Θεωρία Μέτρου – 11 Ιανουαρίου 2023

1. (3 μον.) (α) Αποδείξτε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ανοικτό και πυκνό $G_\varepsilon \subset \mathbb{R}$ με $\lambda(G_\varepsilon) \leqslant \varepsilon$.
(β) Έστω $\Delta = \{(q, q+1) : q \in \mathbb{Q}\}$. Αποδείξτε ότι $\sigma(\Delta) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.
(γ) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση και $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με την εξής ιδιότητα: αν $N \subseteq \mathbb{R}$ και $\lambda(N) = 0$ τότε το $\phi^{-1}(N)$ είναι Lebesgue μετρήσιμο σύνολο. Αποδείξτε ότι η $f \circ \phi$ είναι Lebesgue μετρήσιμη.

2. (1.5 μον.) Έστω $X \neq \varnothing$ και $\mathcal{A}$ μια σ-άλγεβρα στο X. Θεωρούμε $A \subseteq X$ και ορίζουμε $\mathcal{F}_A = \{E \in \mathcal{A} : A \subseteq E \text{ ή } A \cap E = \varnothing\}$.

(α) Αποδείξτε ότι η $\mathcal{F}_A$ είναι σ-άλγεβρα.

(β) Έστω $f : X \to \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι η f είναι $\mathcal{F}_A$-μετρήσιμη αν και μόνο αν η f είναι $\mathcal{A}$-μετρήσιμη και η f είναι σταθερή στο A.

3. (2 μον.) (α) Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $f : X \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Αποδείξτε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ με την εξής ιδιότητα: αν $\mu(E) < \delta$, τότε $\int_E |f| \, d\mu < \varepsilon$.
(β) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lebesgue ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f \, d\lambda$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.

4. (1.5 μον.) Έστω $f_n : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Υποθέτουμε ότι, για κάποιους $\alpha_n > 0$, ισχύουν οι

$$\int_{\mathbb{R}} f_n(x) d\lambda(x) = \alpha_n^2 \quad \text{και} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n < \infty.$$

Αποδείξτε ότι:

(α) Αν $E_n = \{x \in \mathbb{R} : f_n(x) > \alpha_n\}$ τότε $\lim\limits_{N \to \infty} \lambda\left(\bigcup_{n=N}^{\infty} E_n\right) = 0$.

(β) Η ακολουθία $\frac{f_n(x)}{\alpha_n}$ είναι φραγμένη σχεδόν για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

5. (2 μον.) (α) Έστω $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμες συναρτήσεις τέτοιες ώστε

$$\int_{[0,1]} |f_n|^4 \, d\lambda \leqslant \frac{1}{n^2}$$

για κάθε $n \geqslant 1$. Αποδείξτε ότι $f_n \to 0$ σχεδόν παντού.
(β) Έστω $f_n : [0, 1] \to [0, \infty)$ Lebesgue μετρήσιμες συναρτήσεις τέτοιες ώστε $f_n \to 0$ κατά σημείο και

$$\int_{[0,1]} f_n \, d\lambda = 1$$

για κάθε $n \geqslant 1$. Αν $g := \sup_n f_n$, αποδείξτε ότι

$$\int_{[0,1]} g \, d\lambda = +\infty.$$

6. (2 μον.) (α) Αποδείξτε ότι $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < y\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.
(β) Έστω $\delta > 0$. Αποδείξτε ότι $C_\delta := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < y \leqslant x + \delta\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.
(γ) Έστω μ ένα μέτρο πιθανότητας στον $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Ορίζουμε $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $F(x) = \mu((-\infty, x])$. Αποδείξτε ότι, για κάθε $\gamma \in \mathbb{R}$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \big(F(x + \gamma) - F(x)\big) \, d\lambda(x) = \gamma.$$

Καλή Επιτυχία!