Θεωρία Μέτρου (2021–22)
Ασκήσεις – Φυλλάδιο 2

(Παραδίδετε έξι από τις ασκήσεις. Ημερομηνία παράδοσης: 21 Νοεμβρίου 2021)

1. Έστω $E \subset \mathbb{R}^k$ με $\lambda^*(E) < \infty$. Αποδείξτε ότι το E είναι Lebesgue μετρήσιμο αν και μόνο αν υπάρχουν ακολουθία $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ ξένων ανά δύο συμπαγών συνόλων και $N \subset \mathbb{R}^k$ με $\lambda(N) = 0$ τέτοια ώστε

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n \cup N.$$

2. Έστω $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία υποσυνόλων του $\mathbb{R}^k$. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν ξένα ανά δύο Lebesgue μετρήσιμα σύνολα E_n τέτοια ώστε $A_n \subseteq E_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αποδείξτε ότι

$$\lambda^*\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(A_n).$$

3. (α) Αποδείξτε ότι για κάθε $A, B \subseteq \mathbb{R}^k$ ισχύει ότι

$$\lambda^*(A \cup B) + \lambda^*(A \cap B) \leqslant \lambda^*(A) + \lambda^*(B).$$

(β) Έστω $E \subseteq \mathbb{R}^k$ τέτοιο ώστε $E \cap K \neq \varnothing$ για κάθε συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^k$ με $\lambda(K) > 0$. Αποδείξτε ότι $\lambda^*(E) = \infty$.

4. (α) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^k$. Αποδείξτε ότι το A είναι Lebesgue μετρήσιμο αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει Lebesgue μετρήσιμο $E \subseteq \mathbb{R}^k$ τέτοιο ώστε $\lambda^*(A \triangle E) < \varepsilon$.
(β) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^k$. Αποδείξτε ότι το A είναι Lebesgue μετρήσιμο αν και μόνο αν για κάθε $E \subseteq A$ και για κάθε $F \subseteq A^c$ ισχύει ότι

$$\lambda^*(E \cup F) = \lambda^*(E) + \lambda^*(F).$$

5. Εξετάστε αν κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής ή ψευδής.

(α) Υπάρχει αρίθμηση $\{q_n : n \in \mathbb{N}\}$ του $\mathbb{Q}$ τέτοια ώστε

$$\mathbb{R} \neq \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(q_n - \frac{1}{n}, q_n + \frac{1}{n}\right).$$

(β) Αν $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι ακολουθία Lebesgue μετρήσιμων υποσυνόλων του $[0,1]$ με $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n) = \infty$, τότε

$$\sum_{\substack{k,n=1 \\ k \neq n}}^{\infty} \lambda(E_k \cap E_n) = \infty.$$

6. Έστω $E \subseteq \mathbb{R}^k$. Για κάθε $n \geqslant 1$ ορίζουμε $U_n = \left\{x \in \mathbb{R}^d : \mathrm{dist}(x, E) < \frac{1}{n}\right\}$.

(α) Αποδείξτε ότι αν το E είναι συμπαγές τότε $\lambda(U_n) \to \lambda(E)$.

(β) Δώστε παραδείγματα που να δείχνουν ότι το συμπέρασμα του (α) δεν ισχύει αν το E είναι κλειστό και μη φραγμένο ή αν το E είναι ανοικτό και φραγμένο.

7. (α) Αποδείξτε ότι για κάθε $\varepsilon \in (0,1)$ υπάρχει ανοικτό πυκνό $U \subset [0,1]$ με $\lambda(U) < \varepsilon$ και $\lambda(\partial(U)) > 1-\varepsilon$, όπου $\partial(U)$ είναι το σύνορο του U.

(β) Αποδείξτε ότι υπάρχει ακολουθία $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ Lebesgue μετρήσιμων υποσυνόλων του $[0,1]$ τέτοια ώστε όλα τα A_n να έχουν κενό εσωτερικό και η ένωσή τους να έχει μέτρο 1.

8. Στο $[0,1]$ θεωρούμε τη σχέση ισοδυναμίας $x \sim y$ αν και μόνο αν $x - y \in \mathbb{Q}$ και στη συνέχεια ορίζουμε $N \subset [0,1]$ που περιέχει ακριβώς ένα στοιχείο από κάθε κλάση ισοδυναμίας. Ορίζουμε επίσης $T = [0,1] \setminus N$. Αποδείξτε ότι $\lambda^*(T) = 1$ και συμπεράνατε ότι

$$\lambda^*(N) + \lambda^*(T) > \lambda^*(N \cup T).$$

9. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου. Για κάθε $E \subseteq X$ ορίζουμε

$$\mu^*(E) = \inf\{\mu(A) \mid A \in \mathcal{A},\ E \subseteq A\}.$$

Γνωρίζουμε ότι το μ^* είναι εξωτερικό μέτρο στο X. Έστω $\overline{\mu}$ το μέτρο που επάγεται από το μ^* στη σ-άλγεβρα $\mathcal{A}_{\mu^*}$ των μ^*-μετρήσιμων συνόλων. Αν το αρχικό μέτρο μ είναι σ−πεπερασμένο, αποδείξτε ότι ο $(X, \mathcal{A}_{\mu^*}, \overline{\mu})$ είναι η πλήρωση του $(X, \mathcal{A}, \mu)$.

10. Έστω μ ένα πεπερασμένο μέτρο στον μετρήσιμο χώρο $(X, \mathcal{A})$ και έστω μ^* το εξωτερικό μέτρο που επάγεται από το μ στο $\mathcal{P}(X)$. Υποθέτουμε ότι $\mu^*(E) = \mu^*(X)$ για κάποιο $E \subseteq X$ (αυτό δεν σημαίνει αναγκαστικά ότι $E \in \mathcal{A}$).

(α) Αποδείξτε ότι αν $A, B \in \mathcal{A}$ και $A \cap E = B \cap E$, τότε $\mu(A) = \mu(B)$.

(β) Θέτουμε $\mathcal{A}_E = \{A \cap E : A \in \mathcal{A}\}$, και ορίζουμε $\nu : \mathcal{A}_E \to [0, \infty]$ με $\nu(A \cap E) = \mu(A)$. Αποδείξτε ότι η $\mathcal{A}_E$ είναι σ-άλγεβρα στο E και ότι το ν είναι (καλά ορισμένο) μέτρο στην $\mathcal{A}_E$.