## Θεωρία Μέτρου – 1 Φεβρουαρίου 2023

**1. (3 μον.)** Εξετάστε αν καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής ή ψευδής. Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

(α) Υπάρχει κλειστό σύνολο $F \subset [0,1]$ το οποίο έχει μέτρο $\lambda(F) = \frac{1}{2}$ και δεν περιέχει κανέναν ρητό αριθμό.

(β) Αν $A \subseteq \mathbb{R}$ και $\lambda(A) > 0$ τότε υπάρχουν $x, y \in A$ τέτοια ώστε $x - y \notin \mathbb{Q}$.

(γ) Κάθε συνεχής συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ απεικονίζει Lebesgue μετρήσιμα σύνολα σε Lebesgue μετρήσιμα σύνολα.

**2. (2 μον.)** Έστω $X$ ένα μη κενό σύνολο και $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ ακολουθία ξένων ανά δύο υποσυνόλων του $X$ τέτοια ώστε $X = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$. Θεωρούμε την οικογένεια συνόλων $\mathcal{S} = \left\{\bigcup_{k\in A} E_k : A \subseteq \mathbb{N}\right\}$.

(α) Αποδείξτε ότι η $\mathcal{S}$ είναι $\sigma$-άλγεβρα στο $X$.

(β) Αποδείξτε ότι μια συνάρτηση $g : X \to \mathbb{R}$ είναι $\mathcal{S}$-μετρήσιμη αν και μόνο αν η $g\big|_{E_k}$ είναι σταθερή για κάθε $k = 1, 2, \dots$

**3. (2 μον.)** Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου με $\mu(X) < \infty$ και $f : X \to [0, +\infty)$ μετρήσιμη συνάρτηση. Για κάθε $k \geqslant 1$ ορίζουμε $E_k = \{x \in X : f(x) \geqslant k\}$. Αποδείξτε ότι:

(α) Αν η $f$ είναι ολοκληρώσιμη τότε $\lim\limits_{k\to\infty} k \cdot \mu(E_k) = 0$.

(β) Η $f$ είναι ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu(E_k) < +\infty$.

**4. (2 μον.)** (α) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lebesgue ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Αποδείξτε ότι για κάθε $t > 0$ η συνάρτηση $g_t(x) = f(tx)$ είναι ολοκληρώσιμη και ισχύει

$$\int_{\mathbb{R}} g_t \, d\lambda = \frac{1}{t} \int_{\mathbb{R}} f \, d\lambda.$$

(β) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lebesgue ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Αποδείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f(n^2 x)$ συγκλίνει $\lambda$-σχεδόν παντού.

(γ) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμο, με $\lambda(A) < \infty$. Αποδείξτε ότι σχεδόν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ το σύνολο $D(x) = \{n \in \mathbb{N} : n^2 x \in A\}$ είναι πεπερασμένο.

**5. (1.5 μον.)** Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος πεπερασμένου μέτρου και $g : X \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση τέτοια ώστε $g(x) > 0$ για κάθε $x \in X$. Αποδείξτε ότι:

(α) Για κάθε $0 < \alpha < \mu(X)$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε, αν $E \in \mathcal{A}$ και $\mu(E) > \alpha$, τότε

$$\int_E g \, d\mu \geqslant \delta.$$

(β) Αν $(E_n)$ είναι μια ακολουθία συνόλων στην $\mathcal{A}$ με την ιδιότητα $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{E_n} g \, d\mu = 0$, τότε $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(E_n) = 0$.

**6. (1.5 μον.)** (α) Έστω $B$ Borel υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$. Αποδείξτε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ το σύνολο $B_x = \{y \in \mathbb{R} : (x, y) \in B\}$ είναι Borel υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

(β) Έστω $A$ Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ τέτοιο ώστε $\lambda(A_x) = 0$ σχεδόν για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι $\lambda(A^y) = 0$ σχεδόν για κάθε $y \in \mathbb{R}$.

[*Υπενθύμιση:* $A_x = \{y \in \mathbb{R} : (x, y) \in A\}$ και $A^y = \{x \in \mathbb{R} : (x, y) \in A\}$.]

**Καλή Επιτυχία!**