Θεωρία Μέτρου – 30 Αυγούστου 2021

1. Έστω X, Y μη κενά σύνολα, $\mathcal{A}$ μια σ–άλγεβρα στο X, $\mathcal{C}$ μια σ–άλγεβρα στο Y και $\mathcal{E}$ μια οικογένεια υποσυνόλων του Y για την οποία ισχύει $\sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{C}$. Έστω επίσης $f : X \to Y$.

(α) Αποδείξτε ότι η οικογένεια $\{B \subseteq Y \mid f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$ είναι σ–άλγεβρα στο Y.

(β) Αποδείξτε ότι αν $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ για κάθε $B \in \mathcal{E}$, τότε $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ για κάθε $B \in \mathcal{C}$.

2. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος πιθανότητας και $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ ακολουθίες συνόλων στην $\mathcal{A}$ τέτοιες ώστε $\mu\left(\limsup_k A_k\right) = 1$ και $\mu\left(\liminf_k B_k\right) = 1$. Αποδείξτε ότι $\mu\left(\limsup_k (A_k \cap B_k)\right) = 1$.

Εξετάστε αν το συμπέρασμα εξακολουθεί να ισχύει αν η υπόθεση $\mu\left(\liminf_k B_k\right) = 1$ αντικατασταθεί από την $\mu\left(\limsup_k B_k\right) = 1$.

3. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου και έστω $f_n, f \in L^1(\mu)$ με $\|f_n - f\|_1 \to 0$. Υποθέτουμε επίσης ότι $A_n, A \in \mathcal{A}$ και $\mu(A_n \triangle A) \to 0$. Αποδείξτε ότι

$$\int_{A_n} f_n d\mu \to \int_A f d\mu.$$

4. Έστω $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ Lebesgue ολοκληρώσιμες συναρτήσεις με την ιδιότητα

$$\int_E |f_n|\, d\lambda \leqslant \sqrt{\lambda(E)}$$

για κάθε $n \geqslant 1$ και κάθε μετρήσιμο υποσύνολο E του $[0,1]$. Αν $f_n \to f$ κατά σημείο, αποδείξτε ότι η f είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη και ότι

$$\int_0^1 f_n\, d\lambda \to \int_0^1 f\, d\lambda.$$

5. Έστω $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$, ακολουθία Lebesgue ολοκληρώσιμων συναρτήσεων ώστε $f_n \to 0$ κατά σημείο. Με κάθε μία από τις παρακάτω τρεις συνθήκες, εξετάστε αν ισχύει $\int f_n\, d\lambda \to 0$.

(i) $|f_n| \leqslant 1$ και $\lambda(\{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\}) \leqslant 1$ για κάθε n.

(ii) $|f_n(x)| \leqslant \frac{1}{1+x^2}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και κάθε n.

(iii) $f_n \geqslant 0$ και $\int f_n\, d\lambda \leqslant 1$ για κάθε n.

6. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lebesgue ολοκληρώσιμη και $t > 0$. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $\varphi_t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$\varphi_t(x) = \frac{1}{2t} \int_{x-t}^{x+t} f(u)\, du$$

είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη και

$$\int_{\mathbb{R}} |\varphi_t|\, d\lambda \leqslant \int_{\mathbb{R}} |f|\, d\lambda.$$

Καλή Επιτυχία!