ΘΕΩΡΙΑ ΝΗΜΑΤΙΚΩΝ ΔΕΣΜΩΝ

Σωτηριάδης Σπύρος

Διάλεξη 3η.

4 Συνοχή και Συναλλοίωτη Παράγωγος

Ας θεωρήσουμε την εφαπτόμενη δέσμη TE του ολικού χώρου E μιας νηματικής δέσμης, δηλαδή το χώρο που αποτελείται από την ένωση όλων των εφαπτόμενων χώρων σε σημεία του E. Η χρησιμότητα μελέτης αυτού του χώρου είναι εύλογη, αφού για παράδειγμα για να συντεταγμενοποιήσουμε τον E θα χρειαστεί να ορίσουμε διανύσματα πάνω σ' αυτόν, δηλαδή στοιχεία των εφαπτόμενων χώρων του. Το γεγονός ότι ο E συντίθεται από νήματα υποδεικνύει ένα φυσικό τρόπο ανάλυσης ενός διανύσματος $\boldsymbol{X}$ στο σημείο p με συντεταγμένες (x, y): το $\boldsymbol{X}$ θα έχει μια συνιστώσα εφαπτόμενη στο νήμα όπου ανήκει το p. Έτσι μπορούμε να διαιρέσουμε τον T_pE σε δύο υπόχωρους, έναν που αποτελείται από διανύσματα εφαπτόμενα στο αντίστοιχο νήμα και ονομάζεται ***κατακόρυφος*** (*vertical*) V_pE, και τον συμπληρωματικό του, δηλαδή αυτόν που αποτελείται από όλα τα άλλα διανύσματα του T_pE και ονομάζεται *οριζόντιος* (*horizontal*) H_pE

$$T_pE = V_pE \oplus H_pE$$

Το σύμβολο $\oplus$ σημαίνει ευθύ άθροισμα, δηλαδή ένωση μη τεμνόμενων υπόχωρων. Οι ονομασίες τους εξηγούνται αν αναπαραστήσουμε τη νηματική δέσμη όπως για παράδειγμα στο σχήμα 1 για την $TS^1 = S^1 \times \mathbb{R}$. Τα νήματα υψώνονται κατακόρυφα πάνω από τη βάση και γι' αυτό ο υπόχωρος των διανυσμάτων που εφάπτονται σ' αυτά ονομάζεται κατακόρυφος. Αφού $dimT_pE = dimE = dimM + dimF$ και $dimV_pE = dimF$ έχουμε $dimH_pE = dimE - dimF = dimM$.

Μια βάση του κατακόρυφου υπόχωρου θα είναι προφανώς της μορφής

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial y^i} \right\}$$

αφού αυτά τα διανύσματα είναι εφαπτόμενα στο νήμα. Όμως ο οριζόντιος υπόχωρος δεν προσδιορίζεται πλήρως από την απαίτηση να είναι συμπληρωματικός του κατακόρυφου. Η βαθύτερη αιτία αυτού είναι ότι η κατασκευή της δέσμης δεν υποβάλλει σε ποιά σημεία θα συρραφούν δύο γειτονικά νήματα, αν και εξασφαλίζει τη συνέχεια μεταξύ τους (δηλαδή γνωρίζουμε την γειτονιά κάθε σημείου). Εποπτικά, στη δέσμη TS^1 δεδομένου ενός σημείου της p δε μπορούμε να πούμε ποιο από τα σημεία ενός γειτονικού νήματος βρίσκεται στον ίδιο «οριζόντιο κύκλο». Μια επιλογή θα ήταν να ορίσουμε τον H_pE έτσι ώστε τα διανύσματά του να κατευθύνονται προς σημεία με το ίδιο y με το p, που σημαίνει ότι η βάση του θα ήταν της μορφής $\{\partial/\partial x^j\}$ και οι «οριζόντιοι κύκλοι» θα ήταν αυτοί με σταθερό y, αλλά τότε θα έπρεπε να αναφερόμαστε σε ένα συγκεκριμένο χάρτη και για να είναι η επιλογή μονοσήμαντη θα έπρεπε να ορίσουμε τη βάση σε άλλους χάρτες *διαφορετικά*, ανάλογα με το μετασχηματισμό από τον ένα χάρτη στον άλλο. Έτσι γενικά τα διανύσματα του οριζόντιου υπόχωρου είναι γραμμικοί συνδυασμοί των $\frac{\partial}{\partial x^j}$ και $\frac{\partial}{\partial y^j}$, οπότε η βάση του θα είναι της μορφής

$$\left\{\frac{\partial}{\partial x^i} - N_i^j(x,y)\frac{\partial}{\partial y^j}\right\}$$

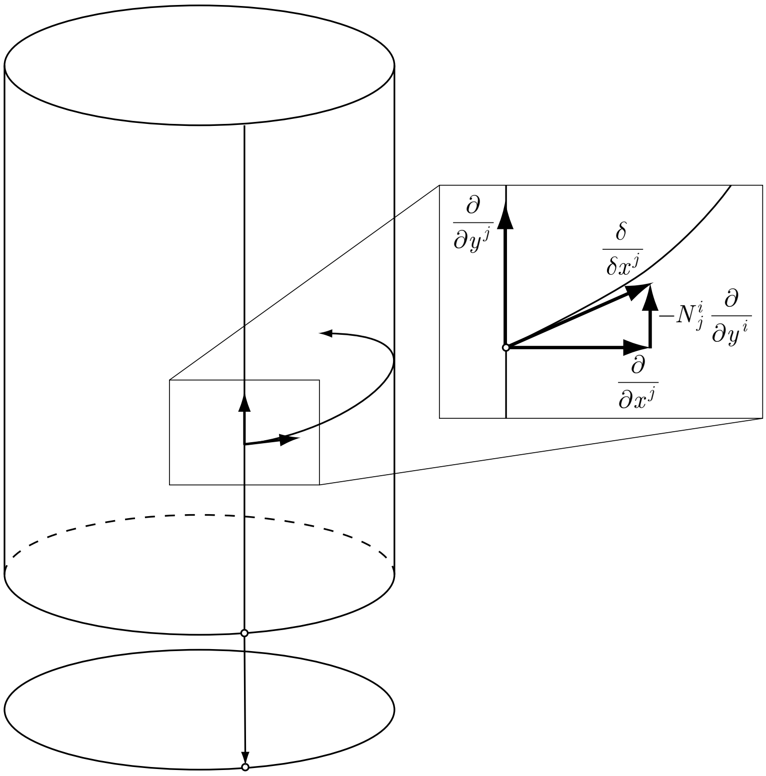
Βλέπουμε λοιπόν ότι μπορούμε να επιλέξουμε πώς θα ορίσουμε τον οριζόντιο υπόχωρο και για να το κάνουμε πρέπει να εφοδιάσουμε τη δέσμη με μια πρόσθετη δομή που θα καθορίσει τις συναρτήσεις N_i^j. Από την άλλη πλευρά, είναι φανερό ότι μια τέτοια δομή σχετίζεται με την έννοια της παράλληλης μετατόπισης των στοιχείων του νήματος, αφού η τελευταία αναφέρεται στο πώς μπορούμε να μεταφέρουμε «αμετάβλητο», ένα στοιχείο ενός νήματος σε ένα στοιχείο ενός γειτονικού νήματος. Επομένως παρέχει ένα κανόνα σύνδεσης τον νημάτων, άρα και ορισμού του οριζόντιου υπόχωρου. Τώρα επειδή η παράλληλη μετατόπιση συνδέεται με την έννοια της συνοχής, έχουμε μια ένδειξη ότι η επιπλέον δομή που πρέπει να εισαχθεί είναι αυτή της συνοχής.

Συνεχίζοντας αυτή τη διερεύνηση, ας θεωρήσουμε την ειδική περίπτωση της εφαπτόμενης δέσμης TM. Έστω $\boldsymbol{Y} = y^i\frac{\partial}{\partial x^i}$ ένα διάνυσμα του εφαπτόμενου χώρου του σημείου x της M. Μετατοπίζουμε παράλληλα το $\boldsymbol{Y}$ σε ένα γειτονικό σημείο $x + dx^i$ και παρακολουθούμε τη διαδικασία από τη σκοπιά της TM. Η παράλληλη αυτή μετατόπιση ισοδυναμεί με μετατόπιση του σημείου (x, y) της δέσμης στο σημείο $(x + dx^i, y + dy^i)$ που ανήκει σε γειτονικό νήμα, όπου το dy^i προσδιορίζεται από τη σχέση που ορίζει την παράλληλη μετατόπιση στην κατεύθυνση του dx^i, που είναι η $D\boldsymbol{Y} = 0$ δηλαδή

$$dy^i + \Gamma^i{}_{jk}y^j dx^k = 0$$

$$dy^i = -\Gamma^i{}_{jk}y^j dx^k$$

όπου D είναι η συναλλοίωτη παράγωγος και $\Gamma^i{}_{jk}$ τα σύμβολα Christoffel, όπως ορίστηκαν στη Γενική Σχετικότητα ή τη γεωμετρία Riemann. Άρα το διάνυσμα



Σχήμα 1: Ανάλυση σε κατακόρυφο και οριζόντιο υπόχωρο μέσω της εισαγωγής συνοχής.

που δίνει τη μετατόπιση του σημείου της δέσμης είναι

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^i} - \Gamma^j_{li} y^l \frac{\partial}{\partial y^j}\right) dx^i$$

Ο πρώτος όρος υποδηλώνει τη μετακίνηση στο γειτονικό νήμα και ο δεύτερος την κατακόρυφη μετακίνηση (δηλαδή στη διεύθυνση του νήματος), εξαιτίας της παράλληλης μετατόπισης. Ορίζοντας σύμφωνα με τα προηγούμενα τον οριζόντιο υπόχωρο ως τον χώρο που παράγεται από τα διανύσματα αυτά, συμπεραίνουμε ότι πρέπει να θέσουμε

$$N^j_k = \Gamma^j{}_{lk} y^l \tag{4.1}$$

Τα N^j_k ορίζουν μια *συνοχή* (*connection*) της εφαπτόμενης δέσμης. Διαπιστώνουμε λοιπόν ότι από τη συνοχή της βάσης M μπορούμε να κατασκευάσουμε τη συνοχή της εφαπτόμενης δέσμης TM και να ορίσουμε την παράλληλη μετατόπιση κατευθείαν πάνω στη δέσμη.

Ένας μετασχηματισμός συντεταγμένων της βάσης $\bar{x}^i = \bar{x}^i(x^r)$ επάγει έναν ανάλογο μετασχηματισμό συντεταγμένων στα νήματα, λόγω της ανταλλοίωτης φύσης των στοιχείων τους, δηλαδή των διανυσμάτων y^j. Έτσι οι συντεταγμένες της εφαπτόμενης δέσμης μετασχηματίζονται ως εξής

$$\begin{cases} \bar{x}^i = \bar{x}^i(x^r) \\ \bar{y}^j = \dfrac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^l} y^l \end{cases} \tag{4.2}$$

Ο νόμος μετασχηματισμού των συμβόλων Christoffel είναι

$$\bar{\Gamma}^i_{jk} = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^r}\frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^k}\Gamma^r{}_{st} + \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^r}\frac{\partial^2 x^r}{\partial \bar{x}^j \partial \bar{x}^k}$$

οπότε η συνοχή N^i_j της δέσμης μετασχηματίζεται ως

$$\bar{N}^i_j = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^r}\left(\frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^j}N^r_s + \frac{\partial^2 x^r}{\partial \bar{x}^j \partial \bar{x}^k}\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^l}y^l\right) = \frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^j}\left(\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^r}N^r_s - \frac{\partial^2 \bar{x}^i}{\partial x^s \partial x^l}y^l\right)$$

Παρατηρούμε ότι η συνοχή δε συνιστά τανυστή.

Εφαρμογή 4.1. *Στη γενικότερη περίπτωση μιας οποιασδήποτε διανυσματικής δέσμης, τα νήματα μετασχηματίζονται γραμμικά μεν, αλλά ανεξάρτητα από τον μετασχηματισμό συντεταγμένων της βάσης, δηλαδή ο γενικότερος μετασχηματισμός συντεταγμένων της δέσμης είναι*

$$\begin{cases} \bar{x}^i = \bar{x}^i(x^r) \\ \bar{y}^j = M^j_l(x^r) y^l \end{cases} \tag{4.3}$$

και κάτω από ένα τέτοιο μετασχηματισμό η συνοχή N^i_j της δέσμης μετασχηματίζεται ως εξής

$$\bar{N}^i_j = \frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^j}\left(M^i_r(x)N^r_s - \frac{\partial M^i_l(x)}{\partial x^s}y^l\right) \tag{4.4}$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω, μια πλήρης βάση του εφαπτόμενου χώρου προσαρμοσμένη στην παραπάνω ανάλυσή του σε οριζόντιο και κατακόρυφο υπόχωρο, είναι

$$\left\{\frac{\delta}{\delta x^i}, \frac{\partial}{\partial y^j}\right\}, \text{ όπου } \frac{\delta}{\delta x^i} \equiv \frac{\partial}{\partial x^i} - N^j_i \frac{\partial}{\partial y^j} \tag{4.5}$$

Το πρώτο μέρος δίνει τη βάση του οριζόντιου και το δεύτερο του κατακόρυφου υπόχωρου. Η δυική της βάση, δηλαδή η βάση του δυικού χώρου του

T_pTM που είναι ο T_p^*TM και η οποία ορίζεται έτσι ώστε να ισχύει η συνθήκη «ορθοκανονικότητας», είναι

$$\left\{dx^i, \delta y^j\right\}, \text{ όπου } \delta y^j \equiv dy^j + N_i^j dx^i$$

Μπορούμε να το επιβεβαιώσουμε υπολογίζοντας τα «εσωτερικά γινόμενα» μεταξύ των στοιχείων των βάσεων

$$\left\langle dx^i, \frac{\delta}{\delta x^j} \right\rangle = \delta_j^i, \qquad \left\langle \delta y^i, \frac{\delta}{\delta x^j} \right\rangle = 0,$$
$$\left\langle dx^i, \frac{\partial}{\partial y^j} \right\rangle = 0, \qquad \left\langle \delta y^i, \frac{\partial}{\partial y^j} \right\rangle = \delta_j^i$$

που αποτελούν τις σωστές συνθήκες ορθοκανονικότητας[1]. Οι βάσεις αυτές μετασχηματίζονται κάτω από τους μετασχηματισμούς (4.2) ως εξής

$$\frac{\delta}{\delta x^i} = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i}\frac{\delta}{\delta \bar{x}^j}, \quad \frac{\partial}{\partial y^i} = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial \bar{y}^j}, \quad d\bar{x}^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j}dx^j, \quad \delta \bar{y}^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j}\delta y^j$$

δηλαδή σαν ανταλλοίωτα και συναλλοίωτα διανύσματα αντίστοιχα.

Γενικεύοντας για οποιαδήποτε νηματική δέσμη, παρατηρούμε ότι ορίζοντας μια συνοχή της δέσμης έχουμε ορίσει μονοσήμαντα τον οριζόντιο υπόχωρο κάθε σημείου του ολικού χώρου E (σχήμα 1) και με βάση αυτή την ανάλυση των εφαπτόμενων χώρων του E μπορούμε να ορίσουμε την έννοια της παράλληλης μετατόπισης. Αντίστροφα, αν έχουμε προσδιορίσει τους οριζόντιους υπόχωρους, έχουμε ορίσει μέσω των συναρτήσεων N_i^j μια συνοχή και επομένως ένα κανόνα παράλληλης μετατόπισης. Οι συνιστώσες N_i^j της συνοχής (4.1) που ορίσαμε για τον εφαπτόμενο χώρο είναι γραμμικές ως προς τις μεταβλητές του νήματος y και γι' αυτό η συνοχή ονομάζεται *γραμμική*. Βεβαίως αυτό δεν ισχύει στη γενική περίπτωση μιας οποιασδήποτε νηματικής δέσμης, οπότε η συνοχή ονομάζεται *μη γραμμική συνοχή* (*nonlinear connection*).

Ορισμός 4.1 (Συνοχή). *Η συνοχή μιας νηματικής δέσμης είναι ένας κανόνας που προσδιορίζει για κάθε σημείο p του ολικού της χώρου E, τον οριζόντιο υπόχωρο H_pE του εφαπτόμενου χώρου T_pE. Η συνοχή καθορίζεται από τις συναρτήσεις N_j^i που δίνουν τα διανύσματα βάσης του H_pE.*

[1] Ακόμα, αν υποθέταμε για τα διανύσματα της δυικής βάσης ένα γενικό γραμμικό συνδυασμό των dx^i και dy^j, απαιτώντας να ισχύουν οι παραπάνω συνθήκες θα καταλήγαμε στην παραπάνω βάση.

Η ανάλυση όλων των εφαπτόμενων χώρων του E σε κατακόρυφους και οριζόντιους υπόχωρους μάς επιτρέπει να γράφουμε[2]

$$TE = VE \oplus HE$$

όπου VE και HE η κατακόρυφη και η οριζόντια υποδέσμη της TE αντίστοιχα.

Έχοντας ορίσει την έννοια της συνοχής, μπορούμε να προχωρήσουμε στην εισαγωγή της συναλλοίωτης παραγώγου, όπως και στην περίπτωση της γεωμετρίας Riemann. Η *συναλλοίωτη παράγωγος* (*covariant derivative*) D_μ είναι ο ρυθμός μεταβολής μιας συνάρτησης ορισμένης πάνω στον ολικό χώρο της δέσμης, σε οριζόντια κατεύθυνση δηλαδή

$$D_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} - N^j_\mu \frac{\partial}{\partial y^j} \tag{4.6}$$

Επειδή ως γνωστόν, παράγωγος και διάνυσμα είναι ουσιαστικά το ίδιο γεωμετρικό αντικείμενο αφού η παράγωγος ορίζεται σε μια συγκεκριμένη κατεύθυνση, η συναλλοίωτη παράγωγος αναπαριστά ένα οποιοδήποτε οριζόντιο διάνυσμα.

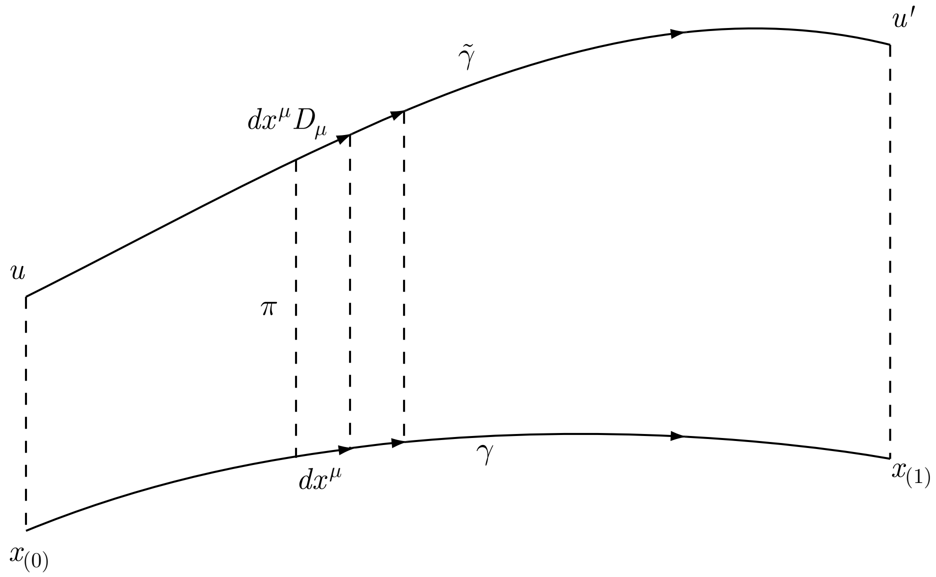
5 Παράλληλη μετατόπιση Οριζόντιες Ανυφώσεις

Μια απειροστή *παράλληλη μετατόπιση* (*parallel transport*) ενός στοιχείου y του νήματος πάνω απ' το x στην κατεύθυνση dx^μ, ορίζεται κατ' επέκταση όσων αναφέρθηκαν για την εφαπτόμενη δέσμη, ως η μετατόπιση του y στο $y + dy^i$ που βρίσκεται στο νήμα πάνω από το $x + dx^\mu$, έτσι ώστε το διάνυσμα του T_xE που ορίζεται από αυτή τη μετατόπιση, δηλαδή το διάνυσμα από το (x, y) στο $(x + dx^\mu, y + dy^i)$, να είναι οριζόντιο. Διαισθητικά, αυτό εξασφαλίζει ότι το y κατά τη μεταφορά του δεν κινείται κατακόρυφα, δηλαδή παραμένει «αμετάβλητο» στον εσωτερικό χώρο που αντιπροσωπεύει το νήμα και αυτό αιτιολογεί τον χαρακτηρισμό «παράλληλη», ο οποίος είναι δανεισμένος από την ειδική περίπτωση που η νηματική δέσμη είναι μια εφαπτόμενη δέσμη. Λέγοντας «αμετάβλητο» δεν εννοούμε βεβαίως ότι οι συνιστώσες του, y^i, παραμένουν αμετάβλητες, ακριβώς όπως στην παράλληλη μετατόπιση διανύσματος στη γεωμετρία Riemann οι συνιστώσες του αλλάζουν, λόγω της καμπυλότητας του χώρου.

Μπορούμε να επεκτείνουμε την έννοια αυτή και να ορίσουμε την (πεπερασμένη) παράλληλη μετατόπιση κατά μήκος καμπύλης. Έστω μια καμπύλη

[2] Η πράξη $\oplus$ ονομάζεται *άθροιση Whitney* (*Whitney sum*) και δηλώνει τη δέσμη που έχει ως νήματα το ευθύ άθροισμα των νημάτων των συνιστώντων δεσμών.

$\gamma(t) = x^\mu(t)$ της βάσης M της δέσμης, με αρχή το σημείο $x_{(0)} = x^\mu(t_0)$ και τέλος το σημείο $x_{(1)} = x^\mu(t_1)$. Αν u είναι ένα στοιχείο του νήματος πάνω από το $x_{(0)}$ τότε εφαρμόζοντας διαδοχικές απειροστές παράλληλες μετατοπίσεις του από το $x_{(0)}$ στο $x^\mu(t_0{+}dt)$ και γενικά από το $x^\mu(t)$ στο $x^\mu(t{+}dt) = x^\mu(t){+}dx^\mu(t)$ μέχρι να φθάσουμε στο τέλος $x_{(1)}$, παίρνουμε ένα στοιχείο u' του νήματος πάνω από το $x_{(1)}$. Η διαδικασία αυτή είναι η παράλληλη μετατόπιση του u κατά μήκος της καμπύλης γ. Το παράλληλα μετατοπιζόμενο στοιχείο διαγράφει πάνω στον ολικό χώρο της δέσμης μια καμπύλη $\tilde{\gamma}$, η οποία βρίσκεται στα νήματα πάνω από τη γ και το εφαπτόμενο διάνυσμά της σε κάθε σημείο της είναι οριζόντιο. Πράγματι από τον ορισμό της απειροστής παράλληλης μετατόπισης, δύο γειτονικά σημεία της $\tilde{\gamma}$ ορίζουν ένα απειροστό οριζόντιο διάνυσμα. Η $\tilde{\gamma}$ ονομάζεται *οριζόντια ανύψωση* (*horizontal lift*) της γ (σχήμα 2).



Σχήμα 2: Οριζόντια ανύψωση καμπύλης.

Ορισμός 5.1 (Οριζόντια Ανύψωση). *Μια καμπύλη $\tilde{\gamma}$ του ολικού χώρου μιας δέσμης ονομάζεται οριζόντια ανύψωση της καμπύλης γ της βάσης αν και μόνο αν $\pi(\tilde{\gamma}) = \gamma$ και τα εφαπτόμενα διανύσματα σε κάθε σημείο της $\tilde{\gamma}$ είναι οριζόντια.*

Από κάθε σημείο u στο νήμα πάνω από το $x_{(0)}$ διέρχεται μία και μοναδική ανύψωση $\tilde{\gamma}$ της γ, αφού μόνο ένα οριζόντιο διάνυσμα κατευθύνεται στη διεύθυνση της γ, όταν προβληθεί στη βάση. Έτσι μπορούμε να ορίσουμε την παράλληλη μετατόπιση ως εξής:

Βρίσκουμε τη μοναδική ανύψωση $\tilde{\gamma}$ της γ που διέρχεται από το u. Το στοιχείο που προκύπτει από την παράλληλη μετατόπιση του u κατά μήκος της γ είναι το τελικό σημείο της $\tilde{\gamma}$, δηλαδή $u' = \tilde{\gamma}(t_1)$, που προφανώς βρίσκεται στο νήμα πάνω από το $x_{(1)}$. Με τον τρόπο αυτό μπορούμε να μετατοπίσουμε παράλληλα ολόκληρο το νήμα $\pi^{-1}(x_{(0)})$, οπότε θα πάρουμε μια απεικόνισή του στο νήμα $\pi^{-1}(x_{(1)})$.

Τώρα η $\tilde{\gamma}(t)$ είναι της μορφής $(x^\mu(t), y^i(t))$ οπότε το εφαπτόμενο διάνυσμά της είναι

$$\frac{d}{dt} = \dot{x}^\mu(t)\frac{\partial}{\partial x^\mu} + \dot{y}^i(t)\frac{\partial}{\partial y^i}$$

Από την απαίτηση να είναι οριζόντιο έχουμε

$$\frac{d}{dt} = \dot{x}^\mu(t)\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} - N^i_\mu\frac{\partial}{\partial y^i}\right)$$

και συγκρίνοντας τις παραπάνω εκφράσεις παίρνουμε

$$\dot{y}^i(t) = -N^i_\mu \dot{x}^\mu(t)$$

δηλαδή

$$\dot{y}^i(t) + N^i_\mu \dot{x}^\mu(t) = 0 \tag{5.1}$$

Η εξίσωση αυτή ονομάζεται *εξίσωση παράλληλης μετατόπισης* και ουσιαστικά προσδιορίζει τις ανυψώσεις της $\gamma(t)$. Στην περίπτωση της εφαπτόμενης δέσμης, η παραπάνω εξίσωση ανάγεται όπως όφειλε, στη γνωστή εξίσωση

$$dy^i + \Gamma^i{}_{j\mu} y^j dx^\mu = 0$$

που μπορεί να γραφτεί και ως $\delta y^i = 0$ ή $Dy^i = 0$.

Και μια παρατήρηση. Τίθεται το εξής εύλογο ερώτημα: αφού η συνοχή και η παράλληλη μετατόπιση μπορούν κατ' αρχήν να οριστούν απευθείας πάνω στη βάση, γιατί να ορίσουμε αυτές τις έννοιες μέσω μιας νηματικής δέσμης; Η απάντηση είναι ότι σε μη τετριμμένες δέσμες, η συνοχή ίσως να μη μπορεί να οριστεί σε όλη τη βάση. Έτσι θα πρέπει να ορίσουμε διαφορετικά τη συνοχή σε κάθε χάρτη και να λάβουμε υπόψη το μετασχηματισμό απ' τον ένα χάρτη στον άλλο στις αλληλεπικαλυπτόμενες περιοχές. Αντίθετα, ορίζοντας την συνοχή στη δέσμη δεν υφίσταται τέτοιο πρόβλημα, γιατί αυτοί οι μετασχηματισμοί ενσωματώνονται στη δομή της δέσμης.

6 Καμπυλότητα

Ας θεωρήσουμε μια κλειστή καμπύλη C της βάσης M που αρχίζει και τελειώνει στο σημείο $x_{(0)}$. Η παράλληλη μετατόπιση κατά μήκος αυτής της καμπύλης απεικονίζει το νήμα $\pi^{-1}(x_{(0)})$ στον εαυτό του. Αυτή η απεικόνιση ανήκει συνεπώς στη δομική ομάδα της δέσμης και ονομάζεται *ολονομία* (*holonomy*) του βρόγχου C. Η μεταβολή των συνιστωσών ενός στοιχείου $y_{(0)}$ του νήματος κατά την παράλληλη μετατόπισή του κατά μήκος αυτού του βρόγχου είναι σύμφωνα με την εξίσωση παράλληλης μετατόπισης (5.1)

$$\Delta y^i = -\oint_C N^i_\mu(x,y)dx^\mu \tag{6.1}$$

Σύμφωνα με το θεώρημα του Stokes ισχύει

$$\oint_{\partial X} A_\mu dx^\mu = \int_X dA_\mu dx^\mu = \int_X \partial_{[\nu}A_{\mu]}dx^\nu \wedge dx^\mu$$

Κατά την εφαρμογή του όμως στην περίπτωσή μας, πρέπει να προσέξουμε ότι το N εξαρτάται και από το y το οποίο πρέπει να θεωρηθεί ως συνάρτηση του x, εφόσον αναφερόμαστε σε μια συγκεκριμένη καμπύλη. Άρα

$$dN^i_\mu = N^i_{\mu,\nu}dx^\nu + N^i_{\mu|j}dy^j = \left(N^i_{\mu,\nu} - N^i_{\mu|j}N^j_\nu\right)dx^\nu$$

όπου χρησιμοποιήσαμε και πάλι την εξίσωση παράλληλης μετατόπισης $dy^j = -N^j_\nu dx^\nu$. Το σύμβολο «,» υποδηλώνει μερική παραγώγιση ως προς x-μεταβλητή (δηλαδή της βάσης) και το «|» ως προς y-μεταβλητή (δηλαδή του νήματος). Συνεπώς η (6.1) γίνεται

$$\Delta y^i = -\int \left(N^i_{[\mu,\nu]} - N^j_{[\nu}N^i_{\mu]|j}\right)dx^\nu \wedge dx^\mu$$

Όπως και στο θεώρημα του Stokes, η ολοκληρωτέα τίθεται αντισυμμετρική σε εναλλαγή των μ και ν γιατί το ίδιο ισχύει και για την προσανατολισμένη στοιχειώδη επιφάνεια $d\sigma^{\nu\mu} = \frac{1}{2}dx^\nu \wedge dx^\mu$.

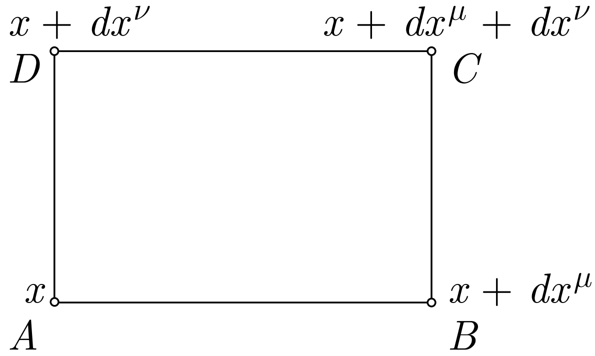
Λαμβάνοντας τον βρόγχο απειροστό και θέτοντας

$$F^i_{\mu\nu} \equiv N^i_{\mu,\nu} - N^i_{\nu,\mu} + N^j_\mu N^i_{\nu|j} - N^j_\nu N^i_{\mu|j} \tag{6.2}$$

η παραπάνω εξίσωση γράφεται

$$\Delta y^i = F^i_{\mu\nu}d\sigma^{\mu\nu}$$

Το μέγεθος που ορίζεται από την (6.2) ονομάζεται *καμπυλότητα* (*curvature*) και εκφράζει τη μεταβολή που προκύπτει από την παράλληλη μετατόπιση κατά μήκος απειροστού βρόγχου, προς το στοιχειώδες εμβαδόν που αυτός περικλείει. Ισοδύναμα, εκφράζει τη διαφορά κατά την παράλληλη μετατόπιση του ίδιου στοιχείου, κατά μήκος δύο διαφορετικών απειροστών διαδρομών που συνδέουν τα ίδια σημεία, προς το εμβαδόν που περικλείουν. Εφαρμόζοντας τον τελευταίο ορισμό για τις διαδρομές ABC και ADC (σχήμα 3) που διαφέρουν ως προς τη σειρά εκτέλεσης δύο απειροστών βημάτων dx^μ και dx^ν, διαπιστώνουμε ότι η καμπυλότητα μπορεί να οριστεί μέσω του μεταθέτη των συναλλοίωτων παραγώγων στις αντίστοιχες κατευθύνσεις. Προς τούτο, ας



Σχήμα 3: Στοιχειώδες παραλληλόγραμμο με πλευρές στις διευθύνσεις dx^μ και dx^ν.

υπολογίσουμε πρώτα το

$$\begin{aligned} D_\mu D_\nu &= \left(\partial_\mu - N^i_\mu \partial_i\right)\left(\partial_\nu - N^j_\nu \partial_j\right) = \\ &= \partial_\mu \partial_\nu - \partial_\mu\left(N^j_\nu \partial_j\right) - N^i_\mu \partial_i \partial_\nu + N^i_\mu \partial_i\left(N^j_\nu \partial_j\right) = \\ &= \partial_\mu \partial_\nu - N^j_{\nu,\mu}\partial_j - N^j_\nu \partial_\mu \partial_j - N^i_\mu \partial_i \partial_\nu + N^i_\mu N^j_{\nu|i}\partial_j + N^i_\mu N^j_\nu \partial_i \partial_j \end{aligned}$$

Οι ελληνικοί δείκτες στο σύμβολο της παραγώγισης ∂ αντιστοιχούν σε x-μεταβλητές και οι λατινικοί σε y-μεταβλητές. Ο μεταθέτης $[D_\mu, D_\nu]$ είναι δύο φορές το αντισυμμετρικό μέρος της παραπάνω παράστασης. Ο πρώτος όρος είναι συμμετρικός σε εναλλαγή των δεικτών μ και ν. Το ίδιο ισχύει και για τον τελευταίο, καθώς και για το άθροισμα τρίτου-τέταρτου όρου. Έτσι

$$[D_\mu, D_\nu] = 2\left(-N^j_{[\nu,\mu]} + N^i_{[\mu} N^j_{\nu]|i}\right)\partial_j = F^j_{\mu\nu}\partial_j \tag{6.3}$$

Εφαρμογή 6.1. *Στην ειδική περίπτωση μιας εφαπτόμενης δέσμης, εφαρμόζοντας τον ορισμό (6.2) και χρησιμοποιώντας τη σχέση (4.1), βρίσκουμε ότι η* *καμπυλότητα της δέσμης είναι ανάλογη της καμπυλότητας της βάσης*

$$\begin{aligned} F^i{}_{\mu\nu} &= \Gamma^i_{j\mu,\nu} y^j - \Gamma^i_{j\nu,\mu} y^j + \left(\Gamma^k_{j\mu} y^j\right)\left(\Gamma^i_{l\nu}\delta^l_k\right) - \left(\Gamma^k_{j\nu} y^j\right)\left(\Gamma^i_{l\mu}\delta^l_k\right) = \\ &= \left(\Gamma^i_{j\mu,\nu} - \Gamma^i_{j\nu,\mu} + \Gamma^k_{j\mu}\Gamma^i_{k\nu} - \Gamma^k_{j\nu}\Gamma^i_{k\mu}\right) y^j = \\ &= -R^i{}_{j\mu\nu} y^j \end{aligned}$$

όπου $R^i{}_{j\mu\nu} = \Gamma^i_{\nu j,\mu} - \Gamma^i_{\mu j,\nu} + \Gamma^i_{\mu a}\Gamma^a_{\nu j} - \Gamma^i_{\nu a}\Gamma^a_{\mu j}$ *είναι ο τανυστής καμπυλότητας του Riemann.*

Εφαρμογή 6.2. *Από τη σχέση (4.4) βρίσκουμε ότι η καμπυλότητα μιας διανυσματικής δέσμης μετασχηματίζεται κάτω από τον γενικό μετασχηματισμό συντεταγμένων (4.3) ως εξής*

$$\bar{F}^i_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\kappa}{\partial \bar{x}^\mu}\frac{\partial x^\lambda}{\partial \bar{x}^\nu} M^i_j F^j_{\kappa\lambda}$$

κάτι που μπορούσαμε να προβλέψουμε και από τη σχέση (6.3), αφού η συναλλοίωτη παράγωγος μετασχηματίζεται προφανώς τανυστικά ως προς μετασχηματισμούς συντεταγμένων της βάσης[3]*.*

Εφαρμογή 6.3. *Είναι εύκολο να δει κανείς ότι η σχέση (6.2) μπορεί να γραφεί στη μορφή*

$$F^i_{\mu\nu} = \frac{\delta N^i_\mu}{\delta x^\nu} - \frac{\delta N^i_\nu}{\delta x^\mu}$$

[3] Ο τανυστικός χαρακτήρας μετασχηματισμού γενικεύεται για την περίπτωση των διανυσματικών δεσμών με τη βοήθεια της έννοιας του d-tensor.