - x^2} \right\}$ y -ορθό
 ή $\left\{ (x, y) : -c \leq y \leq c, -\sqrt{c^2 - y^2} \leq x \leq \sqrt{c^2 - y^2} \right\}$ x -ορθό
 $\Rightarrow$ ορθό χωρίο.

Το διηρώ ολοκλήρωμα επί του στοιχ. χωρίου D ορίζεται
 διακρίνοντας το, σε πλήρη αναγκία με τον ορισμό επί ορθογωνίου



Ισοδύναμα, αν ορθογώνιο R περιέχει D
 και $f^*(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{αν } (x, y) \in D \\ 0 & \text{αν } (x, y) \in R \setminus D \end{cases}$
 με $f(x, y)$ φραγμένη και σχεδόν-παραυ
 συνεχή, τότε

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_R f^*(x, y) dx dy$$

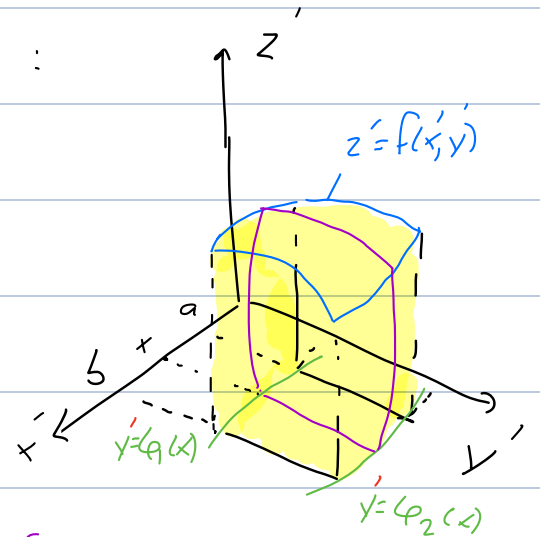
Έστω $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ πραγματική και ορθογώνιο-ημάρτιου συνεχής. Τότε

$$\iint_D f(x,y) dx dy = \begin{cases} \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y) dy \right] dx & \text{αν } D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\} \\ & (y\text{-ορθογ.}) \\ \int_c^d \left[\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y) dx \right] dy & \text{αν } D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d, \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\} \\ & (x\text{-ορθογ.}) \end{cases}$$

Υπολογίζεται ως διεδοχικά απλά ολοκληρώματα!
(Συνήθως αγκύρες [] αναβοσβήνουν).

Όπως και για ορθογώνια χωρία,

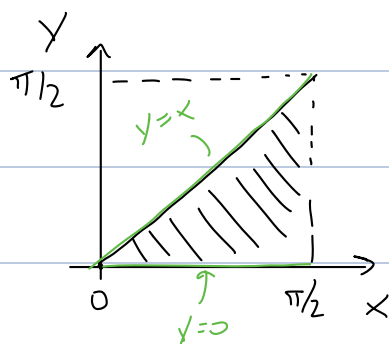
$$\iint_D f(x,y) dx dy = \text{όγκος}$$



και $\left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y) dy \right] = \text{επιφανειακή διατομή της επιφάνειας } x=x$

Παράδειγμα MT5.3.1: $\int_{x \in \text{διαστήτ}}$ το χωρίο $D = \{(x,y) : 0 \leq x \leq \pi/2, 0 \leq y \leq x\}$

και υπολογιστέ $I = \iiint (x^3 y + \cos x) dx dy$



$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi/2} \int_0^x (x^3 y + \cos x) dy dx \\ &= \int_0^{\pi/2} \left[x^3 \frac{y^2}{2} + \cos x y \right]_0^x dx = \int_0^{\pi/2} \left(\frac{x^5}{2} + x \cos x \right) dx \end{aligned}$$

$$\int x \cos x dx = \int x (\sin x)' dx = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x$$

$$\Rightarrow I = \left[\frac{x^6}{12} + x \sin x + \cos x \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi^6}{12 \cdot 64} + \frac{\pi}{2} - 1 = \frac{\pi^6}{768} + \frac{\pi}{2} - 1$$

Επίσης: Το D είναι και x-απλό;

Ναι! $D = \{ 0 \leq y \leq \pi/2, y \leq x \leq \pi/2 \}$

Υπολογισμός I με αντίστροφη σειρά ολοκλήρωσης (ως x-απλό)

$$I = \int_0^{\pi/2} \int_y^{\pi/2} (x^3 y + \cos x) dx dy = \int_0^{\pi/2} \left[\frac{x^4 y}{4} + \sin x \right]_y^{\pi/2} dy$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left(\frac{\pi^4}{4 \cdot 16} y + 1 - \frac{y^5}{4} - \sin y \right) dy$$

$$= \left[\frac{\pi^4}{64} \frac{y^2}{2} + y - \frac{y^6}{24} + \cos y \right]_0^{\pi/2} =$$

$$= \frac{\pi^6}{64 \cdot 8} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi^6}{24 \cdot 64} + 0 - 1 = \frac{\pi^6}{768} + \frac{\pi}{2} - 1 \quad \text{'ίδιο αποτέλεσμα} \checkmark$$

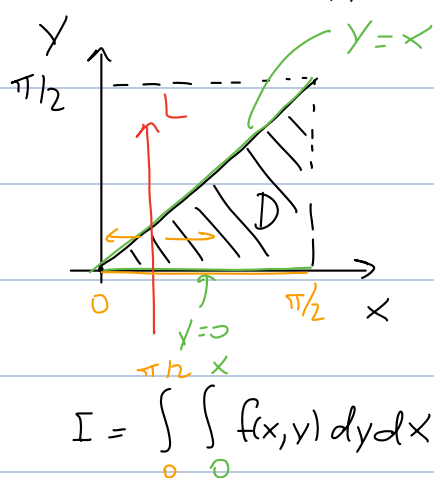
Εύρεση ορίων ολοκλήρωσης!

Ολοκλήρωση πρώτα ως προς y (y -συνόχιο χωρίο)

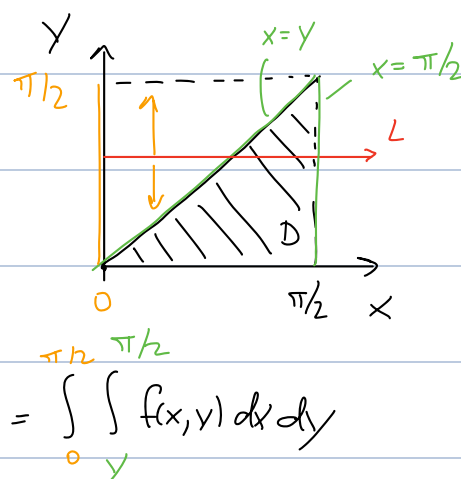
1. Σχεδιάζουμε χωρίο D
2. Τραβήξτε κατακόρυφη ευθεία L που τέμνει το D με κατεύθυνση τα θετικά y . Αν εισέρχεται από κορύνη $y = \varphi_1(x)$ και εξέρχεται από κορύνη $y = \varphi_2(y)$, αυτά είναι τα κάτω και άνω όρια ολοκλήρωσης του y
3. Επιλέγουμε όρια ολοκλήρωσης x που περιέχουν όλες τις ευθείες L που δέχονται στο D .

Εφαρμογή στο παρ. παράδειγμα 5.3.1

ως y -συνόχιο χωρίο



ως x -συνόχιο χωρίο (βλ. παρακάτω)



Ολοκλήρωση πρώτα ως προς x (x-σητά χωρίο)

Στο βήμα 2 χρησιμοποιούμε οριζόντιες ευθείες L ,
 καμπύλες $x = \phi_1(y)$ και $x = \phi_2(y)$ τα όρια $\int$ του x .
 Στο βήμα 3ότες οι ευθείες L δίνουν όρια $\int$ του y .

Αν η L πάρει την ίδια καμπύλη πάνω από μια φορά, δεν
 μπορούμε να ολοκληρώσουμε το D με αυτή τη σειρά. Δοκιμάσουμε
 αντίστροφη σειρά ή χωρίσουμε το D σε στοιχειώδη χωρία.

Άσκησης για επόμενη φορά

1. Υπολογίστε $I = \int_1^2 \int_{x^2}^{x^3} y \, dy \, dx$ + σχεδιάστε χωρίο D .

Αν D αητο, υπολογίστε το I και με την αντίστρ. φρα
 ολοκλήρωσης.

2. Υπολογίστε τον όγκο του στερεού που περικλείεται
 από παραβολοειδές $z = f(x, y) = x^2 + y^2$, το τριγωνικό
 χωρίο με κορυφές $(0, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ και $(2, 3, 0)$
 σε ευτερογενείς (x, y, z) , και τα τρία επίπεδα που
 διέρχονται από το τριχ. χωρίο και είναι παράλληλα του z -αξονα

Ιδιότητες διηλεκτρικών ολοκληρωμάτων

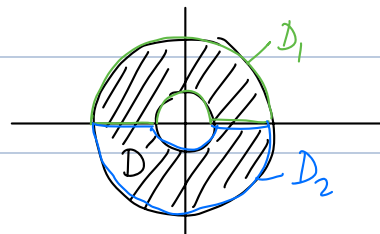
1. Γραμμικότητα:
$$\iint_D (f(x,y) + g(x,y)) dx dy = \iint_D f(x,y) dx dy + \iint_D g(x,y) dx dy$$

2. Ομογένεια:
$$\iint_D c f(x,y) dx dy = c \iint_D f(x,y) dx dy$$

3. Μονοτονία: Αν $f(x,y) \leq g(x,y)$,
$$\iint_D f(x,y) dx dy \leq \iint_D g(x,y) dx dy$$

4. Προσθετικότητα: Αν $D = D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_m$ με $D_i \cap D_j = \emptyset \neq i, j$,

$$\iint_D f(x,y) dx dy = \sum_{i=1}^m \iint_{D_i} f(x,y) dx dy$$



Μας επιτρέπει να υπολογίσουμε $\iint$ εν. της ουσίας για οποιαδήποτε χωρίο D , αφού το αναλύουμε σε στοιχειώδη χωρία D_i .

5. Θεώρ. μέσης τιμής: Αν f συνεχής στο στοιχ. χωρίο D , τότε

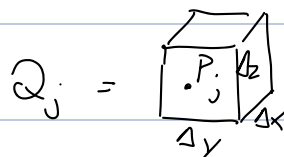
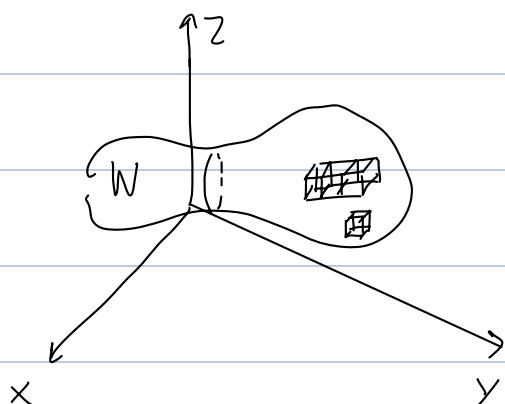
$$\exists (x_0, y_0) \in D \text{ έτσι ώστε } f(x_0, y_0) = \frac{\iint_D f(x,y) dx dy}{\iint_D 1 dx dy} \left. \vphantom{\frac{\iint_D f(x,y) dx dy}{\iint_D 1 dx dy}} \right\} \begin{array}{l} \text{μέση τιμή} \\ \text{της } f \text{ στο } D \end{array}$$

εμβαδόν του $D \rightarrow \iint_D 1 dx dy$

5.3 Τρίτη αντικατάσταση

Απαιτείται σε πολλές φυσικών προβλημάτων, π.χ. υπολογισμός καδρς τριδιάστατου αντικειμένου ή μεταβολήτων πυκνότητας.

Έστω τριδιάστατο χώρο $W \subset \mathbb{R}^3$ και συνεχής συνάρτηση $f: W \rightarrow \mathbb{R}$



Επιτερίζοντας το W σε μικρούς κύβους Q_j με όγκο $\Delta x \Delta y \Delta z$, το τρίτη αντικατάσταση $\iiint_W f(x, y, z) dx dy dz$ ορίζεται ως το όριο $\Delta x \Delta y \Delta z \rightarrow 0$ της ποσότητας $\sum_j f(P_j) \Delta x \Delta y \Delta z$ για κάποιο σημείο $P_j \in Q_j$,

εφόσον υπάρχει και είναι ανεξάρτητο της επιλογής των P_j .

Έχουν ίδιες ιδιότητες με τα διητά (και αητά) $\int$, π.χ. γραμμικότητα, προσθετικότητα κτλ.

Κοινοτικό Στοιχείο αντικειμένων: κυβικό χωρίο

Ομοίως με τα διττά αντικείμενα, αναλογικά σε δισδιάστατα αντικείμενα όταν $f(x,y,z)$ συνεχής και $W = [a,b] \times [c,d] \times [p,q]$:

$$\begin{aligned} \iiint_W f(x,y,z) dx dy dz &= \int_p^q \int_c^d \int_a^b f(x,y,z) dx dy dz = \int_p^q \int_a^c \int_b^d f(x,y,z) dy dx dz \\ &= \dots \text{ για όλες τις 6 κατατάξεις} \end{aligned}$$

Αντίστροφο της βέβαιης αντικειμενότητας. [Γενικεύει για κάθε διαστάση n]

Παράδειγμα ΜΤ 5.5.2. Για $W = [0,1] \times [0,1] \times [0,1]$

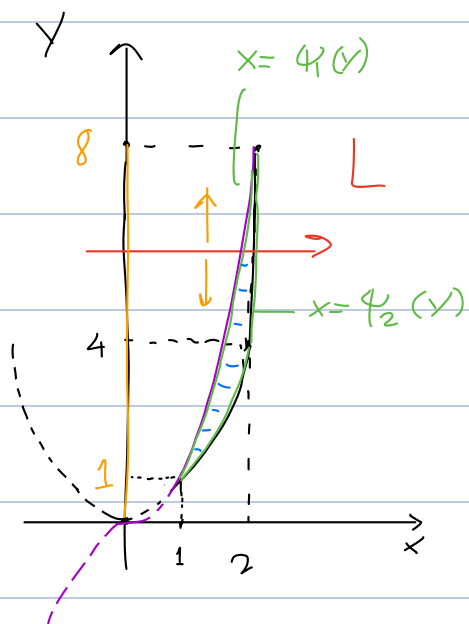
υπολογιστέ

$$\begin{aligned} \int_W e^{x+y+z} dx dy dz &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 e^{x+y+z} dx dy dz = \int_0^1 \int_0^1 [e^{x+y+z}]_0^1 dy dz \\ &= \int_0^1 \int_0^1 (e^{1+y+z} - e^{y+z}) dy dz = \int_0^1 [e^{1+y+z} - e^{y+z}]_0^1 dz \\ &= \int_0^1 [e^{2+z} - e^{1+z} - e^{1+z} + e^z] dz \\ &= [e^{2+z} - 2e^{1+z} + e^z]_0^1 = [e^2(1-e)^2]_0^1 \\ &= (1-e)^1 \cdot (e-1) = (e-1)^3 \end{aligned}$$

Επίλυση άσκησης προηγούμενου ταθμήματος

Υπολογιστέ $I = \int_1^2 \int_{x^2}^{x^3} y dy dx$ + εξετάστε χωρίο D .

Αν D ατζό, υπολογιστέ το I και τη τnv αντίστρ. φρα ολολκτρηωόν.



Πρωτη $\int$ ως προς $y \Rightarrow y$ -ατζό.

Αλλά και x -ατζό!

$$y \in [1, 8]$$

$$\phi_1(y) \leq x \leq \phi_2(y)$$

$$\text{kt } \phi_1(y) = y^{1/3} \quad y = x \Rightarrow x = y^{1/3}$$

$$\phi_2(y) = \begin{cases} y^{1/2} & y \leq 4 \\ 2 & y \geq 4 \end{cases}$$

Ολολκτ. ως y -ατζό :

$$I = \int_1^2 \left(\frac{y^2}{2} \Big|_{x^2}^{x^3} \right) dx = \int_1^2 \frac{x^6 - x^4}{2} dx = \frac{1}{2} \left(\frac{x^7}{7} - \frac{x^5}{5} \right) \Big|_1^2$$

$$= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{128}{7} - \frac{32}{5} \right) - \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{5} \right) \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{127}{7} - \frac{31}{5} \right] = \frac{1}{2} \frac{5 \cdot 127 - 7 \cdot 31}{35} = \frac{1}{2} \frac{635 - 217}{35} =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{418}{35} = \frac{209}{35}$$

Ολοκλ. ως x-συνάρτ.

$$I = \int_1^8 \int_{4_1(y)}^{4_2(y)} y dx dy = \int_1^4 \int_{y^{1/3}}^{y^{1/2}} y dx dy + \int_4^8 \int_{y^{1/3}}^2 y dx dy$$

$$= \int_1^4 y [x]_{y^{1/3}}^{y^{1/2}} dy + \int_4^8 y [x]_{y^{1/3}}^2 dy$$

$$= \int_1^4 (y^{3/2} - y^{4/3}) dy + \int_4^8 (2y - y^{4/3}) dy$$

$$= \left[\frac{2}{5} y^{5/2} - \frac{3}{7} y^{7/3} \right]_1^4 + \left[y^2 - \frac{3}{7} y^{7/3} \right]_4^8$$

$$= \frac{2}{5} \cdot 2^5 - \frac{3}{7} \cdot 4^{7/3} - \left(\frac{2}{5} - \frac{3}{7} \right) + 64 - \frac{3}{7} \cdot 2^7 - (16 - \frac{3}{7} \cdot 4^{7/3})$$

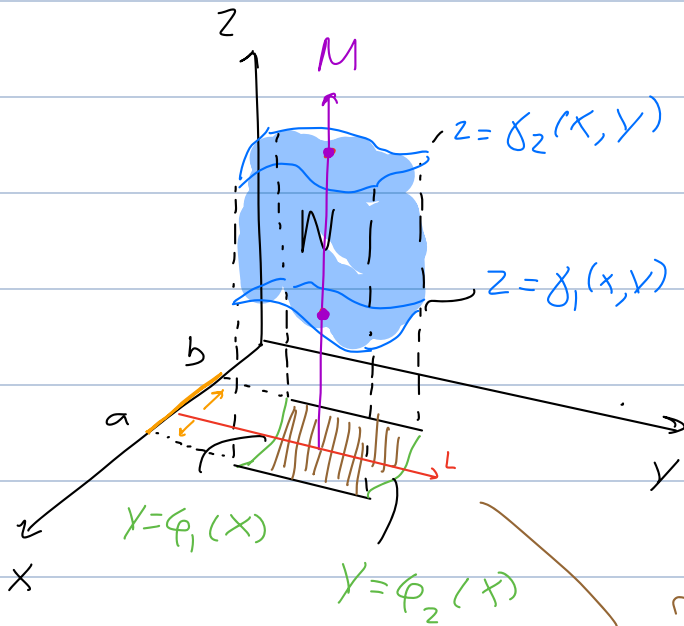
$$= \dots = \frac{209}{35} \quad \checkmark$$

Συμπέρασμα: Μια σειρά ολοκληρώσεων μπορεί να είναι πολύ ευκολότερη της άλλης!

Αντίστοιχα το χωρίο για $x \in [0, 2]$ δεν είναι x-συνάρτ., αλλά μπορεί να τεμαχιστεί σε δύο x-συνάρτ. ή $x \in [0, 1]$ και $x \in [1, 2]$

Τεχνική ολοκλήρωσης σε στρώσιμα χωρία

Όμοιος με διπλά ολοκληρώματα, μπορούμε να γενικεύσουμε το χωρίο ολοκλήρωσης ώστε να περιλαμβάνει ην τριπλές επιφάνειες. $\Pi.X.$



y-συντό χωρίο W:

$$((x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ τέ })$$

$$a \leq x \leq b$$

$$\phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x) \text{ και}$$

$$\delta_1(x, y) \leq z \leq \delta_2(x, y)$$

η περιοχή $\delta_1 \delta_2$
στο επίπεδο xy

$$\iiint_W f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} \int_{\delta_1(x, y)}^{\delta_2(x, y)} f(x, y, z) dz dy dx$$

Αντίστοιχα, x-συντό χωρίο για ολοκλήρωση με σειρά $dz dx dy$
(και συναρτήσεις των (x, z) ή (y, z) για άλλες σειρές)
Αντικαθιστούμε κατά τα χωρία στρώσιμα

Μεθοδός καθορισμού ορίων ολοκλήρωσης

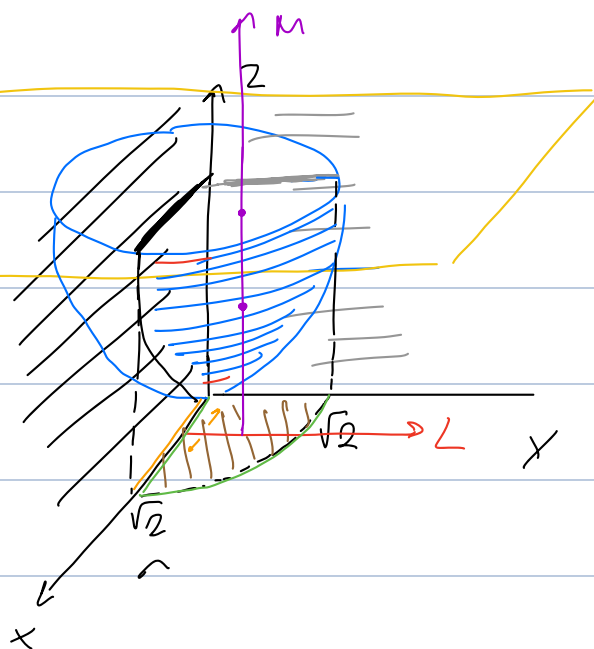
1. Ξεδιασώχτε περιοχή W και προβολή της στο xy επίπεδο.
όπως παραπάνω (για y -από χώρο, ανατοχώς το υποβόθρο)
2. Τραβήξτε γραμμή M από προβολή προς τα θάλα z .
Εισέρχεται στο W από $\gamma_1(x, y)$ και εξέρχεται από $\gamma_2(x, y)$

$\swarrow$ όριο ολοκλήρωσης z
3. Τραβήξτε γραμμή L στο επίπεδο xy // προς τα y ,
που βγαίνει την M . Μηνάινει στην προβολή από
 $\varphi_1(x)$ και βγαίνει από $\varphi_2(x)$

$\swarrow$ όριο ολοκλήρωσης x
4. Βρίσκουμε το διάστημα στον άξονα των x
που περικλείει όλες τις γραμμές L που διεντερεύουν
την προβολή

$\swarrow$ όριο ολοκλήρωσης x

Παράδειγμα με SSS: Έστω W η περιοχή που περικλείεται
από τα επίπεδα $x=0$, $y=0$, $z=2$, και την
επιφάνεια $z=x^2+y^2$ στον υποχώρο $x \geq 0, y \geq 0$.
Ξεδιασώχτε την περιοχή και υπολογίστε $\iiint_W x \, dx \, dy \, dz$



Τόποι $z=2$ και $z=x^2+y^2$
 κύκλος $x^2+y^2=2$ με ακτίνα $\sqrt{2}$
 Περιγράφει περιοχή W στο xy

Με βάση την έκθεση που περιγράφεται ακριβώς παραπάνω,

$$\left. \begin{aligned} \delta_1(x,y) &= x^2+y^2, \quad \delta_2(x,y) = 2 \\ \varphi_1(x) &= 0, \quad \varphi_2(x) = \sqrt{2-x^2} \\ 0 &\leq x \leq \sqrt{2} \end{aligned} \right\} I = \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{2-x^2}} \int_{x^2+y^2}^2 x \, dz \, dy \, dx$$

$$\Rightarrow I = \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{2-x^2}} x(z) \Big|_0^2 \, dy \, dx = \int_0^{\sqrt{2}} x \int_0^{\sqrt{2-x^2}} (2-x^2-y^2) \, dy \, dx$$

$$= \int_0^{\sqrt{2}} x \left[(2-x^2)y - \frac{y^3}{3} \right]_0^{\sqrt{2-x^2}} \, dx = \int_0^{\sqrt{2}} x \left[(2-x^2)\sqrt{2-x^2} - \frac{(2-x^2)^{3/2}}{3} \right] \, dx$$

$$= \frac{2}{3} \int_0^{\sqrt{2}} x(2-x^2)^{3/2} \, dx = \frac{2}{3} \int_0^{\sqrt{2}} \left(\frac{2}{5} (2-x^2)^{5/2} \right)' \, dx$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} \cdot 2^{5/2} = \frac{8\sqrt{2}}{15}$$

Άσκησης για την επόμενη φορά

Υπολογίστε $\iiint_W dx dy dz$ όπου W χωρίο που

1. περιβάλλεται από κύλινδρο $x^2 + y^2 = 4$ και

τα επίπεδα $y = 0$, $x = 0$, $z = 0$, και $x + y + z = 5$

και $x, y, z \geq 0$.

2. περιβάλλεται από τις επιφάνειες $z = x^2 + 3y^2$,

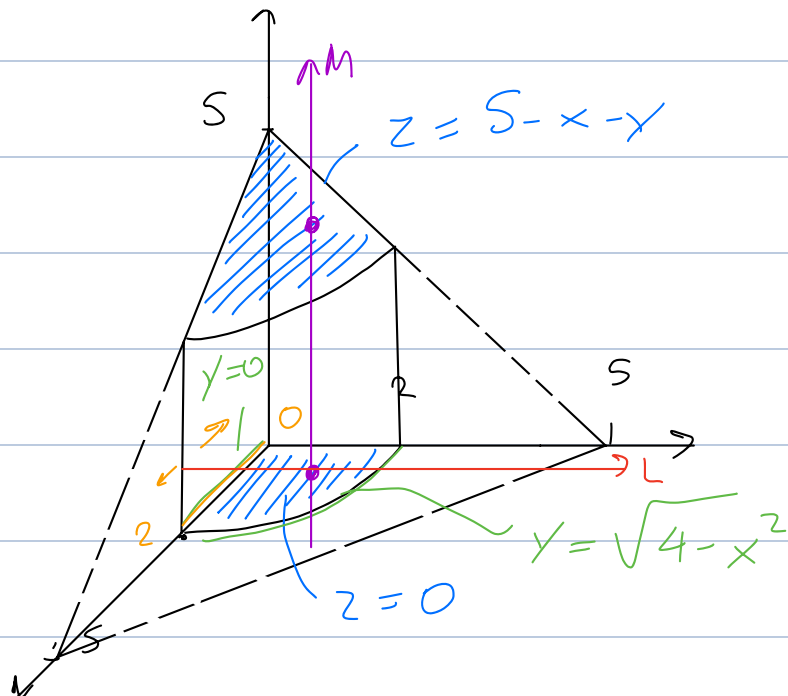
$$z = 8 - x^2 - y^2$$

Σχεδιάστε το χωρίο πριν τον υπολογισμό.

Επιλυση άσκησης γραμμ. βαθμολογίας

Υπολογίστε $\iiint_W dx dy dz$ όπου W χωρίο που
περικλείεται από κύλινδρο $x^2 + y^2 = 4$ και

τα επίπεδα $y = 0$, $x = 0$, $z = 0$, και $x + y + z = 5$
ή $x, y, z \geq 0$. Σχεδιάστε χωρίο πριν τον υπολογισμό



$$\begin{aligned} \int dx dy dz &= \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \int_0^{5-x-y} dz dy dx \\ &= \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} [z]_0^{5-x-y} dy dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} (5-x-y) dy dx = \int_0^2 \left[(5-x)y - \frac{y^2}{2} \right]_0^{\sqrt{4-x^2}} dx \\ &= \int_0^2 \left[(5-x)\sqrt{4-x^2} - \frac{4-x^2}{2} \right] dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^2 \left[(5-x)\sqrt{4-x^2} - \frac{4-x^2}{2} \right] dx = \left[\frac{(4-x^2)^{3/2}}{3} - 2x + \frac{x^3}{6} \right]_0^2 + 5 \int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx \end{aligned}$$

$$\int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx \stackrel{x=2\sin\theta}{=} \dots = \pi \quad \left| \quad = 0 - 4 + \frac{8}{6} - \frac{8}{3} + 5\pi = 5\pi - \frac{16}{3} \right.$$

6.1 Αλλαγές μεταβλητών σε πολλαπλά ολοκληρώματα ή μετασχηματισμοί (δυνατάχτητων) Αντιστοίχων υπολογισμούς!

Υπενθύμιση: Μονοδιάστατη περίπτωση $\int_c^d f(x) dx$

Έστω αντικείμενη $u \mapsto x(u)$, $u \in [a, b]$ με $x(a)=c$ και $x(b)=d$ (ή αντίστροφα) } $\left. \begin{array}{l} \text{Αλλαγή από} \\ x \text{ σε } u \end{array} \right\}$

$$\int_c^d f(x) dx = \int_{x(a)}^{x(b)} f(x) dx = \int_a^b f(x(u)) \underbrace{\frac{dx}{du}}_{\text{αλλαγή στοιχείου μήκους}} \cdot du$$

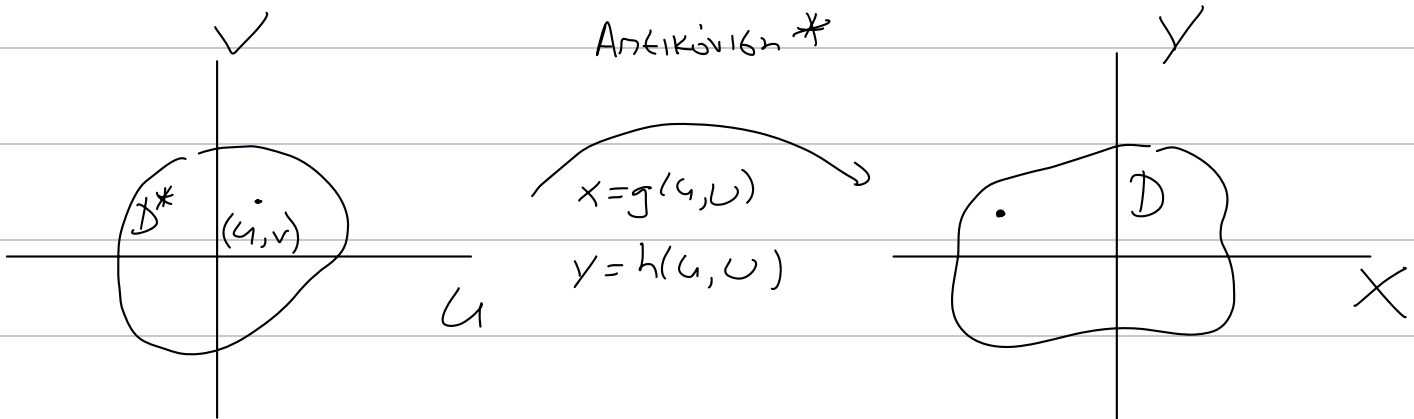
για f συνεχή και $u \mapsto x(u)$ συνεχώς παραγωγίσιμη στο $[a, b]$

Δεν αρκεί να εισαχθεί αντικείμενη στην $f(x)$, χρειαζόμαστε και:

Αλλαγή σε διπλά ολοκληρώματα

Αναλόγως, αλλαγή μεταβλητών:

$$\iint_D f(x, y) dx dy$$



* Πρέπει να είναι "1-1", : (x, y) η τιμή ενός και μόνο (u, v) .
 (αν $g(u, v) = g(u', v')$ και $h(u, v) = h(u', v')$, τότε $u = u'$ και $v = v'$)

Χρησιμοποιώντας παραγοντά ^{ίσω J} που περιγράφει αλλαγές στοιχείου εμβαδού:
 $du dv = J dx dy$

Αναμένουμε ότι J : • Εξαρτάται από τα u, v

• Κατοχράφει στοιχεία μεταβολής = description των 1^{ω} ή παραγών

Πράγματι, θα ενδείξουμε σε επόμενο μάθημα ότι $J = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right|$

όπου $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$ 2x2, αλγεβρική ορίζουσα
 (παραρτίς γενικεύει σε $n \times n$)

Παράδειγμα 2: Αν $f(x, y)$ συνεχής στο D , και μεταβλ.
 $D^* \rightarrow D : x = g(u, v), y = h(u, v)$, "1-1", και συνεχώς παραγωγίσιμος
 στο εσωτερικό του D^* . Τότε

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D^*} f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv$$

Παράδειγμα: Αλλαγές από καρτεσιανές σε πολικές συντεταγμένες

$$(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = r$$

$$\Rightarrow \iint_D f(x, y) dx dy = \int_{D^*} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta$$

Εξαιρετικά χρήσιμο να το θυμάστε

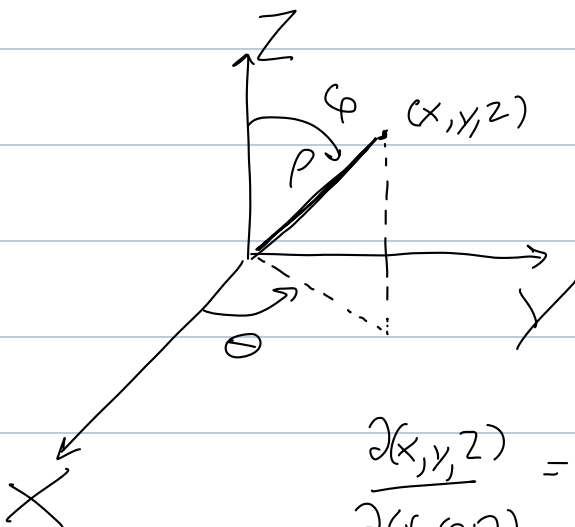
3x3 Ιακωβιανή
ορίσμενα

Αλλάζει σε τριπλά ολοκλήρωμα κατά μήνη αναλογία:

$$\iiint_W f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{W^*} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| du dv dw$$

για "1-1", και συνεχώς διαφορίσιμη απεικόνιση στο W^*
στο W με $(x, y, z) = (x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w))$ (8)

Παράδειγμα: καρτεσιανές σε πολικές συντεταγμένες



$$x = \rho \sin \phi \cos \theta \quad \left| \quad \rho \geq 0 \right.$$

$$y = \rho \sin \phi \sin \theta \quad \left| \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \right.$$

$$z = \rho \cos \phi \quad \left| \quad 0 \leq \phi \leq \pi \right.$$

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \phi, \theta)} = \begin{vmatrix} \sin \phi \cos \theta & \rho \cos \phi \cos \theta & -\rho \sin \phi \sin \theta \\ \sin \phi \sin \theta & \rho \cos \phi \sin \theta & \rho \sin \phi \cos \theta \\ \cos \phi & -\rho \sin \phi & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 & \stackrel{3^{\circ}}{=} \cos \varphi \quad \rho^2 \cos \varphi \sin \varphi \left(\cos^2 \Theta + \sin^2 \Theta \right) - \rho \sin \Theta \quad \rho \left(\sin^2 \varphi \cos^2 \Theta + \sin^2 \varphi \sin^2 \Theta \right) \\
 & = \rho^2 \cos^2 \varphi \sin \varphi + \rho^2 \sin^3 \varphi - \rho^2 \sin \varphi \\
 & \quad \Downarrow
 \end{aligned}$$

$$\iiint_W f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \iiint_{W^*} f(\rho \sin \varphi \cos \Theta, \rho \sin \varphi \sin \Theta, \rho \cos \varphi) \, \rho^2 \sin \varphi \, d\rho \, d\Theta \, d\varphi$$

Εξαιρέτικα χρήσιμο να το θυμόμαστε (9)

Παραδοίως, κυλινδρικές συντεταγμένες = πολικές $\times z$

$$\iiint_W f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \iiint_{W^*} f(r \cos \Theta, r \sin \Theta, z) \, \underbrace{r \, dr \, d\Theta \, dz}_{\text{πολική ιακωβιανή}}$$

6.2 Εφαρμογές

Όγκος, μάζα, κέντρο μάζας

Αν $\delta(x, y, z)$ η πυκνότητα (= μάζα ανά μονάδα όγκου) σώματος που καταλαμβάνει χώρο $W \in \mathbb{R}^3$, τότε

$$\text{όγκος} \quad V = \iiint_W dx \, dy \, dz$$

$$\text{μάζα} \quad M = \iiint_W \delta(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$$

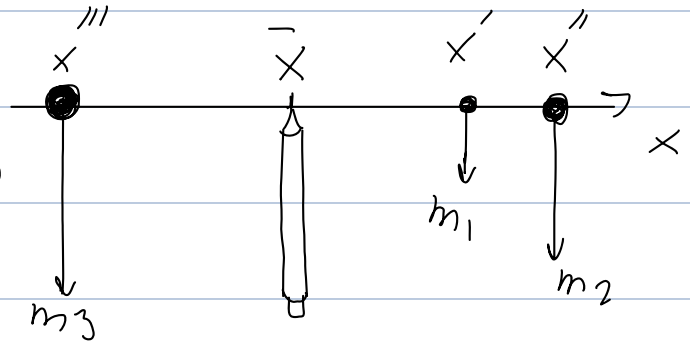
Θέση κέντρου μάζας $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ ή

$$\bar{x} = \frac{\iiint_M x \delta(x, y, z) dx dy dz}{M} \quad \text{και αντίστοιχα} \quad \bar{x} \rightarrow \bar{y} \rightarrow \bar{z} \quad x \rightarrow y \rightarrow z$$

Υπενθύμιση στο ① I : Φυσ. σημασία κέντρου μάζας

i) Σημείο ισορροπίας

$$m_1(x' - \bar{x}) + m_2(x'' - \bar{x}) + m_3(x''' - \bar{x}) = 0$$



ii) Από τακτρία, μπορούμε να θεωρήσουμε φυσ. σύστημα οπτικά στο θέση $\bar{x} \dots$

Παράδειγμα Βρείτε κέντρο βάρους στερεού που βρίσκεται

στην πρώτη στερεά γωνία και περιβάλλεται από

επιπέδα $x=0, y=0, z=0$, κύλινδρο $x^2 + y^2 = a^2$

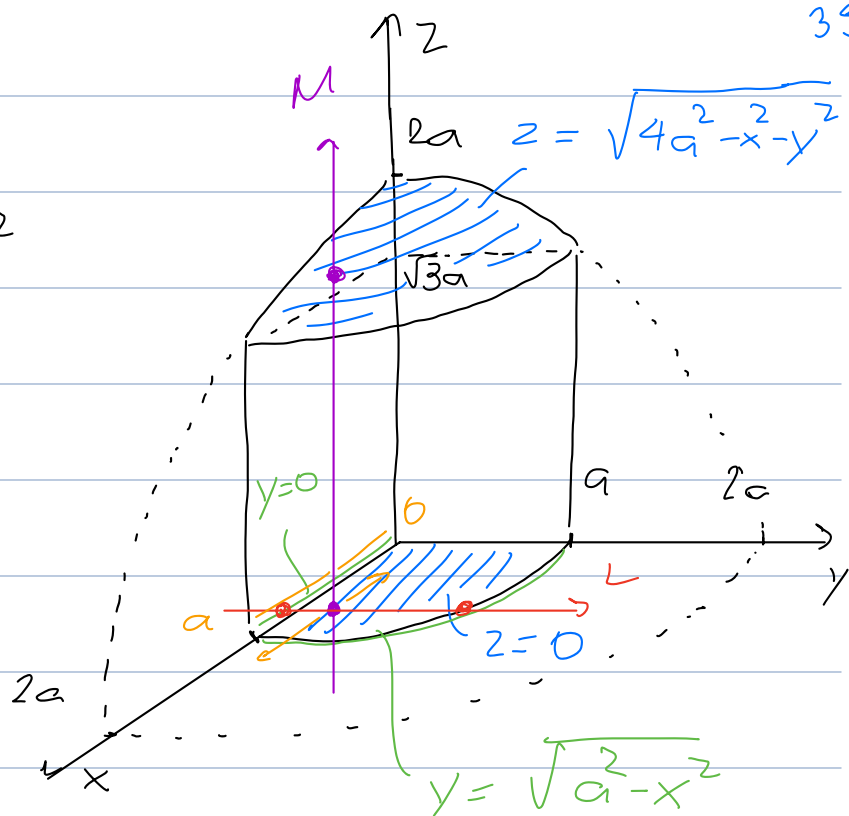
και σφαίρα $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$, όταν στερεό έχει

γυρνότητα $\delta(x, y, z) = z$

κυλινδρικός και σφαίρα

$$\text{τέλνεται όταν } a^2 + z^2 = 4a^2$$

$$\Rightarrow z = \sqrt{3}a$$



$$M = \iiint_W \delta(x, y, z) dx dy dz = \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} \int_0^{\sqrt{4a^2 - x^2 - y^2}} z dz dy dx$$

Σοκρίστητε

Μπορεί να υπολογιστεί κι έτσι, αλλά λόγω συμμετρίας πιο εύκολο σε κυλινδρικές συντεταγ.

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta \Rightarrow \text{χωρίς } 0 \leq x^2 + y^2 \leq a^2, \quad x, y \geq 0$$

$$\Rightarrow 0 \leq r \leq a, \quad \omega \theta, \sin \theta \geq 0$$

$$\Rightarrow 0 \leq r \leq a \quad 0 \leq \theta \leq \pi/2$$

$$\Rightarrow M = \int_0^{\pi/2} \int_0^a \int_0^{\sqrt{4a^2 - r^2}} z r dz dr d\theta = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^a r \left[\frac{z^2}{2} \right]_0^{\sqrt{4a^2 - r^2}} dr$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot \int_0^a r \cdot 4 \frac{a^2 - r^2}{2} dr = -\frac{\pi}{4} \left[(4 \frac{a^2 - r^2}{2})^2 \right]_0^a$$

$$= -\frac{\pi}{16} \cdot \left[(3a^2)^2 - (4a^2)^2 \right] = -\frac{\pi}{16} a^4 (9 - 16)$$

$$M = \frac{7}{16} \pi a^4$$

Για κέντρο μάζας υπολογίζουμε

$$\iiint_W \underbrace{z \delta(x, y, z)}_{\text{μόνο αντικείμενα}} dx dy dz = \int_0^{\pi/2} \int_0^a \int_0^{\sqrt{4a^2 - r^2}} z^2 r dz dr d\theta$$

ελαστική αλληλεπίδραση

$$= \dots = \frac{2 - 3^{5/2}}{30} a^5 \pi$$

$$\Rightarrow \bar{z} = \frac{8(2 - 3^{5/2})}{105} a$$

$$\text{Αντίστοιχα, } \iiint x \delta(x, y, z) = \int_0^{\pi/2} \int_0^a \int_0^{\sqrt{4a^2 - r^2}} z^2 r \cos \theta dz dr d\theta = \dots = \frac{17a^5}{30}$$

$$\iiint y \delta(x, y, z) = \int_0^{\pi/2} \int_0^a \int_0^{\sqrt{4a^2 - r^2}} z^2 r \sin \theta dz dr d\theta = \dots = \frac{17a^5}{30}$$

$$\Rightarrow \bar{x} = \bar{y} = \frac{136a}{105\pi}$$

Ακρίβεις για ενοίκην φορα

1. Βρείτε κέντρο μάζας στερεού που βρίσκεται στην πρώτη στερεά γωνία και περιβάλλεται από επιπέδα $x=0$, $y=0$, κώνο $x^2+y^2=z^2$ και σφαίρα $x^2+y^2+z^2=a^2$ όταν η πυκνότητα μάζας του είναι $\delta(x,y,z)=k\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ ($k>0$).

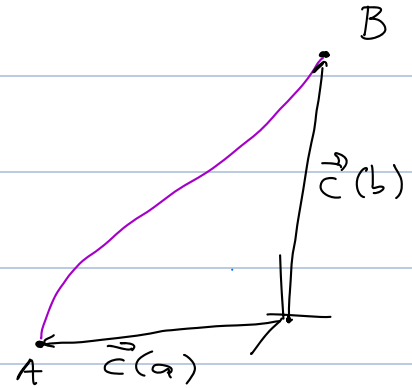
2. Να υπολογίσετε το $I = \iiint_D \sqrt{x^2+y^2} \, dx \, dy \, dz$ όπου D χωρίο που περικλείεται από παραβολοειδές $z = x^2 + y^2$ και επίπεδο $z=4$

7.1. Βασικά (1^{ου} είδους) Επικαμπύλια Ολοκληρώματα

"Θεωρηματικά πάνω σε **σύρτα**"

Συνάρτηση $f(\vec{r})$ ορισμένη σε

ορισμένο σύνολο $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$ / καμπύλη με παραμ. έκφραση $\vec{c}(t)$, $t \in [a, b]$



$f(c(t))$ απεικρ. στο σύνολο $\vec{c}(t)$ του σύρματος

$$d\vec{c} = \vec{c}'(t)dt \Rightarrow ds = \|d\vec{c}\| =$$

αντιμεσώ μίκτος τόξου

$$\int_{\vec{c}} f ds := \int_a^b f(\vec{c}(t)) \|\vec{c}'(t)\| dt$$

"ήταν θεωρηματικά
σύρματος",

- $f(c(t))$ συνεχής, $c(t)$ συνεχώς διαφορεύσιμη
- ή και τμηματικά: Αν $\vec{c} = \vec{c}_1 \cup \dots \cup \vec{c}_n$ $\int_{\vec{c}} f ds = \sum_{\vec{c}_i} \int_{\vec{c}_i} f ds$
- Ανεξάρτητο της παραμετροποίησης της καμπύλης

Παράδειγμα MT7.1.1

Έστω έλκη $\vec{C}(t) = \cos t \hat{i} + \sin t \hat{j} + t \hat{k}$, $t \in [0, 2\pi]$

και $f(\vec{r}) = r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ for $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ Υπολογίστε $I = \int_C f dS$

$$\vec{C}'(t) = -\sin t \hat{i} + \cos t \hat{j} + \hat{k}$$

$$\Rightarrow \|\vec{C}'(t)\| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1} = \sqrt{2}$$

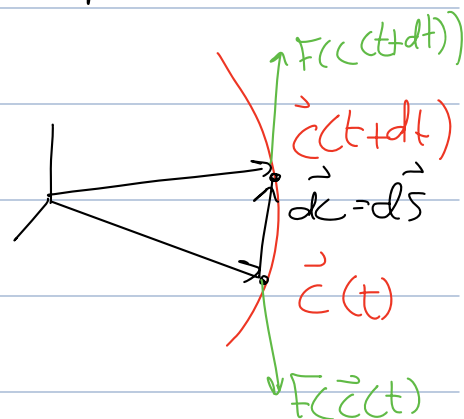
$$f(\vec{C}(t)) = \vec{C}^2 = \cos^2 t + \sin^2 t + t^2 = 1 + t^2$$

$$I = \int_0^{2\pi} f(\vec{C}(t)) \|\vec{C}'(t)\| dt = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} (1+t^2) dt = \dots = \frac{2\sqrt{2}\pi}{3} (3+4\pi^2)$$

7.2 Διαδοχική (2^{ος} είδος) Επικατ.

"Έργο δύναμης $\vec{F}$ κατά μικρό διαδρομής $\vec{C}$ "

$$\int_{\vec{C}} \vec{F} \cdot d\vec{s} := \int_a^b \vec{F}(\vec{C}(t)) \cdot \vec{C}'(t) dt$$



($\vec{C}(a)$, $\vec{C}(b)$ αρχή / τέλος της διαδρομής)

• Αν $\vec{F} = F_1 \hat{i} + F_2 \hat{j} + F_3 \hat{k}$ $\vec{C} = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}$ 44

$$\vec{F} \cdot d\vec{S} = \vec{F} \cdot d\vec{C} = F_1 \cdot dx + F_2 \cdot dy + F_3 \cdot dz$$

$$\Rightarrow \int_{\vec{C}} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_{\vec{C}} F_1 \cdot dx + F_2 \cdot dy + F_3 \cdot dz$$

Διαφορική μορφή

Διαφορετικές εκφράσεις, αλλά εντέλει υπολογίζουμε με
το ίδιο τρόπο:

$$\int_{\vec{C}} F_1 \cdot dx + F_2 \cdot dy + F_3 \cdot dz = \int_a^b \underbrace{(F_1 \cdot \frac{dx}{dt} + F_2 \cdot \frac{dy}{dt} + F_3 \cdot \frac{dz}{dt})}_{\vec{F} \cdot \vec{C}'(t)} dt$$

Παράδειγμα ΜΤ 7.2.3

Έστω $\vec{C} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ με $x=1$, $y=t$, $z=e^t$, $t \in [0, 2]$

και $\vec{F} = \cos z \hat{i} + e^x \hat{j} + e^y \hat{k}$

βρείτε διαφορική μορφή + υπολογίστε $I = \int_{\vec{C}} \vec{F} \cdot d\vec{S}$

$$I = \int_{\vec{C}} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_{\vec{C}} \cos z \, dx + e^x \, dy + e^y \, dz = \int_0^2 (\cos z \frac{dx}{dt} + e^x \frac{dy}{dt} + e^y \frac{dz}{dt}) dt$$

$\frac{dx}{dt}=1, \frac{dy}{dt}=1, \frac{dz}{dt}=e^t$

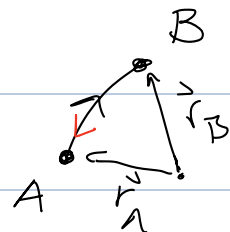
$$\Rightarrow I = \int_0^2 (0 + e + e^t \cdot e^t) dt = \int_0^2 (e + e^{2t}) dt = \left[et + \frac{1}{2} e^{2t} \right]_0^2$$

Μερίκις Ιδιότητες

i) Εξάρτηση από την φορά / προσανατολισμό

$$\int_{\vec{C}_{AB}} \vec{F} \cdot d\vec{S} = - \int_{\vec{C}_{BA}} \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

← Ισχύει και για αντίστροφες κατευθύνσεις



$$\vec{r}_A - \vec{r}_B = \vec{r}_{AB} = - \vec{r}_{BA}$$

(όπως το έργο)

Αναπαράσταση μπορεί να αλλάξει την φορά.

↳ κάθε συνεχής διαφάνιση και "1-1",

απεικόνιση ενός διαστήματος $I' = [a', b']$ επί άλλου $I = [a, b]$

Π.χ. $[0, 1] \rightarrow [a, b], t \mapsto a + (b-a)t$

$$\begin{aligned} a' &\mapsto a \\ b' &\mapsto b \end{aligned}$$

Διότι προσανατολίζει

$$[a, b] \rightarrow [a, b], t \mapsto a + b - t$$

Δεν διατηρεί προσανατολισμό

$$\begin{aligned} a' &\mapsto b \\ b' &\mapsto a \end{aligned}$$

$\Rightarrow \int_{\vec{C}} \vec{F} \cdot d\vec{S}$ απεικονίζεται σε αναπαράστασεις που διατηρούν τον προσανατολισμό.

Συμπέρασμα: Επικετηνότητα

Υπενθύμιση: Διαφορετικές στοιχειώδεις καμπύλων στον $\mathbb{R}^3$

i) $z = f(x), y = g(x)$: γραμμή συνάρτησης

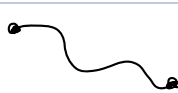
ii) $F_1(x, y, z) = 0 = F_2(x, y, z)$: πεπλεγμένη μορφή

iii) $\vec{C}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in [a, b]$

: παραμετρική μορφή

Επίδραση παραπαραμοίωσης στα διόδια. Εγκλημα $\int$ μπορεί να κωδικοποιηθεί λίγο πιο αυστηρά μέσω των παρακάτω εννοιών:

- **αμφι καμπύλη C** : Εικόνα μιας τοπικά συνεχώς διαφορίσιμης και "1-1" απεικόνισης $C: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ (δεν πρέπει να είναι $\mathbb{R}^3$)

 : αμφι

||

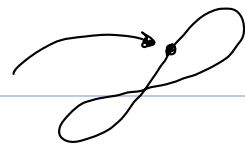
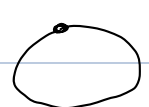
 : όχι αμφι

- **προσανατολισμένη αμφι καμπύλη**:

Αμφι καμπύλη μαζί με επιλογή ενός εκ των δύο

πιθανών κατευθύνσεων:



- κλειστή καμπύλη: $\vec{C}(b) = \vec{C}(a)$  κλειστή (όχι ανοιχτή)
- ανοιχτή κλειστή: κλειστή + (ανοιχτή αλλιώς "I-I", στα $[a, b]$)  ανοιχτή κλειστή.

$\Rightarrow \int_C \vec{F} \cdot d\vec{S}$ μονοσήμαντα ορισμένο για ανοιχτή κλειστή
προσανατολισμένη καμπύλη

Συντηρητικό πεδίο (ή πεδίο κτιστών), MT 8.3

$\vec{F}$ συντηρητικό αν $\vec{F} = \nabla f$ για προγ. συνάρτηση f
(όπως το ηλεκτροστατικό δυναμικό)
μπορεί να αποδειχτεί
και το αντίστροφο $\Uparrow$ προγ. ταύτητα για $\forall f, \nabla \cdot f$ (MT 4.4)
 $\nabla \times \vec{F} = 0$

Αν $\vec{F}$ συντηρητικό, τότε

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_C (\nabla f) \cdot d\vec{S} = f(\vec{C}(b)) - f(\vec{C}(a))$$

Ανεξάρτητο της καμπύλης! Εξαρτάται μόνο από τα δύο άκρα
(όπως το έργο ηλεκτροστατικής δύναμης)

Άσκηση: Αποδείξτε την

τελευταία ιδιότητα

Λήμμα: Αν C κλειστή, $\vec{C}(a) = \vec{C}(b)$, τότε $\int_C \nabla f \cdot d\vec{S} = 0$

7.3 Παραμετροποιημένες επιφάνειες (Υπόμνημα για επιφάν. $\int$)

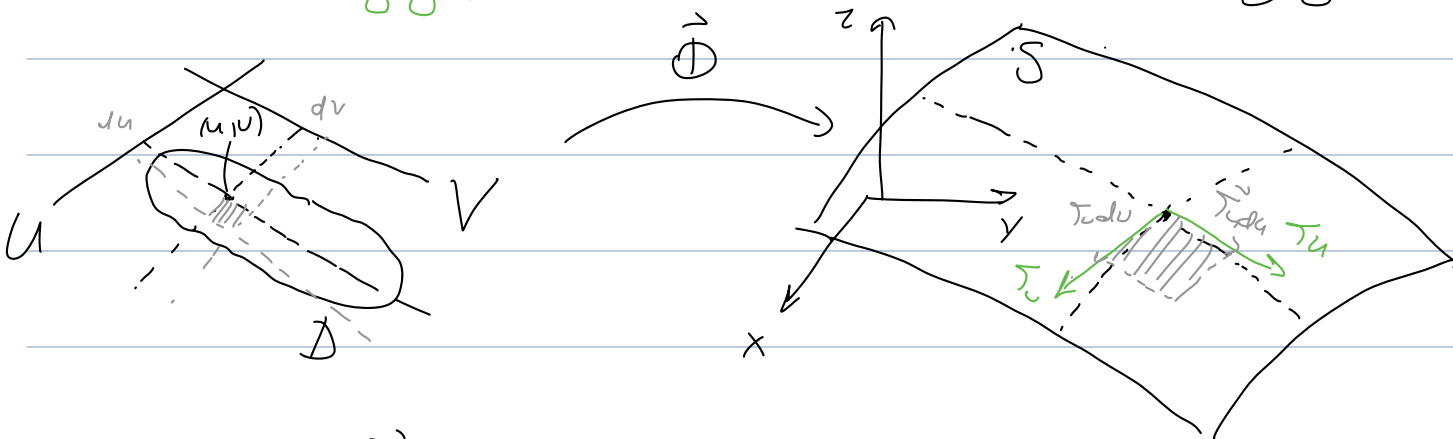
Επιφάνειες S στον $\mathbb{R}^3$ ορίζονται παραμoια lt καμπύλες:

i) $z = f(x, y)$

ii) $F(x, y, z) = 0$

iii) $\vec{\Phi}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), (u, v) \in D \subset \mathbb{R}^2$

S (συνεχώς) παραγωγίσιμη $\equiv \vec{C}(u, v)$ (συνεχώς) παραγωγίσιμη



$$\begin{aligned} \vec{T}_u &:= \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial u} \\ \vec{T}_v &:= \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial v} \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{εφαπτόμενα διανύσματα στο σημείο } \vec{\Phi}(u, v) \end{array} \right.$$

S κανονική (ή αλφά ή ομοία) στο $\vec{\Phi}(u, v)$:

$$A_v \quad \vec{n} := \vec{T}_u \times \vec{T}_v \neq 0 \quad \text{στο } (u, v)$$

$\vec{T}_u, \vec{T}_v$ βάση του εφαπτομένου επιπέδου στο $\vec{\Phi}(u, v)$
και $\vec{n}$ λαμβάνει σε αυτό.

7.4 Εμβαδό επιφάνειας

$$\begin{array}{ccc} \text{Μεταβολή } du \text{ στο } D & \rightarrow & \text{Μεταβολή } d\vec{r}_u = \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial u} du = \vec{T}_u du \text{ στην } S \\ \text{---||---} & & \text{---||---} \\ du & & d\vec{r}_v = \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial v} dv = \vec{T}_v dv \text{ ---||---} \end{array}$$

Στοιχείο εμβαδού $du dv$ στο $D \rightarrow$ Στοιχείο εμβαδού στο S

$$dS = \|\vec{T}_u \times \vec{T}_v\| du dv$$

(Βλέπετε σχήμα παραπάνω +



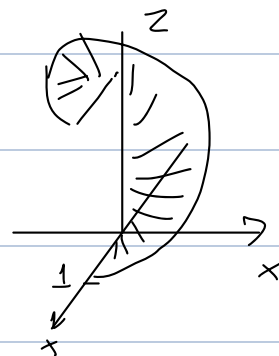
$$S = \|a \times b\|$$

$$\Rightarrow \text{Συνολικό εμβαδό } S = A(S) = \iint_D \|\vec{T}_u \times \vec{T}_v\| du dv$$

Υπολογίστε εμβαδόν κυρτωμένου

$$\vec{\Phi}(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta, \theta)$$

h.e. $\theta \in [0, 2\pi], \quad r \in [0, 1]$



$$\tau_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r} = (\cos \theta, \sin \theta, 0) \quad \tau_\theta = \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = (-r \sin \theta, r \cos \theta, 1)$$

$$\tau_r \times \tau_\theta = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -r \sin \theta & r \cos \theta & 1 \end{vmatrix} = \hat{i} (r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta) - \hat{j} (r \cos \theta \sin \theta) + \hat{k} (\cos \theta \sin \theta + r)$$

$$\Rightarrow \|\tau_r \times \tau_\theta\| = \sqrt{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta + r^2} = \sqrt{1+r^2}$$

$$\Rightarrow A(S) = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{1+r^2} dr d\theta = 2\pi \cdot \int_0^1 \sqrt{1+r^2} dr = \dots = \pi [\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2})]$$

7.5 Βαθμωτό επιφανειακό ολοκλήρωμα

Θυμίζει γενίκευση του

i) Βαθμωτό επιφανειακό ολοκλήρωμα 7.1 "ήταν θεωρούμενα επίπεδο",

ii) Εμβαδού επιφάνειας S

↑ Ειδική περίπτωση $f=1$

$$\iint_S f dS = \iint_D f(\vec{\Phi}(u, v)) \|\tau_u \times \tau_v\| du dv$$

$f(\vec{r}) = f(x, y, z)$ συνάρτηση ορισμένη σε χώρο του $\mathbb{R}^3 \subset S$

↑
εμφ. S h.e. παραμετρικ. $\vec{\Phi}(u, v)$

$$\text{"ήταν θεωρούμενη μετρίση"} = \frac{\int f dS}{\int dS}$$

51

Παράδειγμα ΜΤ 7.5.1

Έστω το ελικοειδές S του παραδ. 7.4.2. Υπολογίστε

$$\int f dS \quad \text{με} \quad f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + 1}$$

Μια διαφορά από ΜΤ 7.4.2: No υπολογιστεί το $f(\vec{\Phi}(u, v))$

$$\vec{\Phi}(r, \theta) = (\underbrace{r \cos \theta}_x, \underbrace{r \sin \theta}_y, \underbrace{\theta}_z) \Rightarrow f(\vec{\Phi}(u, v)) = \sqrt{r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta + 1} = \sqrt{r^2 + 1}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int f dS &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{1+r^2} \sqrt{1+r^2} dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1+r^2) dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \left[r + \frac{r^3}{3} \right]_0^1 = 2\pi \cdot \frac{4}{3} = \frac{8\pi}{3} \end{aligned}$$

7.6 Διαυστατικό επιφανειακό ολοκλήρωμα

Φυσική γενίκευση του διαυστατικού επιφαν. $\int$ ("ήχο δυνάμει")

Είδαμε ότι σε κάθε κανονική ή νέα επιφάνεια S με παρὰ $\vec{\Phi}(u, v)$ ορίζεται τοπικά λαμβάνο διάνυσμα $\vec{n} = \vec{T}_u \times \vec{T}_v = \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial v}$. [ενα εχέδιστ $\vec{n}$ αν $\vec{T}_u, \vec{T}_v$ υπήρχε]

$$\text{Αν} \quad d\vec{S} := \hat{n} \cdot dS = \frac{\vec{T}_u \times \vec{T}_v}{\|\vec{T}_u \times \vec{T}_v\|} \cdot \|\vec{T}_u \times \vec{T}_v\| du dv = \vec{T}_u \times \vec{T}_v du dv$$

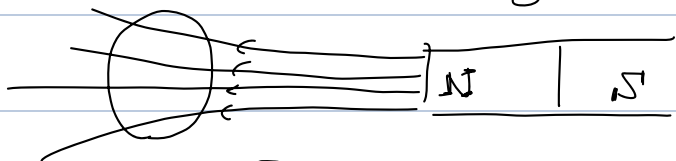
και $\vec{F}$ διαυστατικό πεδίο ορισμένο σε χώρο του $\mathbb{R}^3 \subset S$,

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} := \iint_D \vec{F} \cdot (\vec{T}_u \times \vec{T}_v) \cdot du dv$$

Φυσική Εφαρμογή: Αν $\vec{F} = \vec{B}$ μαγνητικό πεδίο,

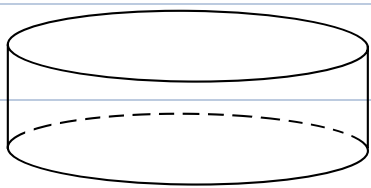
$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$ = μαγνητική ροή διακρίνου της S ,
 ήτρο του αριθμού μαγνητικών γραμμών που
 τη διεισδύουν μαγνήτης

Π.χ πείραμα Faraday

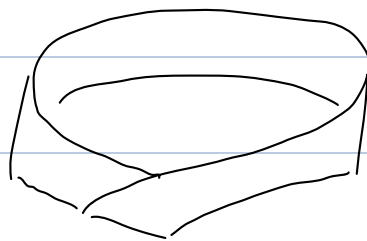


σύμβα. S επιφάνεια που περικλείεται

Σημείωση: S πρέπει πρόσθετα να είναι προσανατολισμένη
 ή συντηγμένη επιφάνεια, δηλ. το λαμβάνει διαν. ή
 να οριστεί όχι μόνο τοπικά αλλά και ολικά ως
συνεχής συνάρτηση στο S .



παρμετροποίηση



ή η προσανατολισμένη
 (ταινία του Möbius)

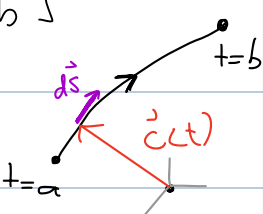
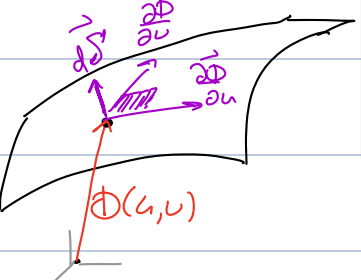
Όπως $\int \vec{F} \cdot d\vec{l}$, έτσι και $\int \vec{F} \cdot d\vec{S}$ ανεξάρτητο των
 παραμετροσθ. που διατηρούν τον προσανατολισμό του $\vec{n}$.

Αξιολόγηση μαθημάτων από τους φοιτητές:

Survey.409.gr, είσοδος με πανεπιστημ. username + password.

- αποσύνταξ ανωνύμη!
- δηλώνεται σωστά υπόψη!

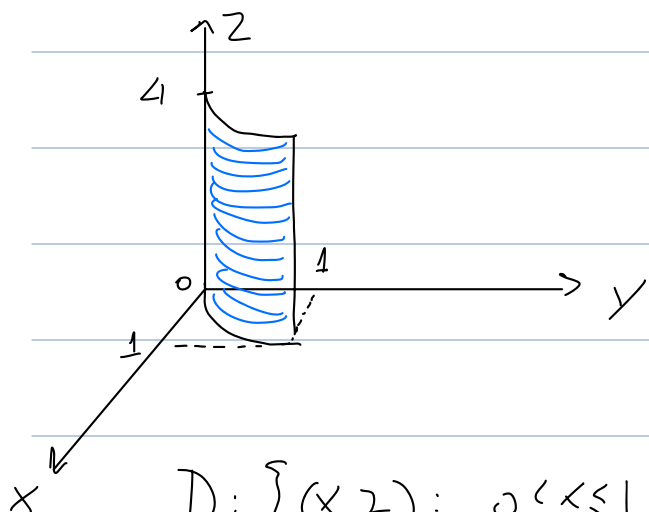
Περιγραφή Επικατηρίων & Επιφανειακών Ολοκληρωμάτων

	Βαθμωτή συνάρτηση $f(\vec{r})$	Διανυσματική συνάρτηση $\vec{F}(\vec{r})$
Καμπύλη $\vec{c}(t)$, $t \in [a, b]$ 	$\int_a^b f ds = \int_a^b f(\vec{c}(t)) \underbrace{\left\ \frac{d\vec{c}}{dt} \right\ }_{ds = \ d\vec{c}\ } dt$	$\int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_a^b \vec{F}(\vec{c}(t)) \underbrace{\frac{d\vec{c}}{dt}}_{d\vec{s} = d\vec{c}} dt$
Επιφάνεια $\vec{\Phi}(u, v)$ $(u, v) \in D$ 	$\iint_D f dS = \iint_D f(\vec{\Phi}(u, v)) \underbrace{\left\ \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial v} \right\ }_{dS} du dv$	$\iint_D \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_D \vec{F}(\vec{\Phi}(u, v)) \underbrace{\frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial v}}_{d\vec{S}} du dv$

Παράδειγμα με "Σταυροειδές", επιφανειακό ολοκλήρωμα (Thomas 16.6.5)

Υπολογίστε $\int \vec{F} \cdot d\vec{S}'$ για $\vec{F} = yz \hat{i} + x \hat{j} - z^2 \hat{k}$ και επιφάνεια
 $S: \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = x^2, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq z \leq 4\}$

(γεωμετρικός κύλινδρος). Σχεδιάστε S πριν τον υπολογισμό



$$\vec{\Phi}(x, z) = (x, x^2, z)$$

$$\vec{F}(\vec{\Phi}(x, z)) = x^2 z \hat{i} + x \hat{j} - z^2 \hat{k}$$

$$D: \{(x, z): 0 \leq x \leq 1, 0 \leq z \leq 4\} \text{ ορθογώνιο}$$

$$\frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial x} = (1, 2x, 0)$$

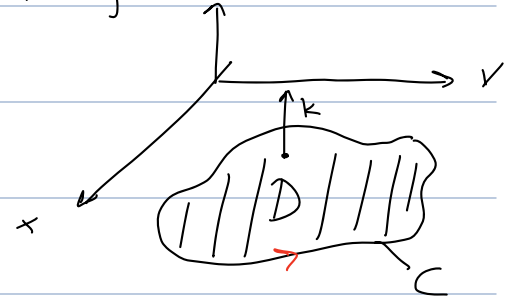
$$\frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial z} = (0, 0, 1)$$

$$d\vec{S}' = \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial z} dx dz = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 2x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (2x \hat{i} - \hat{j}) dx dz$$

$$\vec{F} \cdot d\vec{S}' = (2x^3 z - x) dx dz$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_D \vec{F} \cdot d\vec{S}' &= \iint_D (2x^3 z - x) dx dz = \int_0^1 \int_0^4 (2x^3 z - x) dz dx = \int_0^1 \left[x^3 z^2 - xz \right]_0^4 dx \\ &= \int_0^1 (16x^3 - 4x) dx = \left[4x^4 - 2x^2 \right]_0^1 = 4 - 2 = 2 \end{aligned}$$

σχέσεις "μεταξύ επιφαν. + επιφ.αν."



8.1 Θεώρημα του Green

Συνδέει διανυσματικό επιφαν.όριο $\int$ κατά μήκος κλειστής καμπύλης C στο επίπεδο, με βαθμωτό επιφαν.όριο $\int$ επί χωρίου D που περικλείει η C

Έστω C προσανατολισμένη αηδή κλειστή καμπύλη που περικλείει χωρίο D στα αριστερά της (αντιπροσβολικά),

και $\vec{F} = P\hat{i} + Q\hat{j} + \phi\hat{k}$ συνεχώς διαφορίσιμο διαν. πεδίο στο D .

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_D (\nabla \times \vec{F}) \cdot \hat{k} dS$$

(είδη περίπτωση θεωρ. Stokes)

στροβιλ. κορ.η

όπου $\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & \phi \end{vmatrix}$

ο στροβιλισμός της $\vec{F}$

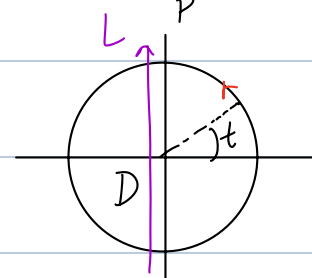
$$(\nabla \times \vec{F}) \cdot \hat{k}$$

Σε κορ.η συνιστωσών:

$$\int_C P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

(**)

Παρατήρηση: Εφαρμόζουμε το Θεωρ. Green με $F = \underbrace{x}_P \hat{i} + \underbrace{xy}_Q \hat{j}$ με D μοναδιαίο δίσκο $x^2 + y^2 \leq 1$.



$$\vec{c}(t) = (x(t), y(t)) = (\cos t, \sin t), t \in [0, 2\pi]$$

$$\Rightarrow \vec{c}'(t) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right) = (-\sin t, \cos t)$$

Απάντηση:

$$\Rightarrow \int_{\vec{c}} P dx + Q dy = \int_0^{2\pi} \left(x \cdot \frac{dx}{dt} + xy \cdot \frac{dy}{dt} \right) dt = \int_0^{2\pi} (\cos t \cdot (-\sin t) + \cos t \sin t \cos t) dt$$

$$= \left[-\frac{\cos^2 t}{2} + \frac{\cos^3 t}{3} \right]_0^{2\pi} = 0$$

Δεξιά:

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \iint_D y dx dy = \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} y dy dx$$

$$= \int_{-1}^1 \left[\frac{y^2}{2} \right]_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dx = 0 \quad \checkmark$$

Γενικότερες κλειστάς χωρία οριοκλίσεως

Θεωρ. Green ισχύει και για μη ευκλείδη χωρία

με την προϋπόθεση ότι είναι ενομοειδές, αρκεί να το σκεφτούμε:

Απόδειξη: Απαιτείται όρος $\int_a^b \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \int_a^b \vec{F} \cdot \vec{n} \|\vec{c}'(t)\| dt$

$$= \int_a^b \frac{Q y'(t) + P x'(t)}{\|\vec{c}'(t)\|} \cdot \|\vec{c}'(t)\| dt = \int_a^b Q dy + P dx$$

απαιτείται όρος λοιπών συνιστωσών (**)

Δείξιος όρος: $\nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$

$$\therefore \iint_D \nabla \cdot \vec{F} dx dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

Δείξιος όρος λοιπών συνιστωσών (**)

[+ Έλεγχος εύλ. καθετού: $\vec{c}' \cdot \vec{n} = \frac{x'y' - y'x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} = 0$]

Άσκηση για επόμενη φορά

1. Έστω παραμετροποιημένη επιφάνεια $\vec{\Phi}(\theta, \varphi) = (\cos\theta \sin\varphi, \sin\theta \sin\varphi, \cos\varphi)$
 $\theta \in [0, 2\pi]$, $\varphi \in [0, \pi]$ (κομδία σφαίρα).

Υπολογίστε $I = \iint_{\vec{\Phi}} \vec{r} \cdot d\vec{S} = \iint_{\vec{\Phi}} \vec{\Phi} \cdot d\vec{S}$ [$\vec{F}(\vec{r}) \rightarrow \vec{F}(\vec{\Phi}(\theta, \varphi))$]

2. Έστω διαν. πεδίο $\vec{F} = \left(-\frac{y}{x^2+y^2+a^2}, \frac{x}{x^2+y^2+a^2} \right)$

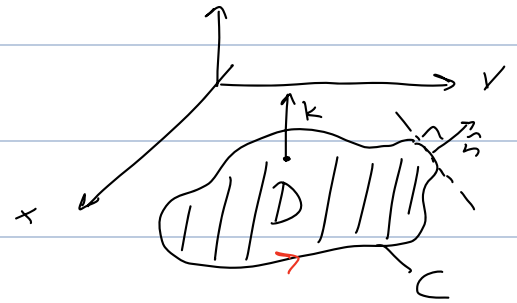
Να επιβεβαιωθεί το θεώρ. Green σε δίσκο ακτίνας b
 με κέντρο την αρχή. Σχολιάστε το όριο $a \rightarrow 0$

Βιολογική επιμέλεια αβάντων '25 & '26 στο εδράν!

Μελετήστε προσεκτικά.

Προσδοκώμενη φόρμα: Παράδ. "δυναμικά", επιφανειακά

+ Θεώρημα Green: Περιμετρική



$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_D (\nabla \times \vec{F}) \cdot \hat{k} dS \quad (*)$$

βαθμ. εντάση.

βαθμ. εντάση.

Διαγν. μορφή ~ Θεωρ. Stokes

όπου $\vec{F} = P\hat{i} + Q\hat{j} + \phi\hat{k}$ συνεπώς διαφοροποιήσο στο χώρο $D \in \mathbb{R}^2$ και $C := \partial D$ είναι κλειστή καμπύλη που το περικλείει στο επίπεδο της

Ενδιαφέροντα: $\oint_C Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \quad (**)$ μορφή
συνιστωσών

Α και: $\oint_C (\vec{F} \cdot \hat{n}) ds = \iiint_D (\nabla \cdot \vec{F}) dx dy \quad (***)$ Διαγν. μορφή ~ Θεωρ. Gauss

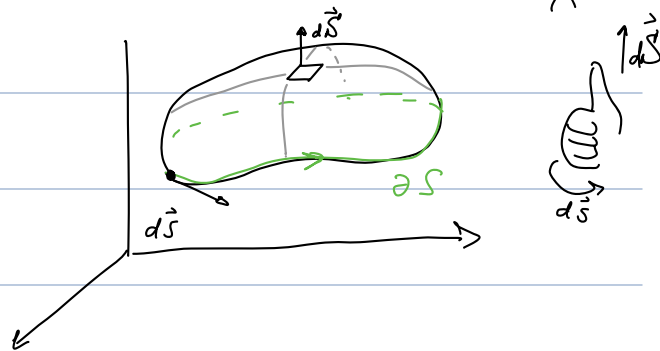
όπου $\vec{F} = Q\hat{i} - P\hat{j} + \phi\hat{k}$ και $\hat{n} = \frac{(x'(t), -y'(t))}{\|\vec{C}'(t)\|}$ το

έξωτ. κλειστό διάνυσ. στην $\vec{C} = (x(t), y(t), 0)$

8.2 Θεώρημα Stokes (η στεροβιλισμός)

Έστω προσανατολισμένη επιφάνεια S και καμπύλη
 ∂S το όριο της. Τότε για κάθε συνεχώς διαφορίσιμο
 διανυσματικό πεδίο $\vec{F}$ σε χώρο του $\mathbb{R}^3$ που περιέχει
 την S ,

$$\int_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} = \oint_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{S}$$



Διαν. Επιφάν.

Διαν. Καμπύλης

Δ7-8 + Ασκήσεις

όπου $d\vec{S}$ = στοιχειώδης μετατόπιση κατά μήκος της ∂S

$d\vec{S}$ = στοιχειώδης προσανατολ. επιφάνεια πάνω στην S

= στοιχειώδης επιφάνεια (dS) $\times$ μοναδιαίο ραδιό στο S

με τους προσανατολισμούς να σχετίζονται με τον κανόνα δεξιού χεριού

Υπενθύμιση : Αν η παραμετροποίηση της

• S είναι $\vec{\Phi}(u, v)$, $(u, v) \in D \subset \mathbb{R}^2$, τότε $d\vec{S} = \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial v} \cdot du dv$

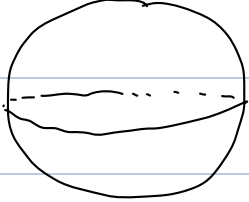
• ∂S είναι $\vec{c}(t)$, $t \in [a, b]$, τότε $d\vec{S} = \frac{d\vec{c}}{dt} \cdot dt$



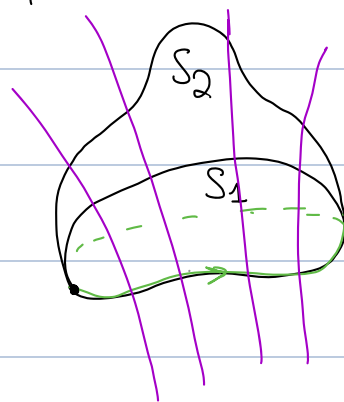
$$\Rightarrow \iint_D (\nabla \times \vec{F}) \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right) du dv = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{επιφάνεια του } \vec{r}(u,v)}$

Παρατηρήσεις

- Αν $\vec{F}$ δεν έχει σύντροφο : $\oint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} = 0$ 
- Διαφορετικές επιφάνειες με ίδιο σύντροφο δίνουν το ίδιο αποτέλεσμα!

$$\oint_{S_1} (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} = \oint_{S_2} (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S}$$

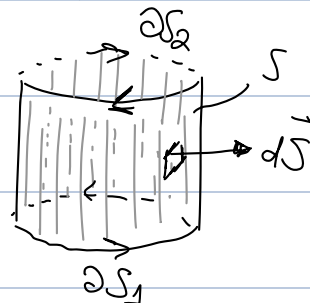


Φυσική Ερμηνεία: Επιφ. ολοκλήρωση μετράει #
 γραμμών του πεδίου $\vec{F}$ (π.χ. μαγνητικού), ανατηλοισμός.

- Θεωρ. Green ειδική περίπτωση που η S είναι επίπεδη (έστω στο xy): $\vec{F}(x,y) = x\hat{i} + y\hat{j} \Rightarrow d\vec{S} = \hat{k} dx dy$

~~⊗~~ $\Rightarrow (*)$

- Θεωρ. Stokes ισχύει και για επιφάνειες με περιεσώματα του ενός σύντροφα : $\oint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \oint_{S_1} \vec{F} \cdot d\vec{S} + \oint_{S_2} \vec{F} \cdot d\vec{S}$



Προσανατολισμός πάντα με κανόνα δεξιού χεριού

Παράδειγμα (Παρατήρηση παραδ. του Θεωρ. Green, Ασκήσεις)

Έστω διανυσματικό πεδίο $\vec{F} = \left(\frac{-y}{x^2+y^2+a^2}, \frac{x}{x^2+y^2+a^2}, z \right)$ είχε $z=0$

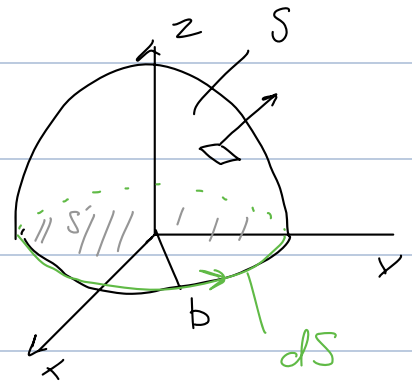
Επιβεβαιώστε το Θεωρ. Stokes για το ημίσφαιριο

$$S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = b^2, z \geq 0\}$$

Παράδειγμα Green είχε $S' = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = b^2, z = 0\}$

$\Rightarrow$ 'Ιδιο εύρος με S

$\downarrow$
 'Ιδιος υπολογισμός του $\int \vec{F} \cdot d\vec{S} = \dots = \frac{2\pi b^2}{a^2 + b^2}$ (I)



Υπολογισμός $\int_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} :$

F_z αντ. xy , F_x, F_y αντ. z

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \hat{i} \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) - \hat{j} \left(\frac{\partial F_z}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial z} \right) + \hat{k} \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right)$$

$\stackrel{\text{ίδιο με}}{\text{Ασκήσεις '25}} = \dots = \frac{2a^2}{(x^2 + y^2 + a^2)^2} \hat{k}$ (II)

Παρακετασμένη ημικρ. αέριος b

$$\vec{\Phi}(\Theta, \varphi) = (b \sin \varphi \cos \Theta, b \sin \varphi \sin \Theta, b \cos \varphi), \quad \varphi \in [0, \frac{\pi}{2}] \quad \Theta \in [0, 2\pi]$$

$\Downarrow$

$$\nabla \times \vec{F} = \frac{2a^2}{(b^2 \sin^2 \varphi + a^2)} \hat{k} \quad (II'), \text{ και}$$

$$(III)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \Theta} \times \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = \dots = -b^2 \sin \varphi (\hat{i} \cos \Theta \sin \varphi + \hat{j} \sin \Theta \sin \varphi + \cos \varphi \hat{k})$$

Αν. Ακ' 25

για b=1

$$d\vec{S} = \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(b, \Theta, \varphi)} \right| \text{ για μετασφ. σε καρτεσικές συντεταγμένες}$$

Φορά προς το μέσα! (Πείδον έχουμε επιλέξει αντιπροσωπευτικό προσανατολισμό $d\vec{S}$, τονάας δείξω χέρια επιβάρυνε επιλογί

$$d\vec{S} = + b^2 \sin \varphi (\hat{i} \cos \Theta \sin \varphi + \hat{j} \sin \Theta \sin \varphi + \cos \varphi \hat{k}) \quad (IV)$$

Από (II'), (III), (IV):

(τοιο $\hat{k}$ συνήθως)

$$\int (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{2a^2}{(b^2 \sin^2 \varphi + a^2)^2} \cdot (b^2 \sin \varphi \cos \varphi) d\varphi d\Theta$$

$$= \int_0^{2\pi} d\Theta \cdot \int_0^{\pi/2} \left[-\frac{1}{b^2 \sin^2 \varphi + a^2} \right]' d\varphi = 2\pi \left[-\frac{1}{b^2 + a^2} + \frac{1}{a^2} \right]$$

$$= 2\pi \frac{b^2}{a^2 + b^2} \quad \text{επιφάνεια με (I)}$$

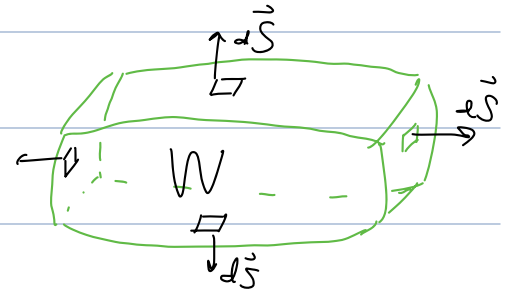
8.3 Θεωρ. Gauss (in ανοικτότητας)

Αν $\vec{F}$ συνεχώς διαφορίσιμο διανυσματικό πεδίο σε κλειστό χωρίο $W \in \mathbb{R}^3$ με σύνορο την V κλειστή επιφάνεια ∂W , τότε
 τυπικά για

Τοιχώ βελ. $\int$
 Δ4,5 (M5.5)

Διαν. επιφ.
 17,8 + 16,145

$$\iiint_W (\nabla \cdot \vec{F}) \cdot dx dy dz = \int_{\partial W} \vec{F} \cdot d\vec{S} \quad (\square)$$



με την προσανατολισμό του $d\vec{S}$ προς το εξωτερικό του W

- Θεωρ. Green (σε τόπο ανοικτότητας) ειδική περίπτωση που $W \in \mathbb{R}^2$ (δίνεται διδιδιόστο επιμεδο χωρίο και ∂W κλειστή κακνύτη που το περιβάλλει: $dx dy dz \rightarrow dx dy$, $d\vec{S} \rightarrow \hat{n} d\vec{S}$)

- Σχετίζεται με το νόμο του Gauss στον Η/Μ

Παράδειγμα (Thomas 16.8.2) Επιβεβαιώστε το Θεωρ Gauss

για το διαν. πεδίο $\vec{F} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$
 πάνω στη σφαίρα $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$

$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = 3$$

$$\underbrace{\iiint_{\text{σ(aira)}} (\nabla \cdot \vec{F}) dx dy dz}_{\text{σ(aira) σ(κσs)}} = 3 \cdot \iiint dx dy dz = 3 \cdot \frac{4}{3} \pi b^3 = 4\pi b^3 \checkmark$$

$$\vec{F} = \vec{r}, \quad d\vec{S} = \hat{r} \cdot dS \Rightarrow \vec{F} \cdot d\vec{S} = b \cdot dS$$

$$\underbrace{\int_{\text{σ(aira)}} \vec{F} \cdot d\vec{S}}_{\text{σ(aira) σ(κσs)}} = b \cdot \underbrace{\int_{\text{σ(aira)}} dS}_{\text{σ(aira) σ(κσs)}} = b \cdot 4\pi b^2 = 4\pi b^3 \checkmark$$

(Επανάληψεις) Ασκήσεις: Θεωρήματα Διανυστ. Λογισμού⁶⁷

1. Έστω διαν. πεδίο $\vec{F} = (y+z, -x, 2x)$ [Σύνολο '25]

και επιφάνεια παραβολοειδούς

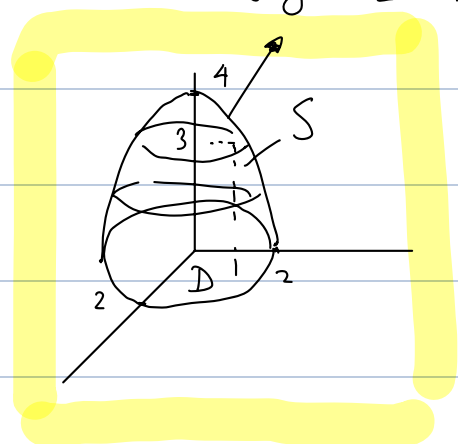
$$S = \{(x, y, z) : z + x^2 + y^2 - 4 = 0 \text{ και } z \geq 0\}$$

Να βρεθ. η επιφάνεια & να επιβιβ. θεωρ. Stokes

Τομή S με επίπεδο $z=c$ (παρατηρούμε στο xy):
κύκλος $x^2 + y^2 = 4 - z$ με ακτίνα $\sqrt{4-z}$ $\begin{cases} z=0 \\ z=3 \\ z=4 \end{cases}$

$$\begin{matrix} I_1 \\ \parallel \\ I_2 \end{matrix}$$

$$\text{Θεωρ. Stokes: } \int_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} = \oint_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{s}$$



A. Απλοποίηση μετρώ

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y+z & -x & 2x \end{vmatrix} = 0\hat{i} - (z-1)\hat{j} - 2\hat{k} = (0, 1-z, -2) \quad (1)$$

$$S = \{(x, y, z) : z + x^2 + y^2 - 4 = 0 \text{ και } z \geq 0\}$$

$$z = 4 - x^2 - y^2$$



Παραμετροποίηση $\vec{\Phi}(x, y) = (x, y, 4 - x^2 - y^2)$, $x, y \in D = \{x^2 + y^2 \leq 4\}$

$$\vec{n} = \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial y} = \begin{pmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -2x \\ 0 & 1 & -2y \end{pmatrix}$$

$$= 2x\hat{i} + 2y\hat{j} + \hat{k} = (2x, 2y, 1) \quad (\text{η pos η ∈ Ω})$$

$$d\vec{S} = \vec{n} \cdot dx dy$$

η pos η ∈ Ω

14 σε κυλινδρικούς συντεταγμένες $\vec{r} = (r \cos \theta, r \sin \theta, z)$, (2)

$$\vec{\Phi}(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta, 4 - r^2) \quad (3), \quad \theta \in [0, 2\pi], \quad r \in [0, 2]$$

$$\vec{n} = \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial r} \times \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial \theta} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos \theta & \sin \theta & -2r \\ -r \sin \theta & r \cos \theta & 0 \end{vmatrix} = \hat{i} 2r^2 \cos \theta + \hat{j} 2r^2 \sin \theta + \hat{k} r \quad (4)$$

$$d\vec{S} = \vec{n} \cdot dr d\theta \quad (5)$$

Συνεχίζουμε σε κυλινδρικές: $\nabla \times \vec{F}(\vec{\Phi}(r, \theta)) = (0, r^2 - 3, -2)$ (1)(2)

$$\Rightarrow \nabla \times \vec{F}(\vec{\Phi}) \cdot d\vec{S} = [(r^2 - 3) 2r^2 \sin \theta - r] dr d\theta \quad (6)$$

$$I_1 = \int_S \nabla \times \vec{F} d\vec{S} = \int_0^2 \int_0^{2\pi} [(r^2 - 3) 2r^2 \sin \theta - r] d\theta dr \quad (6) \quad (2)$$

$$= \int_0^2 \left[\left[-\cos \theta \right]_0^{2\pi} - 2[\theta]_0^{2\pi} \right] r dr = -4\pi \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^2$$

$$= -8\pi \quad (7)$$

Σύνολο $2S = \{(x, y, z) : z=0, x^2+y^2=4\}$: κύκλος στο (xy) -επίπεδο

Παραμετροποίηση $\vec{C}(\theta) = \vec{\Phi}(2, \theta) = (2\cos\theta, 2\sin\theta, 0)$, $\theta \in [0, 2\pi]$ ⁽⁸⁾
(in συνάρτηση $x^2+y^2=4$ σε καρτεσιανές/πολικές)

$$\begin{aligned} \vec{T}(\vec{C}(\theta)) &= (2\sin\theta, -2\cos\theta, 0) \quad \left\{ \begin{aligned} \vec{T} \cdot d\vec{S} &= (-4\sin^2\theta - 4\cos^2\theta)d\theta \\ d\vec{S} &= d\vec{C} = (2\sin\theta, 2\cos\theta, 0)d\theta \end{aligned} \right. \\ &= -4d\theta \quad (9) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow I_2 = \oint_{\partial S} \vec{T} \cdot d\vec{S} = -4 \int_0^{2\pi} d\theta = -8\pi \quad (10) \quad (\text{αποτέλεσμα})$$

Ποσότητα, $I_1 \stackrel{(17)}{=} I_2 \stackrel{(10)}{=}$

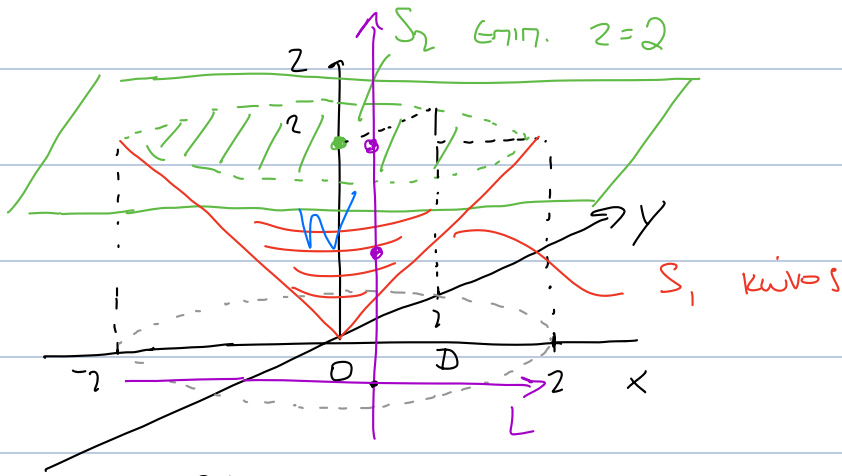
2. Έστω χώρο W που περικλείεται από τον κύβο

$z = \sqrt{x^2+y^2}$ και το επίπεδο $z=2$, και διανυσματικό

εδίο $\vec{F} = x^3 \hat{i} + y \hat{j} + z^2 \hat{k}$. Να σχεδιαστεί

το χώρο και να επιβεβαιωθεί το θεωρ. Gauss

Επιμέλεια: M

Τομή κυλίνδρου $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ Η επιφάνεια $z = c \leftarrow$ ορίζεταιείναι κύκλος ακτίνας c

$$\partial W = S_1 \cup S_2$$

$$D = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 4\}$$

Από το Gauss:

$$\iiint_W (\nabla \cdot \vec{F}) \cdot dxdydz = \int_{\partial W} \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

A. Αποτέλεσμα ηένερα

$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = 3x^2 + 1 + 2z \quad (11)$$

Με τη μέθοδο της Δ_1 , βλέπουμε ότι χωρίο W γ-ορίζεται:

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 2, -\sqrt{4-x^2} \leq y \leq \sqrt{4-x^2}, -2 \leq x \leq 2\}$$

και άρα

$$I := \iiint_W \nabla \cdot \vec{F} \, dxdydz = \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^2 (\nabla \cdot \vec{F}) \, dz \, dy \, dx \quad (12)$$

Λόγω συμμετρίας, η εύκολος υπολογισμός σε κυλινδρικές συντεταγ. : Μεταβ. $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ (13)

$$\nabla \cdot \vec{F} = 3r^2 \cos^2 \theta + 1 + 2z \quad (14)$$

$$dx dy dz = r dr d\theta dz \quad \text{τακτοποιώντας σύμφωνα με } \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} \right| \quad (15)$$

Σε αυτές τις συντεταγ., χωρίς D αντιβρίχεται σε

$$r \in [0, 2], \quad \theta \in [0, 2\pi] \quad (16) \quad \text{ορθογώνιο!}$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = r \Rightarrow \quad (14) \quad (15) \quad I = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_r^2 (3r^2 \cos^2 \theta + 1 + 2z) r dz dr d\theta$$

Υπολογισμός: (16)

$$I_1 = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \left[\left((3r^2 \cos^2 \theta + 1)z + z^2 \right) \right]_r^2 r dr d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^2 [6r^2 \cos^2 \theta + 2 + 4 - 3r^3 \cos^2 \theta - r - r^2] r dr d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^2 [6r^2 \cos^2 \theta + (6\cos^2 \theta - 1)r^3 - 3r^4 \cos^2 \theta] dr d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[3r^3 \cos^2 \theta + \left(6\cos^2 \theta - 1 \right) \frac{r^4}{4} - 3 \frac{r^5}{5} \cos^2 \theta \right]_0^2 d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[12 - \frac{8}{3} + (6\cos^2\theta - 1) \cdot 4 - \frac{96}{5} \cos^2\theta \right] d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{16}{3} + \frac{24}{5} \cos^2\theta \right) d\theta = \frac{32\pi}{3} + \frac{24}{5} \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2\theta}{2} d\theta$$

$$= \frac{32\pi}{3} + \frac{24\pi}{5} + \frac{12}{5} \left[\sin 2\theta \right]_0^{2\pi} = \frac{232}{15} \pi \quad \checkmark \quad (17)$$

Β. Δείξα μετ'ελα

Παραμετροποίηση $S_1: \Phi_1(x, y, z) = (x, y, \sqrt{x^2 + y^2})$, $x^2 + y^2 \leq 4$ (18)
 ή $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, $z = \sqrt{x^2 + y^2} = r$: $= (r \cos \theta, r \sin \theta, r)$ $\theta \in [0, 2\pi]$, $r \in [0, 2]$

S_2 : Παραμετροποίηση $\Phi_2(x, y, z) = (x, y, 2)$ $x^2 + y^2 \leq 4$
 ή $= (r \cos \theta, r \sin \theta, 2)$ $\theta \in [0, 2\pi]$, $r \in [0, 2]$ (19)

$$\frac{\partial \vec{\Phi}_1}{\partial \theta} \times \frac{\partial \vec{\Phi}_1}{\partial r} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -r \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ \cos \theta & \sin \theta & 1 \end{vmatrix} = r \cos \theta \hat{i} + r \sin \theta \hat{j} - r(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) \hat{k}$$

$$= r \cos \theta \hat{i} + r \sin \theta \hat{j} - r \hat{k}$$

$$S_1: d\vec{S}_1 = (\cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j} - \hat{k}) r dr d\theta \quad \text{προς τα έξω} \quad (20)$$

$$S_2: d\vec{S}_2 = \hat{k} \cdot dx dy = (0, 0, 1) dx dy \quad (21) \quad [\text{και χωρίς υπολογισμούς}]$$

$\vec{F}_1$ συν

$$\vec{F}(\vec{\Phi}_1) = r^3 \cos^3 \theta \hat{i} + r \sin \theta \hat{j} + r^2 \hat{k} \quad (22)$$

ενίκανον,

$$\Rightarrow \vec{F}(\vec{\Phi}_1) \cdot d\vec{S}_1 = (r^3 \cos^4 \theta + r \sin^2 \theta - r^2) r dr d\theta \quad (23)$$

και $\vec{F}(\vec{\Phi}_2) = r^3 \cos^3 \theta \hat{i} + r \sin \theta \hat{j} + 4 \hat{k} \quad (23)$

$$\Rightarrow \vec{F}(\vec{\Phi}_2) \cdot d\vec{S}_2 = 4 dxdy \quad (24)$$

Αρα αντιστ. ενίκαν. $\int$:

$$\iint_{S_1} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_1} \vec{F}(\vec{\Phi}_1) \cdot d\vec{S}_1 = \int_0^{2\pi} \int_0^2 (r^3 \cos^4 \theta + r \sin^2 \theta - r^2) r dr d\theta \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos^4 \theta d\theta &= \int_0^{2\pi} \left(1 + \frac{\cos 2\theta}{2}\right)^2 d\theta = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} (1 + 2\cos 2\theta + \cos^2 2\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{4} \left[2\pi + \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 4\theta}{2} d\theta \right] = \frac{3\pi}{4} \end{aligned}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2\theta}{2} d\theta = \pi$$

$$\Rightarrow \iint_{S_1} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_0^2 \left(\frac{3\pi}{4} r^4 + r^2 \pi - \pi r^2 \right) dr = \left[\frac{3\pi}{4} \frac{r^5}{5} + \frac{r^3}{3} \pi - \pi \frac{r^4}{2} \right]$$

$$= \frac{3\pi}{4} \cdot \frac{8^2}{5} + \frac{8\pi}{3} - 4 = \frac{24\pi}{5} + \frac{8\pi}{3} - 4\pi$$

$$= 8\pi \left(\frac{9+5-15}{15} \right) = -\frac{8\pi}{15}$$

$$\iint_{S_2} \vec{F} \cdot d\vec{S} = 4 \iint_{S_2} dx dy = 4 \cdot A(S_2) = 4 \cdot \pi 2^2 = 16\pi$$

2 επιβεβαι

$$I_2 = \int_{\partial W} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_1} \vec{F} \cdot d\vec{S} + \iint_{S_2} \vec{F} \cdot d\vec{S} = -\frac{8\pi}{15} + 16\pi = \frac{232}{15}\pi \quad \checkmark$$

Προφανώς, $I_1 = I_2$

Άσκηση για το σπίτι (Thomas 16.8.4)

Επιβεβαιώστε το θεωρ Gauss

για $\vec{F} = x^2 \hat{i} + 4xyz \hat{j} + ze^x \hat{k}$

και $W = \underset{x}{[0, 3]} \times \underset{y}{[0, 2]} \times \underset{z}{[0, 1]}$