Θεωρία Μέτρου (2022–23)
Ασκήσεις – Φυλλάδιο 2

(Παραδίδετε έξι από τις ασκήσεις. Ημερομηνία παράδοσης: 13 Νοεμβρίου 2022)

1. Έστω $X \neq \varnothing$. Ένα εξωτερικό μέτρο $\varphi : \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ λέγεται *κανονικό* αν για κάθε $A \subseteq X$ υπάρχει φ-μετρήσιμο $B \supseteq A$ τέτοιο ώστε $\varphi(B) = \varphi(A)$.

Αποδείξτε ότι αν φ είναι ένα κανονικό εξωτερικό μέτρο στο X και $\varphi(X) < \infty$ τότε ένα σύνολο $B \subseteq X$ είναι φ-μετρήσιμο αν και μόνο αν

$$\varphi(X) = \varphi(B) + \varphi(X \setminus B).$$

2. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου. Ένα σύνολο $A \in \mathcal{A}$ λέγεται *άτομο* αν $\mu(A) > 0$ και για κάθε $B \in \mathcal{A}$ με $B \subseteq A$ ισχύει ότι $\mu(B) = 0$ ή $\mu(A \setminus B) = 0$.

(α) Αποδείξτε ότι αν το $A \in \mathcal{A}$ είναι άτομο τότε κάθε σύνολο $B \in \mathcal{A}$ τέτοιο ώστε $B \subseteq A$ και $\mu(B) > 0$ είναι επίσης άτομο.

(β) Αν επιπλέον υποθέσουμε ότι το μ είναι σ-πεπερασμένο, αποδείξτε ότι υπάρχει $X_0 \subseteq X$ τέτοιο ώστε το X_0 να είναι αριθμήσιμη ένωση ξένων ανά δύο ατόμων του $(X, \mathcal{A}, \mu)$ και το $X \setminus X_0$ να μην περιέχει άτομα.

3. Έστω (X, d) μετρικός χώρος. Ένα εξωτερικό μέτρο φ στο $\mathcal{P}(X)$ λέγεται *μετρικό εξωτερικό μέτρο* αν ικανοποιεί το εξής: αν $E_1, E_2 \subseteq X$ και $\mathrm{dist}(E_1, E_2) > 0$, τότε $\varphi(E_1 \cup E_2) = \varphi(E_1) + \varphi(E_2)$. Αποδείξτε ότι, τότε, κάθε $B \in \mathcal{B}(X)$ είναι φ-μετρήσιμο. Συνεπώς, ο περιορισμός του φ στην $\mathcal{B}(X)$ είναι μέτρο.

4. Για κάθε $E \subseteq \mathbb{R}$ ορίζουμε

$$J_*(E) = \inf\left\{\sum_{j=1}^{N} \ell(I_j) : E \subseteq \bigcup_{j=1}^{N} I_j, I_j \ \text{ κλειστά διαστήματα}, N \in \mathbb{N}\right\}.$$

(α) Αποδείξτε ότι $J_*(E) = J_*(\overline{E})$.

(β) Αποδείξτε ότι $\lambda^*(E) \leqslant J_*(E)$ και δώστε παράδειγμα συνόλου E για το οποίο $\lambda^*(E) < J_*(E)$.

5. Έστω $A \subset [0, 1]$. Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς:

(α) Αν το A είναι ανοικτό τότε $\lambda(A) = \lambda(\overline{A})$.

(β) Αν $\lambda(A^\circ) = \lambda(\overline{A})$ τότε το A είναι μετρήσιμο.

6. Έστω C το σύνολο του Cantor. Αποδείξτε ότι $C + C = [0, 2]$ και εξετάστε αν το $C \cap \mathbb{Q}$ είναι πυκνό στο C.

7. (α) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^k$. Αποδείξτε ότι το A είναι Lebesgue μετρήσιμο αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει Lebesgue μετρήσιμο $E \subseteq \mathbb{R}^k$ τέτοιο ώστε $\lambda^*(A \triangle E) < \varepsilon$.

(β) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^k$. Αποδείξτε ότι το A είναι Lebesgue μετρήσιμο αν και μόνο αν για κάθε $E \subseteq A$ και για κάθε $F \subseteq A^c$ ισχύει ότι

$$\lambda^*(E \cup F) = \lambda^*(E) + \lambda^*(F).$$

8. Έστω E Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με $\lambda(E) < \infty$. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$g(x) = \lambda((x + E) \cap E)$$

είναι συνεχής και $\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$.

9. Έστω $E \subseteq \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμο σύνολο με $\lambda(E) > 0$. Αποδείξτε ότι υπάρχουν ξένα σύνολα E_1, E_2 τέτοια ώστε $E = E_1 \cup E_2$ και $\lambda(E) = \lambda^*(E_1) = \lambda^*(E_2)$.

10. Θεωρούμε το σύνολο $A := \left\{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\delta_k}{k!} \mid \delta_k = 0 \text{ ή } 1\right\}$. Αποδείξτε ότι το A είναι κλειστό σύνολο με κενό εσωτερικό και μέτρο $\lambda(A) = 0$.

Εξετάστε αν υπάρχει φυσικός αριθμός s τέτοιος ώστε το σύνολο

$$s \cdot A := A + A + \cdots + A = \{y_1 + \cdots + y_s \mid y_i \in A\}$$

να έχει θετικό μέτρο.