# Θεωρία Μέτρου – 8 Φεβρουαρίου 2022

**1. (1.5 μον.)** Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $(A_n)$ μια ακολουθία στοιχείων της $\mathcal{A}$. Υπενθυμίζουμε ότι $\limsup_n A_n := \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$. Αποδείξτε ότι:

(α) Αν $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) < \infty$, τότε $\limsup_n \mu(A_n) \leqslant \mu(\limsup_n A_n)$.

(β) Αν $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \infty$, τότε $\mu(\limsup_n A_n) = 0$.

**2. (1.5 μον.)** Έστω $A, B \subseteq \mathbb{R}$ τέτοια ώστε: υπάρχει ανοικτό $G \subseteq \mathbb{R}$ με $A \subseteq G$ και $G \cap B = \varnothing$. Αποδείξτε ότι $\lambda^*(A \cup B) = \lambda^*(A) + \lambda^*(B)$.

**3. (2 μον.)** (α) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Αποδείξτε ότι η $f$ απεικονίζει $F_\sigma$-σύνολα σε $F_\sigma$-σύνολα.

(β) Δώστε παράδειγμα συνεχούς συνάρτησης $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που απεικονίζει κάποιο μετρήσιμο σύνολο σε μη μετρήσιμο σύνολο.

**4. (2.5 μον.)** (α) Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $f : X \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $A_n = \{x \in X : |f(x)| \geqslant n\}$. Αποδείξτε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε, για κάθε $n \geqslant n_0$,

$$\left| \int_{A_n} f \, d\mu \right| \leqslant \varepsilon.$$

(β) Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $f, f_n : X \to [0, \infty]$ μη αρνητικές ολοκληρώσιμες συναρτήσεις με $f_n \to f$ και $\lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu = \int f \, d\mu < \infty$. Αποδείξτε ότι, για κάθε $E \in \mathcal{A}$,

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n \, d\mu = \int_E f \, d\mu$$

**5. (2.5 μον.)** (α) Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $f_n, f : X \to \mathbb{R}$ μετρήσιμες συναρτήσεις τέτοιες ώστε $\int_X |f_n - f| \, d\mu \longrightarrow 0$. Αποδείξτε ότι υπάρχει υπακολουθία $(f_{k_n})$ της $(f_n)$ τέτοια ώστε

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_X |f_{k_n} - f| \, d\mu \leqslant 1$$

και από αυτό συμπεράνατε ότι $f_{k_n} \longrightarrow f$ σχεδόν παντού.

(β) Υπολογίστε (με πλήρη αιτιολόγηση) το

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{n^3 x^{3/2}}{1 + n^2 x^3} \sin\left(\frac{x}{n}\right) \, dx.$$

**6. (2 μον.)** Έστω $A$ Borel υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με $\lambda(A) = 1$. Υπολογίστε το

$$\lambda_2(\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (1 + x^2)(y - e^x) \in A\}).$$

**Καλή Επιτυχία!**