ΘΕΩΡΙΑ ΝΗΜΑΤΙΚΩΝ ΔΕΣΜΩΝ

Σωτηριάδης Σπύρος

Διάλεξη 1η.

1 Εφαπτόμενη Δέσμη

Για τον προσδιορισμό της κατάστασης ενός σωματιδίου στην κλασσική μηχανική απαιτείται η γνώση της θέσης και της ταχύτητάς του. Αν το σωματίδιο βρίσκεται σε ένα χώρο M που δεν είναι κατ' ανάγκη ο φυσικός χώρος (μορφικός χώρος), τότε σε κάθε σημείο του x αντιστοιχεί ένας χώρος όλων των δυνατών διανυσμάτων ή ταχυτήτων που μπορεί να έχει, ο *εφαπτόμενος χώρος* (*tangent space*) T_xM. Αυτός είναι ο διανυσματικός χώρος όλων των διανυσμάτων των εφαπτόμενων σε κάποια καμπύλη που διέρχεται από το x, στο σημείο αυτό. Αν συγκολλήσουμε τους εφαπτόμενους χώρους T_xM όλων των σημείων του M τότε παίρνουμε την *εφαπτόμενη δέσμη* (*tangent bundle*) TM, δηλαδή

$$TM = \bigcup_{x\in M} T_xM$$

όπου η ένωση είναι διαζευκτική δηλαδή οι εφαπτόμενοι χώροι σε διαφορετικά σημεία είναι διακριτοί. Αν ο χώρος M είναι πολλαπλότητα διάστασης n τότε κάθε εφαπτόμενος χώρος είναι επίσης n-διάστατος και η TM είναι πολλαπλότητα διάστασης $2n$.

Ένα σημείο της εφαπτόμενης δέσμης προσδιορίζεται από το σημείο x της M στον εφαπτόμενο χώρο του οποίου βρίσκεται και από το διάνυσμα u_x του χώρου αυτού, δηλαδή από τη θέση και τη ταχύτητα. Συνεπώς ο χώρος των καταστάσεων του σωματιδίου είναι ο TM. Οι εφαπτόμενοι χώροι T_xM ονομάζονται *νήματα* (*fibres*) της εφαπτόμενης δέσμης και η πολλαπλότητα M *βάση* (*base*), γιατί πάνω σ' αυτή «συγκολλώνται» τα νήματα. Μπορούμε να αντιστοιχήσουμε κάθε σημείο (x, u_x) της δέσμης πίσω στο σημείο x της βάσης. Η απεικόνιση αυτή π έχει προβολικές ιδιότητες και γι' αυτό ονομάζεται *προβολή* (*projection*)

$$\begin{aligned}\pi: \quad TM &\to M\\ (x, u_x) &\to x\end{aligned}$$

Άρα ένα συγκεκριμένο νήμα, αυτό που αντιστοιχεί στο σημείο x, είναι το σύνολο των σημείων της δέσμης που προβάλλονται στο x

$$\pi^{-1}(x) = T_x M$$

και καλείται το νήμα πάνω από το x. Νήματα που αντιστοιχούν σε διαφορετικά σημεία δεν έχουν καμία άλλη ουσιαστική διαφορά. Αντίθετα όλα τα νήματα είναι ισομορφικά με τον $\mathbb{R}^n$, δηλαδή είναι αντίγραφα του ίδιου χώρου $F = \mathbb{R}^n$ που ονομάζεται *τυπικό νήμα* (*typical fibre*).

Η εφαπτόμενη δέσμη είναι τοπικά τετριμμένη. Αυτό σημαίνει ότι αν περιοριστούμε σε μια αρκούντως μικρή περιοχή U της M τότε μπορούμε να δούμε τη λωρίδα $\pi^{-1}(U)$ ως ένα απλό καρτεσιανό γινόμενο των χώρων U και F, δηλαδή ότι μπορούμε να απεικονίσουμε την $\pi^{-1}(U)$ στην $U \times F$ και αντίστροφα. Η ιδιότητα αυτή εξασφαλίζει πολύ απλά ότι μπορούμε πράγματι να προσδιορίσουμε ένα στοιχείο της TM από το ζεύγος (x, y) όπου $x \in U$ και $y \in F$ και εν τέλει να ορίσουμε συντεταγμένες πάνω στη δέσμη, μέσω της παραπάνω απεικόνισης. Ωστόσο η απεικόνιση αυτή εξαρτάται από την περιοχή U. Έτσι στην τομή δύο τέτοιων περιοχών U και V θα πρέπει οι αντίστοιχες απεικονίσεις να συμφωνούν μεταξύ τους (να είναι συμβιβαστές), δηλαδή να μπορούμε να μετασχηματίσουμε τη μία στην άλλη. Οι μετασχηματισμοί αυτοί συνιστούν ομάδα που ονομάζεται *δομική ομάδα* (*structure group*). Η δομική ομάδα καθορίζει λοιπόν τον τρόπο «συρραφής» των νημάτων. Το φυσικό νόημα των παραπάνω γίνεται κατανοητό με το ακόλουθο παράδειγμα.

Εφαρμογή 1.1. *Ας θεωρήσουμε την εφαπτόμενη δέσμη που έχει ως βάση τον 4-διάστατο χωρόχρονο. Τα νήματα είναι χώροι Minkowski αφού ο χωρόχρονος είναι τοπικά επίπεδος. Οι προαναφερθείσες απεικονίσεις αντιστοιχούν στον τρόπο με τον οποίο μετρούν δύο διαφορετικοί παρατηρητές. Η ίδια τετραταχύτητα έχει διαφορετικές συνιστώσες στα συστήματα αναφοράς των δύο παρατηρητών, αλλά αυτές συμφωνούν μεταξύ τους, υπό την έννοια ότι συνδέονται με ένα μετασχηματισμό Lorentz. Συνεπώς η δομική ομάδα είναι η ομάδα Lorentz.*

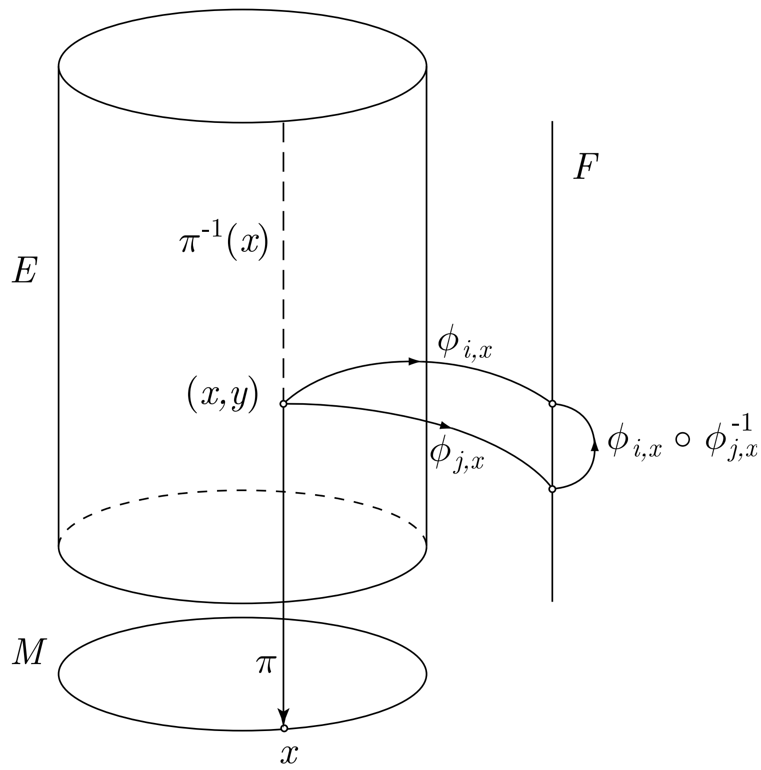
Ανακύπτει το ερώτημα γιατί να χρησιμοποιηθεί η περίπλοκη έννοια της εφαπτόμενης δέσμης αντί της απλούστερης έννοιας του καρτεσιανού γινομένου $M \times F$. Η απάντηση είναι ότι μία εφαπτόμενη δέσμη (και γενικότερα μία νηματική δέσμη) είναι μόνο τοπικά τετριμμένη και όχι ολικά, στη γενική περίπτωση. Αν είναι ολικά, τότε χαρακτηρίζεται *τετριμμένη δέσμη* (*trivial bundle*) και είναι ομομορφική με τη *δέσμη-γινόμενο* (*product bundle*) $M \times F$.

Διάλεξη 2η.

2 Νηματική Δέσμη

Έχοντας εντοπίσει τα βασικά χαρακτηριστικά μιας εφαπτόμενης δέσμης μπορούμε να τη γενικεύσουμε εισάγοντας την έννοια της *νηματικής δέσμης* (*fibre bundle*) E (σχήμα 1). Η διαφορά είναι ότι αντί του εφαπτόμενου χώρου, επιλέγουμε ως νήμα οποιονδήποτε άλλο χώρο, υπό ορισμένες προϋποθέσεις.

Ορισμός 2.1 (Νηματική Δέσμη). *Μια νηματική δέσμη* (E, M, F, π, G) *συνίσταται από τις διαφορίσιμες πολλαπλότητες:* E *(ολικός χώρος),* M *(βάση),* F *(τυπικό νήμα), την ομάδα Lie* G *(δομική ομάδα) και την ομαλή, επί απεικόνιση* $\pi : E \to M$ *(προβολή), που ικανοποιούν τις εξής συνθήκες:*



Σχήμα 1: Νηματική δέσμη.

1. *Η νηματική δέσμη είναι τοπικά τετριμμένη, δηλαδή αν* $\{U_i\}$ *είναι ένα πλήρες σύνολο περιοχών χαρτών της βάσης* M*, τότε υπάρχουν αμφιδιαφορίσιμες απεικονίσεις* ϕ_i *που εξαρτώνται από την περιοχή* U_i*, τέτοιες*

ώστε

$$\phi_i : \pi^{-1}(U_i) \to U_i \times F$$

και επιπλέον

$$\pi(\phi_i^{-1}(x,y)) = x, \quad x \in U, y \in F$$

Η απαίτηση αυτή καθορίζει το ρόλο της προβολής π.

2. *Οι αμφιδιαφορίσιμες απεικονίσεις*

$$\begin{aligned} \phi_{i,x} : \pi^{-1}(x) &\to F \\ \phi_i^{-1}(x,y) &\to y \end{aligned}$$

είναι συμβιβαστές στην περιοχή επικάλυψης δύο περιοχών $U_i \cap U_j$, *υπό την έννοια ότι η σύνθεση*

$$\phi_{i,x} \circ \phi_{j,x}^{-1} : F \to F$$

ταυτίζεται με τη δράση ενός στοιχείου της ομάδας G *πάνω στο νήμα* F. *Η συνθήκη αυτή καθορίζει το ρόλο της δομικής ομάδας.*

3. *Οι απεικονίσεις*

$$\begin{aligned} g_{ij} : U_i \cap U_j &\to G \\ x &\to g_{ij}(x) = \phi_{i,x} \circ \phi_{j,x}^{-1} \end{aligned}$$

που αντιστοιχούν το x *στο προαναφερθέν στοιχείο της ομάδας είναι ομαλές. Οι απεικονίσεις αυτές ονομάζονται μεταβατικές συναρτήσεις* (*transition functions*).

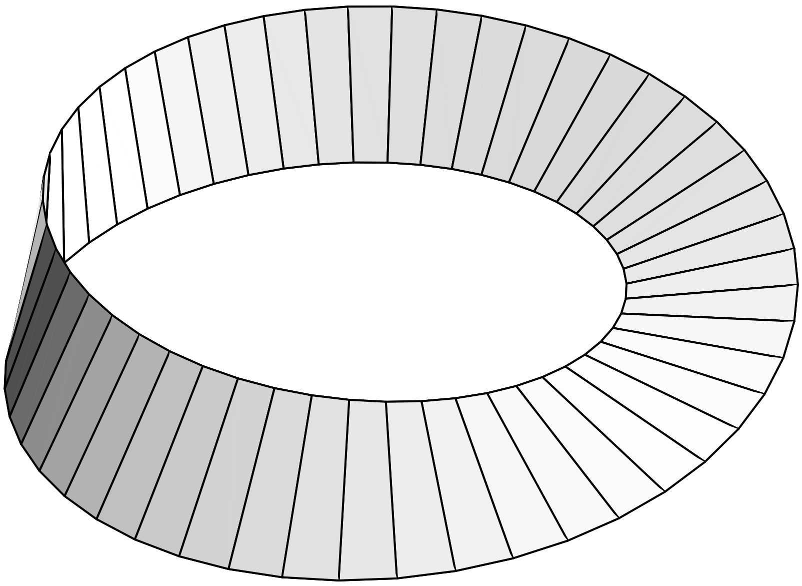
Οι συνθήκες που αφορούν στις απεικονίσεις ϕ_i εξασφαλίζουν όπως προαναφέρθηκε τη δυνατότητα προσδιορισμού της θέσης ενός σημείου της δέσμης από το ζεύγος (x, y) και ταυτόχρονα τα απαραίτητα χαρακτηριστικά διαφορισιμότητας που επιτρέπουν τον εξοπλισμό της δέσμης με διαφορογεωμετρικές δομές (μετρική, συνοχή κ.λπ.). Σημειώνεται ότι τα νήματα δε συνδέονται μεταξύ τους με κάποιο φυσικό τρόπο. Η ιδιότητα της τοπικής τετριμμενοποίησης προσφέρει μόνο τοπολογική συνέχεια των γειτονικών νημάτων, επαγόμενη από τη συνέχεια των $U \times F$.

Εφόσον μια νηματική δέσμη είναι τοπικά τετριμμένη, ο χώρος E που προκύπτει από την συγκόλληση των νημάτων στη βάση και ονομάζεται *ολικός χώρος* (*total space*) της δέσμης, κληρονομεί από τη βάση και το νήμα το χαρακτήρα της πολλαπλότητας και έχει διάσταση $dimE = dimM + dimF$. Τα ζεύγη (U_i, ϕ_i) συνιστούν ουσιαστικά τους χάρτες της δέσμης και ονομάζονται *τοπικές τετριμμενοποιήσεις* (*local trivializations*). Αν υπάρχει μια αμφιδιαφορίσιμη απεικόνιση

$$\Phi : E \to M \times F$$

πάνω σε ολόκληρο τον ολικό χώρο, τότε η δέσμη λέγεται *τετριμμένη* (*trivial*) και ανάγεται στην $(M \times F, M, F, pr_M, \{e\})$.

Εφαρμογή 2.1. *Παράδειγμα μη τετριμμένης νηματικής δέσμης αποτελεί η λωρίδα του Möbius (σχήμα 2). Μπορούμε να την κατασκευάσουμε κόβοντας έναν κύλινδρο $S^1 \times [0,1]$ κατά μήκος ενός νήματος, στρίβοντας την ανοιχτή λωρίδα που προκύπτει και κολλώντας την ξανά. Το στρίψιμο έχει σαν συνέπεια η λωρίδα να μην απεικονίζεται πλέον με συνεχή τρόπο στον αρχικό κύλινδρο $S^1 \times [0,1]$ (υπάρχει ασυνέχεια στη θέση κοπής) και έτσι ο μέγιστος χάρτης περιλαμβάνει όλη τη λωρίδα εκτός από ένα νήμα. Ένας επιπλέον χάρτης που θα «μπαλώσει» το κόψιμο, θα βλέπει αναποδογυρισμένα τα νήματα στο ένα άκρο της λωρίδας και επομένως για να συμφωνεί με τον άλλο χάρτη, θα πρέπει η δομική ομάδα να επιτρέπει αναποδογύρισμα του νήματος, δηλαδή να έχει δύο στοιχεία. Άρα $G = \mathbb{Z}_2$.*



Σχήμα 2: Η λωρίδα του Möbius.

Από το παραπάνω παράδειγμα μπορούμε να καταλάβουμε γιατί μια νηματική δέσμη περιγράφεται συνοπτικά ως «συνεστραμμένο» γινόμενο χώρων. Ειδικές περιπτώσεις νηματικών δεσμών με ιδιαίτερο ενδιαφέρον είναι οι εξής:

- η εφαπτόμενη δέσμη που μελετήσαμε προηγουμένως και μπορούμε πλέον να προσαρμόσουμε στη γενικότερη έννοια της νηματικής δέσμης συμβολίζοντάς την ως $(TM, M, \mathbb{R}^n, \pi, GL(n, \mathbb{R}))$. Η δομική ομάδα είναι η $GL(n, \mathbb{R})$ (ομάδα των $n \times n$ πραγματικών πινάκων) που είναι η γενικότερη ομάδα γραμμικών μετασχηματισμών από τον $\mathbb{R}^n$ στον $\mathbb{R}^n$ (μετασχηματισμών αλλαγής συντεταγμένων).

- η *συνεφαπτόμενη δέσμη* (*cotangent bundle*) T^*M όπου, αντί του εφαπτόμενου χώρου, θεωρούμε ως νήμα τον συνεφαπτόμενο χώρο T_x^*M. Αυτός είναι ο δυικός χώρος του T_xM, δηλαδή ο χώρος των αντικειμένων που όταν πολλαπλασιαστούν εσωτερικά με τα στοιχεία του T_xM δίνουν αριθμούς (π.χ. ο χώρος των συναλλοίωτων διανυσμάτων στην περίπτωση της σχετικότητας ή των γενικευμένων ορμών στην περίπτωση της κλασσικής μηχανικής).

Εφαρμογή 2.2. *Η συνεφαπτόμενη δέσμη του μορφικού χώρου ενός μηχανικού συστήματος αποτελείται από τα ζεύγη (q, p) και είναι ο φασικός χώρος του συστήματος.*

- η *τανυστική δέσμη* (*tensor bundle*) T_b^aM όπου το νήμα είναι ο χώρος T_b^a των τανυστών τάξης (a, b) στο x. Αυτός είναι γινόμενο a εφαπτόμενων και b συνεφαπτόμενων χώρων, δηλαδή

$$T_b^a = \underbrace{T_xM \otimes \ldots \otimes T_xM}_{a \text{ φορές}} \otimes \underbrace{T_x^*M \otimes \ldots \otimes T_x^*M}_{b \text{ φορές}}$$

  και επομένως είναι ισόμορφος με τον $\mathbb{R}^{n^{a+b}}$.

- η *διανυσματική δέσμη* (*vector bundle*), όπου το νήμα είναι ένας διανυσματικός χώρος $F = V$. Άρα $G = GL(n, \mathbb{R})$ (ομάδα των $n \times n$ πραγματικών πινάκων που είναι η γενικότερη ομάδα μετασχηματισμών) ή $G = GL(n, \mathbb{C})$. Κάθε εφαπτόμενη, συνεφαπτόμενη ή τανυστική δέσμη είναι προφανώς και διανυσματική δέσμη.

- η *κύρια νηματική δέσμη* (*principal bundle*), όπου το νήμα ταυτίζεται με τη δομική ομάδα $F = G$, η δράση της οποίας πάνω στο νήμα είναι πολλαπλασιασμός από αριστερά (αργότερα θα δούμε έναν ισοδύναμο αλλά πιο κατανοητό διαισθητικά ορισμό).

- η *σπινοριακή δέσμη* (*spinor bundle*), όπου η βάση είναι ο τετραδιάστατος χωρόχρονος, το νήμα είναι ένας 2-διάστατος μιγαδικός διανυσματικός χώρος C και η δομική ομάδα είναι η ομάδα Lorentz $\Lambda_{1/2}$ ή η καλύπτουσα ομάδα αυτής $SL(2, \mathbb{C})$.

Η παρακάτω εφαρμογή από την αναλυτική μηχανική δίνει ένα παράδειγμα κύριας νηματικής δέσμης, ενώ παρουσιάζει με διαισθητικό τρόπο τις έννοιες της συνοχής και καμπυλότητας της δέσμης που θα αναλυθούν αργότερα.

Εφαρμογή 2.3. *Θεωρούμε μια σφαίρα που επιτρέπεται να κινείται μόνο πάνω σε μια δισδιάστατη επιφάνεια. Για τον πλήρη προσδιορισμό της διάταξης του συστήματος πρέπει να γνωρίζουμε την θέση της σφαίρας πάνω στην επιφάνεια και τον προσανατολισμό της. Δηλαδή ο μορφικός χώρος του μηχανικού αυτού συστήματος είναι τοπικά το γινόμενο του χώρου M, δηλαδή της πολλαπλότητας που περιγράφει τη δισδιάστατη επιφάνεια, και του χώρου όλων των δυνατών προσανατολισμών της σφαίρας που ταυτίζεται με την ομάδα των στροφών στον τρισδιάστατο χώρο, $SO(3)$. Συνεπώς ο μορφικός χώρος μπορεί να θεωρηθεί ως δέσμη με βάση M και νήμα την ομάδα $SO(3)$. Μάλιστα η δέσμη είναι κύρια, γιατί η δομική ομάδα είναι επίσης η $SO(3)$, αφού αλλαγή συντεταγμένων στην επιφάνεια M συνεπάγεται και στροφή του χώρου των προσανατολισμών της σφαίρας.*

Ας υποθέσουμε τώρα ότι η σφαίρα δεν ολισθαίνει αλλά μόνο κυλίεται πάνω στην επιφάνεια. Η συνθήκη κύλισης επιβάλλει ένα σύνδεσμο, αφού μια στοιχειώδης μετατόπιση της σφαίρας πάνω στην επιφάνεια συνοδεύεται και από μια στοιχειώδη αλλαγή του προσανατολισμού της (στροφή) με καθορισμένο τρόπο. Έτσι λοιπόν ο σύνδεσμος είναι ένας κανόνας που μας λέει σε ποια διεύθυνση να κινηθούμε στη δέσμη, όταν δίνεται μια διεύθυνση κίνησης πάνω στη βάση και αυτός είναι με απλά λόγια ο ορισμός της συνοχής. Επίσης μπορούμε να δούμε ότι ο σύνδεσμος περιορίζει τις δυνατές γενικευμένες ταχύτητες που μπορεί να έχει το σύστημα, αφού επιβάλλει μια εξάρτηση των τριών ταχυτήτων που αντιστοιχούν στο ρυθμό μεταβολής των τριών γωνιών Euler που προσδιορίζουν τον προσανατολισμό της σφαίρας από τις δύο ταχύτητες του κέντρου μάζας της σφαίρας. Δηλαδή διαιρεί τον εφαπτόμενο χώρο της δέσμης (στον υπόχωρο των επιτρεπτών ταχυτήτων και στον συμπληρωματικό του) και αυτός είναι ένας ισοδύναμος ορισμός της συνοχής. Αν η σφαίρα ακολουθήσει μια καμπύλη πάνω στην επιφάνεια τότε αυτομάτως προσδιορίζεται μέσω του συνδέσμου και η καμπύλη που ακολουθεί το σύστημα πάνω στη δέσμη. Αυτή ονομάζεται οριζόντια ανύψωση της καμπύλης της βάσης.

Τέλος η στοιχειώδης στροφή της σφαίρας όταν αυτή κυλίεται κατά μήκος μιας απειροστής κλειστής διαδρομής πάνω στην επιφάνεια δίνεται από την καμπυλότητα. Δεδομένου ότι οι στροφές γύρω από διαφορετικούς άξονες δε μετατίθενται, η καμπυλότητα θα είναι μη μηδενική ακόμα και για επίπεδη επιφάνεια.

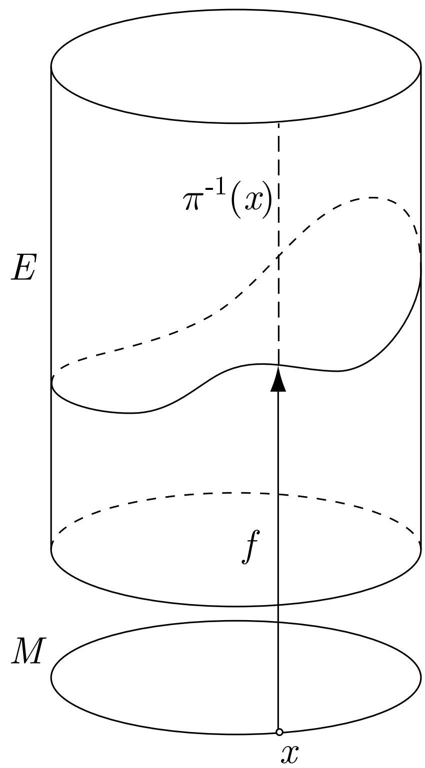
3 Διατομές

Θεωρούμε μια εφαπτόμενη δέσμη TM. Ένα διανυσματικό πεδίο πάνω στη βάση M, αντιστοιχεί σε κάθε σημείο x της M ένα διάνυσμα του εφαπτόμενου χώρου της M στο ίδιο σημείο, δηλαδή του T_xM. Ισοδύναμα λοιπόν μπορούμε να πούμε ότι απεικονίζει το x στο στοιχείο (x, u_x) της TM όπου $u_x \in T_xM$. Γενικεύοντας σε μια νηματική δέσμη, ορίζουμε ως *διατομή* (*cross-section*) μια απεικόνιση f από ένα σημείο x της βάσης της σε ένα σημείο του ολικού χώρου που βρίσκεται στο νήμα πάνω από το x, δηλαδή $\pi(f(x)) = x$. Οι διατομές ορίζουν πεδία πάνω στη βάση της νηματικής δέσμης (σχήμα 3).

Ορισμός 3.1 (Διατομή). *Μια απεικόνιση $f : M \to E$ τέτοια ώστε*

$$\pi \circ f = id_M$$

(ταυτοτική απεικόνιση της M) ονομάζεται διατομή της νηματικής δέσμης.



Σχήμα 3: Διατομή σε νηματική δέσμη.

Η ύπαρξη συνεχών διατομών ορισμένων σε ολόκληρη τη βάση δεν είναι δυνατή για κάθε δέσμη. Οι τετριμμένες δέσμες έχουν πάντα διατομές. Οι διανυσματικές δέσμες έχουν μία τουλάχιστον διατομή, τη *μηδενική*, δηλαδή αυτή που διέρχεται από την αρχή κάθε νήματος-διανυσματικού χώρου.