# <u>Ασκήσεις</u>

Έστω ω p-form. Η ω λέγεται κλειστή εάν ικανοποιεί την $d\omega = 0$. Αναζητούμε μια διαφορική μορφή α τέτοια ώστε $\omega = d\alpha$. Εάν η α μπορεί βα βρεθεί τότε η ω λέγεται ακριβής.

1. Έστω $Q(q,p)$ και $P(q,p)$ λείες συναρτήσεις ορισμένες σε ένα ανοικτό σύνολο στον $\mathbb{R}^2$. Θεωρείστε τις τέσσερις διαφορικές μορφές:

$$\Omega_1 = PdQ - pdq$$

$$\Omega_2 = Pdq + qdp$$

$$\Omega_3 = QdP + pdq$$

$$\Omega_4 = Qdp - qdp$$

Α. Να δειχτεί ότι $\Omega_i$ ακριβής εάν και μόνο εάν $\Omega_j$ είναι ακριβής για j, j=1,2,3,4.

Β. Να δειχτεί ότι $\Omega_i$ κλειστή εάν και μόνο εάν $\Omega_j$ είναι κλειστή για j, j=1,2,3,4.

Γ. Να δειχτεί ότι εάν η $\Omega_i$ ακριβής (η κλειστή) τότε αυτό ισχύει και για την $\Theta = (Q-q)d(P+p) - (P-p)d(Q+q)$ [Υπενθύμιση: η $d(qp) = qdp + pdq$ είναι ακριβής.]

2. Να αποδειχθούν οι σχέσεις:

$*(\alpha \wedge \beta) = \alpha \times \beta$

$*\left[\alpha \wedge (*\beta)\right] = \alpha \cdot \beta$

και $*f = \hat{n}\sqrt{|g|}$ για βαθμωτή συνάρτηση.

3. Να αποδειχθεί το θεώρημα του Stokes σε προσανατολισμένη n-διάστατη πολλαπλότητα με σύνορο.

4. Ορίζουμε το πεδίο F στον $\mathbb{R}^3$ με $F(x) = (0,0,\gamma x^3)_x, \gamma > 0$ και έστω Μ μία συμπαγής, τρισδιάστατη πολλαπλότητα με σύνορο, με $M \subset \{x : x^3 \leq 0\}$. Μπορούμε να ερμηνεύσουμε το F ως την προς τα κάτω πίεση ρευστού πυκνότητας γ περιεχομένου στο $\{x : x^3 \leq 0\}$. Μιας και ένα ρευστό ασκεί ίση πίεση προς όλες τις κατευθύνσεις, ορίζουμε την άνωση που δέχεται η πολλαπλότητα Μ εξαιτίας του ρευστού ως $-\int_{\partial M} \langle F, n \rangle dA$. Αποδείξτε την αρχή του Αρχιμήδη: Η άνωση που δέχεται η πολλαπλότητα Μ ισούται με το βάρος του ρευστού που εκτοπίζεται από την Μ.